

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**Dành cho học sinh trung bình**

- Câu 1.** (Đề minh họa 2022) Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$ có bán kính bằng
- A. 3. B. 81. C. 9. D. 6.

Lời giải

Chọn A

Bán kính của mặt cầu (S) là $R = \sqrt{9} = 3$.

- Câu 2.** (Mã 102 - 2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$. Đường kính của (S) bằng
- A. 3. B. $\sqrt{6}$. C. $2\sqrt{6}$. D. 12.

Lời giải

Chọn C

Đường kính của (S) bằng $2R = 2\sqrt{6}$.

- Câu 3.** (Mã 104-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là
- A. $(-2; 1; -3)$ B. $(-4; 2; -6)$ C. $(4; -2; 6)$ D. $(2; -1; 3)$

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$ có tâm $I(2; -1; 3)$.

- Câu 4.** (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Tâm của (S) có tọa độ là
- A. $(-1; -2; -3)$ B. $(1; 2; 3)$ C. $(-1; 2; -3)$ D. $(1; -2; 3)$

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ có tâm là $I(a; b; c)$.

Suy ra, mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$ có tâm là $I(1; -2; 3)$.

- Câu 5.** (Mã 102 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$. Bán kính của (S) bằng
- A. 6. B. 18. C. 3. D. 9.

Lời giải

Chọn C

Bán kính của (S) là $R = \sqrt{9} = 3$.

- Câu 6.** (Mã 103 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 16$. Bán kính của (S) là:
- A. 32 B. 8 C. 4 D. 16

Lời giải

Chọn C

Từ phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 16$ $\Rightarrow$ Bán kính $R = \sqrt{16} = 4$

- Câu 7.** (Mã 103 - 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là
- A. $(-1; 2; 3)$ B. $(2; -4; -6)$ C. $(-2; 4; 6)$ D. $(1; -2; -3)$

Lời giải

Chọn D

Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là $(1; -2; -3)$.

- Câu 8.** (Mã 101 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng
- A. 3. B. $\sqrt{15}$. C. $\sqrt{7}$. D. 9.

Lời giải

Chọn A

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2(-1)x + 2 \cdot 0 \cdot y - 2 \cdot 1 \cdot z - 7 = 0$$

$$\Rightarrow a = -1, b = 0, c = 1, d = -7$$

$$\Rightarrow \text{Tâm mặt cầu } I(-1; 0; 1) \text{ bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 7} = 3$$

- Câu 9.** (Mã 102 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng
- A. $\sqrt{7}$. B. 9. C. $\sqrt{15}$. D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 9$$

Vậy bán kính của mặt cầu bằng 3.

Câu 10. (THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (S) .

A. $I(-4; 1; 0), R = 2$. B. $I(-4; 1; 0), R = 4$.

C. $I(4; -1; 0), R = 2$. D. $I(4; -1; 0), R = 4$.

Lời giải

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 16$.

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(4; -1; 0)$ và bán kính $R = 4$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính mặt cầu (S) :

A. $I(-4; 1; 0), R = 2$. B. $I(-4; 1; 0), R = 4$. C. $I(4; -1; 0), R = 2$. D. $I(4; -1; 0), R = 4$.

Lời giải

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow I(4; -1; 0)$$

$$R = 4.$$

Câu 12. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; -3)$ và đi qua điểm $M(4; 0; 0)$. Phương trình của (S) là

A. $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 25$. B. $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 5$.

C. $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 25$. D. $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 5$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; -3)$ và bán kính R là: $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = R^2$.

Ta có: $M \in (S) \Rightarrow 4^2 + 0^2 + (0 + 3)^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 = 25$.

Vậy phương trình cần tìm là: $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 25$.

Câu 13. (Mã 110 2017) Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

A. $m < 6$ B. $m \geq 6$ C. $m \leq 6$ D. $m > 6$

Lời giải

Chọn A

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là một phương trình mặt cầu

$$\Leftrightarrow 1^2 + 1^2 + 2^2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 6.$$

Câu 14. (Đề Tham Khảo 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua A là

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$

B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29$

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$

Lời giải

Chọn C

Ta có $R = IA = \sqrt{(1-1)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$

vậy phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

$$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 + (z - z_I)^2 = R^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 5$$

Câu 15. (THPT Cù Huy Cận 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 7), B(-3; 8; -1)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

A. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{45}$

B. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 45$

C. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = \sqrt{45}$

D. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 45$

Lời giải

Gọi I là trung điểm AB ta có $I(-1; 3; 3)$ là tâm mặt cầu.

Bán kính $R = IA = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-3)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{45}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 45$.

Câu 16. (Sở Thanh Hóa 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-2;2;-3)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 36$.

B. $x^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$.

C. $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$.

D. $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 36$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(0; 3; -1)$.

$IA = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$.

Mặt cầu đã cho có tâm I , đường kính AB nên có phương trình là $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Câu 17. (Chuyên Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hỏi trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 1 = 0$

B. $x^2 + z^2 + 3x - 2y + 4z - 1 = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4y + 4z - 1 = 0$

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 8 = 0$

Lời giải

Chọn A

Đáp án B vì không có số hạng y^2 . Đáp án C loại vì có số hạng $2xy$. Đáp án D loại vì $a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + 1 + 4 - 8 = -2 < 0$.

Đáp án A thỏa mãn vì $a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + 0 + 4 + 1 = 6 > 0$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -1; -3)$; $B(0; 3; -1)$. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là :

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 6$

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24$

C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 24$

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 6$

Lời giải

Chọn D

Tâm I mặt cầu là trung điểm của AB

$$I(1; 1; -2) \quad \text{bán kính} \quad R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{4+16+4} = \frac{1}{2}\sqrt{24}$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 6$$

Câu 19. (Chuyên KHTN 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ phương trình nào sau đây không phải là phương trình của một mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z - 3 = 0$

B. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x - y - z = 0$

C. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 8y + 6z + 3 = 0$

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 10 = 0$

Lời giải

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình của một mặt cầu nếu $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Câu 20. (Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1; 1; 1)$ và $A(1; 2; 3)$. Phương trình của mặt cầu có tâm I và đi qua A là

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29$

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$

D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$

Lời giải

Chọn B

Bán kính của mặt cầu: $r = IA = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Phương trình mặt cầu: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

Câu 21. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 1819) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(7; -2; 2)$ và $B(1; 2; 4)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đường kính AB ?

A. $(x-4)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 14$

B. $(x-4)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 2\sqrt{14}$

C. $(x-7)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 14$

D. $(x-4)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 56$

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu nhận AB làm đường kính, do đó mặt cầu nhận trung điểm $I(4; 0; 3)$ của AB làm tâm và có bán kính $R = \frac{AB}{2} = \sqrt{56}$.

Suy ra phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-4)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 56$.

Câu 22. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my + 19m - 6 = 0$ là phương trình mặt cầu.

A. $1 < m < 2$.

B. $m < 1$ hoặc $m > 2$.

C. $-2 \leq m \leq 1$.

D. $m < -2$ hoặc $m > 1$.

Lời giải

Điều kiện để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my + 19m - 6 = 0$ là phương trình mặt cầu là: $(m+2)^2 + 4m^2 - 19m + 6 > 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow m < 1$ hoặc $m > 2$.

Dành cho học sinh khá giỏi

Câu 23. (Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng - 2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $C(0; 0; 3)$, $B(0; 2; 0)$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính là:

A. $R = 2$.

B. $R = \sqrt{3}$.

C. $R = 3$.

D. $R = \sqrt{2}$.

Lời giải

Giả sử $M(x; y; z)$.

Ta có: $MA^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2$; $MB^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2$; $MC^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2$.

$$MA^2 = MB^2 + MC^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 + x^2 + y^2 + (z-3)^2$$

$$\Leftrightarrow -2x + 1 = (y-2)^2 + x^2 + (z-3)^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$$

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính là $R = \sqrt{2}$.

Câu 24. (Toán Học Và Tuổi Trẻ 2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 2; 3)$. Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) .

- A. $l = 2\sqrt{13}$. B. $l = 2\sqrt{41}$. C. $l = 2\sqrt{26}$. D. $l = 2\sqrt{11}$.

Lời giải

Gọi tâm mặt cầu là: $I(x; y; 0)$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2 + 1^2} \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + 3^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2 + 4^2 = (y+3)^2 + 1^2 \\ x^2 - 2x + 1 + 16 = x^2 - 4x + 4 + 9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 10 \\ 2x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow l = 2R = 2\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 4^2} = 2\sqrt{26} \end{aligned}$$

Câu 25. (Chuyên ĐHSPhN - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1; 0; 0)$, $B(0; 0; 2)$, $C(0; -3; 0)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là

- A. $\frac{\sqrt{14}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{14}}{4}$. C. $\frac{\sqrt{14}}{2}$. D. $\sqrt{14}$.

Lời giải

Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Vì O, A, B, C thuộc (S) nên ta có:

$$\begin{cases} d = 0 \\ 1 + 2a + d = 0 \\ 4 - 4c + d = 0 \\ 9 + 6b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = 1 \\ d = 0 \end{cases}$$

Vậy bán kính mặt cầu (S) là: $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 1} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 26. (Sở Hà Nội 2019) Cho hai điểm A, B cố định trong không gian có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA = 3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

- A. 3. B. $\frac{9}{2}$. C. 1. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải



Ta có: $MA = 3MB \Leftrightarrow MA^2 = 9MB^2 \Leftrightarrow (MI + IA)^2 = 9(MI - IB)^2$
 $\Leftrightarrow IA^2 - 9IB^2 + 2MI(IA - 9IB) = 8MI^2 \quad (1)$

Gọi I thỏa mãn $IA - 9IB = 0 \Leftrightarrow BI = \frac{1}{8}AB$ nên $IB = \frac{1}{2}; IA = \frac{9}{2}$.

Từ (1) suy ra $\Leftrightarrow 8MI^2 = 18 \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$ suy ra $M \in S\left(I; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 27. (Yên Phong 1 - 2018) Trong không gian $Oxyz$. Cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(0;1;2)$ và hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (BCD) là $H(4;-3;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

- A. $I(3;-2;-1)$. B. $I(2;-1;0)$. C. $I(3;-2;1)$. D. $I(-3;-2;1)$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c) \Rightarrow IA = (-a;1-b;2-c); IH = (4-a;-3-b;-2-c)$

$ABCD$ là tứ diện đều nên tâm I của mặt cầu ngoại tiếp trùng với trọng tâm tứ diện

$$\Rightarrow IA = -3IH \Rightarrow \begin{cases} -a = -3(4-a) \\ 1-b = -3(-3-b) \\ 2-c = -3(-2-c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow I(3;-2;-1)$$

Câu 28. (Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định -2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) .

- A. $R = \sqrt{41}$. B. $R = \sqrt{15}$. C. $R = \sqrt{13}$. D. $R = \sqrt{26}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, với tọa độ tâm $I(a;b;c)$.

Ta có:

$$I(a;b;c) \in (Oxy) \Rightarrow c = 0;$$

$$\begin{cases} A \in (S) \\ B \in (S) \\ C \in (S) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - 4b + d = -21 \\ -2a + 6b + d = -11 \\ -4a - 4b + d = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ d = -21 \end{cases};$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{4 + 1 + 0 + 21} = \sqrt{26}.$$

- Câu 29.** (THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019) Trong không gian $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu đi qua điểm $D(0;1;2)$ và tiếp xúc với các trục Ox , Oy , Oz tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$. Bán kính của (S) bằng
- A. $\sqrt{5}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. D. $5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là tâm của mặt cầu (S) . Vì (S) tiếp xúc với các trục Ox , Oy , Oz tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ nên ta có $IA \perp Ox$, $IB \perp Oy$, $IC \perp Oz$ hay A, B, C tương ứng là hình chiếu của I trên Ox , Oy , $Oz \Rightarrow I(a;b;c)$.

$\Rightarrow$ Mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Vì (S) đi qua A, B, C, D nên ta có:
$$\begin{cases} a^2 = b^2 = c^2 = d & (1) \\ 5 - 2b - 4c + d = 0 & (2) \end{cases}$$

Vì $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ nên $0 < d \neq 1$. Mặt khác, từ (1) $\Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{2d}$.

• TH1: Từ (1) $\Rightarrow b = c = \sqrt{d}$. Thay vào (*): $5 - 6\sqrt{d} + d = 0 \Leftrightarrow d = 25$ (nhận).
 $\Rightarrow R = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2}$.

• TH2: Từ (1) $\Rightarrow b = c = -\sqrt{d}$. Thay vào (*): $5 + 6\sqrt{d} + d = 0$ (vô nghiệm).

• TH3: Từ (1) $\Rightarrow b = \sqrt{d}$, $c = -\sqrt{d}$. Thay vào (*): $5 + 2\sqrt{d} + d = 0$ (vô nghiệm).

• TH4: Từ (1) $\Rightarrow b = -\sqrt{d}$, $c = \sqrt{d}$. Thay vào (*): $5 - 2\sqrt{d} + d = 0$ (vô nghiệm).

Vậy mặt cầu (S) có bán kính $R = 5\sqrt{2}$.

- Câu 30.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và hình nón (H) có đỉnh $A(3;2;-2)$ và nhận AI làm trục đối xứng với I là tâm mặt cầu. Một đường sinh của hình nón (H) cắt mặt cầu tại M, N sao cho $AM = 3AN$. Viết phương trình mặt cầu đồng tâm với mặt cầu (S) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (H) .

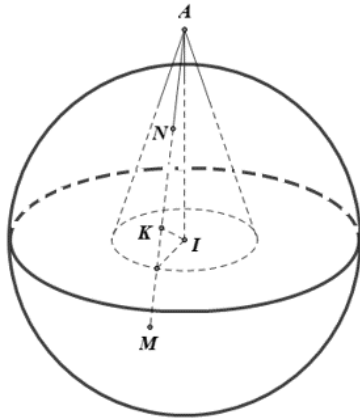
A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{71}{3}$. B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{70}{3}$.

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{74}{3}$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{76}{3}$

Lời giải

Chọn A



Gọi hình chiếu vuông góc của I trên MN là K .

Để thấy $AN = NK = \frac{1}{3}AM$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=5$

Có $AM \cdot AN = AI^2 - R^2 = 4 \Rightarrow AN^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow KN = AN = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow IK = \sqrt{IN^2 - KN^2} = \frac{\sqrt{213}}{3}$

Nhận thấy mặt cầu đồng tâm với mặt cầu (S) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón

(H) chính là mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ có bán kính $IK = \frac{\sqrt{213}}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{71}{3}$.

Câu 31. (Mã 123 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?

A. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$

B. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17$

C. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13$

D. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$

Lời giải

Chọn A

Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I(1;0;0) \Rightarrow IM = \sqrt{13}$. Suy ra phương trình mặt

cầu tâm I bán kính IM là: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

Câu 32. (THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I , cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$

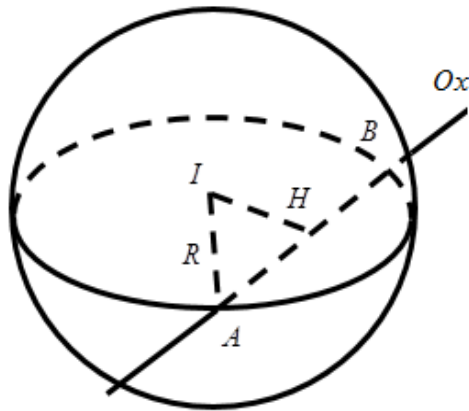
A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 20$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB suy ra H là hình chiếu vuông góc của I lên Ox nên $H(1;0;0)$.

$$IH = \sqrt{13} \Rightarrow R = IA = \sqrt{IH^2 + AH^2} = 4.$$

Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

Câu 33. (Sgd Cần Thơ - 2018) Trong không gian $Oxyz$, giá trị dương của m sao cho mặt phẳng (Oxy) tiếp xúc với mặt cầu $(x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = m^2 + 1$ là

A. $m = 5$.

B. $m = \sqrt{3}$.

C. $m = 3$.

D. $m = \sqrt{5}$.

Lời giải

Mặt cầu $(S): (x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = m^2 + 1$ có tâm $I(3;0;2)$, bán kính $R = \sqrt{m^2 + 1}$.

(S) tiếp xúc với $(Oxy) \Leftrightarrow d(I, (Oxy)) = R$

$$\Leftrightarrow 2 = \sqrt{m^2 + 1} \Leftrightarrow m^2 = 3 \Leftrightarrow m = \sqrt{3} \text{ (do } m \text{ dương)}.$$

Câu 34. (THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?

A. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$

B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$

C. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13$

D. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17$

Lời giải

Với điểm $M(1;-2;3)$ thì hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I(1;0;0)$

Có $IM = \sqrt{13}$ vậy phương trình mặt cầu tâm $I(1;0;0)$ bán kính IM là: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$

Câu 35. (Sở Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R=2$?

- A. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 3 = 0$ B. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 10 = 0$
 C. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 2 = 0$ D. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 5 = 0$

Lời giải

Ta có mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ có bán kính là $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{4} = 2$$

Trong đáp án C ta có:

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1;1;1)$ và diện tích bằng 4π có phương trình là

- A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$ B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$
 C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 4$ D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$

Lời giải

Ta có: $S = 4\pi R^2 = 4\pi \Leftrightarrow R = 1$

Vậy (S) tâm $I(1;1;1)$ bán kính $R = 1$ có pt: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$

Câu 37. (Mã 104-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Phương trình của mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng $x - 2y + 2z + 3 = 0$ là

- A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$ B. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 2$
 C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$ D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu tâm A tiếp xúc với mặt phẳng đã cho có bán kính $R = \frac{|1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 2$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$

Câu 38. (Đề Tham Khảo 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;-1)$ và đi qua điểm $A(2;1;2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A ?

- A. $x + y + 3z - 9 = 0$ B. $x + y - 3z + 3 = 0$ C. $x + y - 3z - 8 = 0$ D. $x - y - 3z + 3 = 0$

Lời giải

Chọn B

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm. Khi đó, (P) tiếp xúc với (S) tại A khi chỉ khi (P) đi qua $A(2;1;2)$ và nhận vector $\vec{IA} = (-1; -1; 3)$ làm vector pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (P) là $-x - y + 3z - 3 = 0 \Leftrightarrow x + y - 3z + 3 = 0$.

Câu 39. (Chuyên Quốc Học Huế -2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) có phương trình $2x + y - z - 1 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$. Xác định bán kính r của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) .

A. $r = \frac{2\sqrt{42}}{3}$

B. $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $r = \frac{2\sqrt{15}}{3}$

D. $r = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;-2)$ và bán kính $R=2$. Gọi d là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (α) . Ta có $d = d(I, (\alpha)) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Khi đó ta có:

Câu 40. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(2;1;-4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 2z - 7 = 0$.

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 8z - 4 = 0$

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 8z - 4 = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 8z - 4 = 0$

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 8z - 4 = 0$

Lời giải

Chọn C

$$R = d(I, (\alpha)) = \frac{|2 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) - 7|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 5$$

Mặt cầu cần tìm có bán kính

Phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 25$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 8z - 4 = 0$$

Câu 41. (SGD Bình Phước - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích 2π . Mặt cầu (S) có phương trình là

A. $x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 2$

B. $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$

C. $x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 3$

D. $x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 1$

Lời giải

Chọn B

Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu và đường tròn giao tuyến. Theo giả thiết ta có:

$$\pi r^2 = 2\pi \Leftrightarrow r^2 = 2$$

Mặt khác $d(I, (P)) = 1$ nên $R^2 = r^2 + [d(I, (P))]^2 = 3$

Vậy phương trình mặt cầu là $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$

Câu 42. (Bình Giang-Hải Dương 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1; 2; -1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$

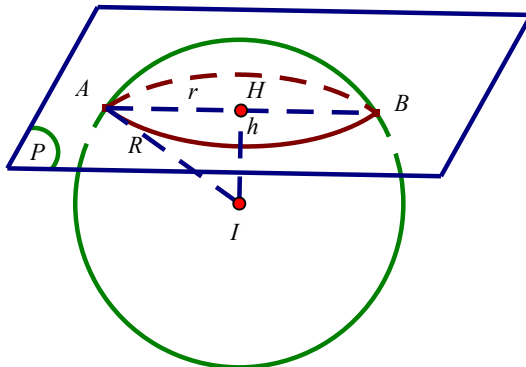
B. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$

C. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 34$

D. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$

Lời giải

Chọn D



Gọi h là khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) ta có:

$$h = d(I; (P)) = \frac{|-1 - 4 - 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 3$$

Bán kính mặt cầu (S) là: $R = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

Phương trình mặt cầu (S) là: $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(3; 1; -1)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z + 3 = 0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

A. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$

B. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 16$

C. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$

D. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 16$

Lời giải

Chọn A

Gọi bán kính của mặt cầu (S) là R .

Mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng $(P) \Leftrightarrow d(I; (P)) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|3 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = R \Leftrightarrow R = 2$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là:

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$$

Câu 44. (Đà Nẵng 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 1)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 7 = 0$ theo một đường tròn có đường kính bằng 8 . Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 81$

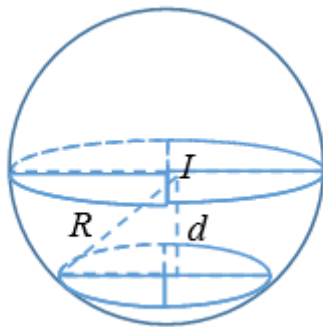
B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5$

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$

Lời giải

Chọn D



Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là

$$d = d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 1 + 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 3$$

Đường tròn giao tuyến có đường kính bằng 8 nên bán kính đường tròn là $r = 4$.

Bán kính của mặt cầu (S) là $R = \sqrt{d^2 + r^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$.

Câu 45. (chuyên Hùng Vương Gia Lai -2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 10 = 0$, mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 10 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. (P) tiếp xúc với (S) .
 B. (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn khác đường tròn lớn.
 C. (P) và (S) không có điểm chung.
 D. (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I = (2; -1; -1)$, bán kính $R = \sqrt{4+1+1-(-10)} = \sqrt{16} = 4$

$$d(I, (P)) = \frac{|2+2(-1)-2(-1)+10|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{12}{3} = 4$$

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là:

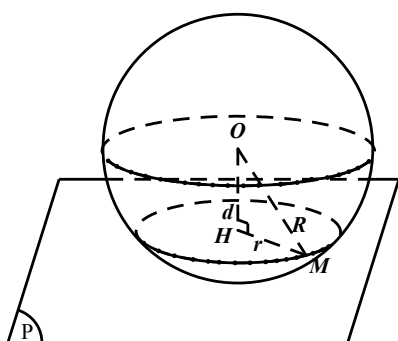
Ta thấy: $d(I, (P)) = R$, vậy (P) tiếp xúc với (S) .

Câu 46. (Chuyên Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$. Tìm bán kính r đường tròn giao tuyến của (S) và (P) .

- A. $r = \frac{1}{3}$. B. $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. C. $r = \frac{1}{2}$. D. $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R = 1$.

Khoảng cách $d(O, (P)) = \frac{1}{3}$.

Bán kính đường tròn giao tuyến là $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 47. (Kinh Môn - Hải Dương 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(3;1;0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 1 = 0$?

- A. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3$ B. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$
 C. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3$ D. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$

Lời giải

Chọn D

Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với (P) có R là bán kính. Khi đó ta có:

$$d(I, (P)) = R \Rightarrow R = \frac{|2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} \Leftrightarrow R = 3$$

Vậy phương trình của (S) là $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$

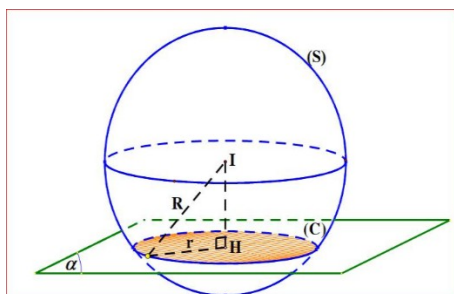
Câu 48. (SGD Bến Tre 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$

Đường tròn giao tuyến của (S) với mặt phẳng (Oxy) có bán kính là

- A. $r = 3$ B. $r = \sqrt{5}$ C. $r = \sqrt{6}$ D. $r = \sqrt{14}$

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (Oxy) là $d = 3$, suy ra bán kính đường tròn giao tuyến cần tìm là $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5}$

Câu 49. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S)

- A. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 8$ B. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 10$
 C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8$ D. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$

Lời giải

Chọn D

Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu (S) và đường tròn giao tuyến

$$R^2 = r^2 + (d(I, (P)))^2 = 1 + \left(\frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} \right)^2 = 10$$

Ta có

Mặt cầu (S) tâm $I(2; 1; 1)$ bán kính $R = \sqrt{10}$ là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$.

Câu 50. (Mã 104 2017) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2; 3; 3)$, $N(2; -1; -1)$, $P(-2; -1; 3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y - z + 2 = 0$

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 2 = 0$

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 2 = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 10 = 0$

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$

Lời giải

Chọn D

Giả sử phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Điều kiện: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0(*)$

Vì mặt cầu (S) đi qua 3 điểm $M(2; 3; 3)$, $N(2; -1; -1)$, $P(-2; -1; 3)$ và có tâm I thuộc

$$mp(P) \Rightarrow \begin{cases} 4a + 6b + 6c - d = 22 \\ 4a - 2b - 2c - d = 6 \\ 4a + 2b - 6c + d = -14 \\ 2a + 3b - c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 3 \\ d = -2 \end{cases} : T/m(*)$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$.

Câu 51. (Sở Hà Nội 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 2 = 0$ và $(Q): 2x - y + z + 1 = 0$. Số mặt cầu đi qua $A(1; -2; 1)$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P), (Q)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải

$$M(0; 0; 2) \in (P) \Rightarrow d((P); (Q)) = d(M; (Q)) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Ta có

$$d(A; (P)) = \frac{\sqrt{6}}{2}; d(A; (Q)) = \sqrt{6} \Rightarrow d(A; (Q)) = d(A; (P)) + d((Q); (P))$$

Vậy không có mặt cầu thỏa yêu cầu bài toán

- Câu 52.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(6; 2; -5)$, $B(-4; 0; 7)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A .
- A. $(P): 5x + y - 6z + 62 = 0$ B. $(P): 5x + y - 6z - 62 = 0$
 C. $(P): 5x - y - 6z - 62 = 0$ D. $(P): 5x + y + 6z + 62 = 0$

Lời giải

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(1; 1; 1)$.

Mặt cầu (S) có đường kính AB nên có tâm là điểm I .

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A nên mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\vec{IA} = (5; 1; -6)$ là vector pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) :

$$5(x - 6) + 1(y - 2) - 6(z + 5) = 0 \Leftrightarrow 5x + y - 6z - 62 = 0$$

- Câu 53.** (Sở Hà Nam - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z + 7 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 10 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) theo một giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 6π . Hỏi (Q) đi qua điểm nào trong số các điểm sau?

- A. $(6; 0; 1)$ B. $(-3; 1; 4)$ C. $(-2; -1; 5)$ D. $(4; -1; -2)$

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -2)$, bán kính $R = \sqrt{15}$.

Gọi r là bán kính của đường tròn giao tuyến. Ta có $2\pi r = 6\pi \Leftrightarrow r = 3$.

Do $(Q) \parallel (P) \Rightarrow (Q): x - 2y + z + d = 0 \ (d \neq 7)$

$$d(I, (Q)) = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{|d - 1|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 7 \text{ (loại)} \\ d = -5 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Ta có:

Vậy $(Q): x - 2y + z - 5 = 0$. Thay tọa độ $(-2; -1; 5)$ vào (Q) thấy thỏa mãn.

- Câu 54.** (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y - 12z + 10 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: tiếp xúc với (S) ; song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

A. $4x + 3y - 12z - 78 = 0$

B. $4x + 3y - 12z - 26 = 0$

C. $4x + 3y - 12z + 78 = 0$

D. $4x + 3y - 12z + 26 = 0$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 2} = 4$.

Vì $(\alpha) \parallel (\beta)$ nên phương trình mp (α) có dạng: $4x + 3y - 12z + d = 0, (d \neq 10)$

Vì (β) tiếp xúc mặt cầu (S) nên:

$$d_{(I, (\beta))} = R \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 12 \cdot 3 + d|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + (-12)^2}} = 4 \Leftrightarrow |d - 26| = 52 \Leftrightarrow \begin{cases} d = -26 \\ d = 78 \end{cases}$$

Do (β) cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương nên chọn $d = 78$.

Vậy mp (β) : $4x + 3y - 12z + 78 = 0$

Câu 55. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(Q): x - 2y + z - 5 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 15$. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π đi qua điểm nào sau đây?

A. $(2; -2; 1)$

B. $(1; -2; 0)$

C. $(0; -1; -5)$

D. $(-2; 2; -1)$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{15}$.

Đường tròn có chu vi bằng 6π nên có bán kính $r = \frac{6\pi}{2\pi} = 3$.

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$x - 2y + z + D = 0, D \neq -5$.

Vì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π nên

$$d(I; (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Leftrightarrow d(I; (P)) = \sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|1 - 2 \cdot 0 - 2 + D|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \sqrt{6} \Leftrightarrow |D - 1| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} D - 1 = 6 \\ D - 1 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 7 \\ D = -5 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta được $D = 7$. Do đó phương trình mặt phẳng $(P): x - 2y + z + 7 = 0$.

Nhận thấy điểm có tọa độ $(-2; 2; -1)$ thuộc mặt phẳng (P) .

- Câu 56. (Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 9$. Phương trình mặt phẳng (β) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm $M(0; 4; -2)$ là
A. $x + 6y - 6z + 37 = 0$ **B.** $x - 2y - 2z - 4 = 0$ **C.** $x - 2y - 2z + 4 = 0$ **D.** $x + 6y - 6z - 37 = 0$

Lời giải

Mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 9$ có tâm $I(1; 2; -4)$.

$$\overrightarrow{IM} = (-1; 2; 2).$$

Phương trình mặt phẳng (β) đi qua $M(0; 4; -2)$ nhận $\overrightarrow{IM} = (-1; 2; 2)$ làm véc-tơ pháp tuyến là
 $-1(x-0) + 2(y-4) + 2(z+2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 2z + 4 = 0$.

- Câu 57.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): 4x - 3y - m = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung.
A. $m = 1$. **B.** $m = -1$ hoặc $m = -21$.
C. $m = 1$ hoặc $m = 21$. **D.** $m = -9$ hoặc $m = 31$.

Lời giải

Ta có mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 4$ có tâm $I(2; -1; -2)$, bán kính $R = 2$.

Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung khi và chỉ khi mặt phẳng (P) tiếp xúc với

$$\text{mặt cầu } (S) \Leftrightarrow d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) - m|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2 \Leftrightarrow |11 - m| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 21 \end{cases}$$

- Câu 58. (THPT Ba Đình -2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): mx + 2y - z + 1 = 0$ (m là tham số). Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$ theo một đường tròn có bán kính bằng 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m ?

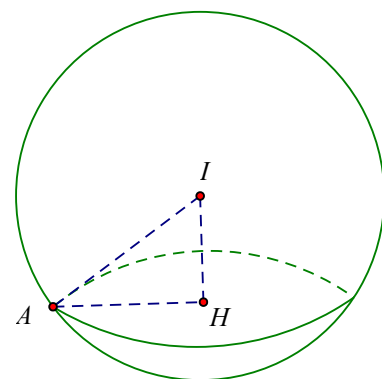
- A.** $m = \pm 1$. **B.** $m = \pm 2 + \sqrt{5}$. **C.** $m = \pm 4$. **D.** $m = 6 \pm 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Từ $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$ ta có tâm $I(2; 1; 0)$ bán kính $R = 3$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) và $(P) \cap (S) = C(H; r)$ với $r = 2$

$$\text{Ta có } IH = d(I, (P)) \Leftrightarrow IH = \frac{|2m + 2 - 0 + 1|}{\sqrt{m^2 + 4 + 1}} = \frac{|2m + 3|}{\sqrt{m^2 + 5}}$$

$$\text{Theo yêu cầu bài toán ta có } R^2 = IH^2 + r^2 \Leftrightarrow 9 = \frac{(2m + 3)^2}{m^2 + 5} + 4$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 - 2\sqrt{5} \\ m = 6 + 2\sqrt{5} \end{cases}$$

Câu 59. (Yên Định Thanh Hóa 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn bán kính bằng 3.

- A. $(Q): y + 3z = 0$ B. $(Q): x + y - 2z = 0$ C. $(Q): y - z = 0$ D. $(Q): y - 2z = 0$

Lời giải

(Q) chứa trục Ox nên có dạng $By + Cz = 0$ ($B^2 + C^2 \neq 0$).

(S) có tâm $I(1; -2; -1)$ và bán kính $R = 3$.

Bán kính đường tròn giao tuyến $r = 3$.

Vì $R = r$ nên $I \in (Q)$.

$\Leftrightarrow -2B - C = 0$ vì B, C không đồng thời bằng 0 nên chọn $B = 1 \Rightarrow C = -2$.

Vậy $(Q): y - 2z = 0$.

Câu 60. (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-3; 0; 1)$. Mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 1 = 0$ theo một thiết diện là một hình tròn. Diện tích của hình tròn này bằng π . Phương trình mặt cầu (S) là

- A. $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$. B. $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$.
C. $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$. D. $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$.

Lời giải

Chọn C

Gọi S, r lần lượt là diện tích hình tròn và bán kính hình tròn.

Ta có: $S = \pi r^2 = \pi \Rightarrow r = 1$

$$d(I; (P)) = \frac{|-3 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 2$$

(S) có tâm $I(-3; 0; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{d^2(I; (P)) + r^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Phương trình mặt cầu (S) là: $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$.

Câu 61. (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1; 2; -1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

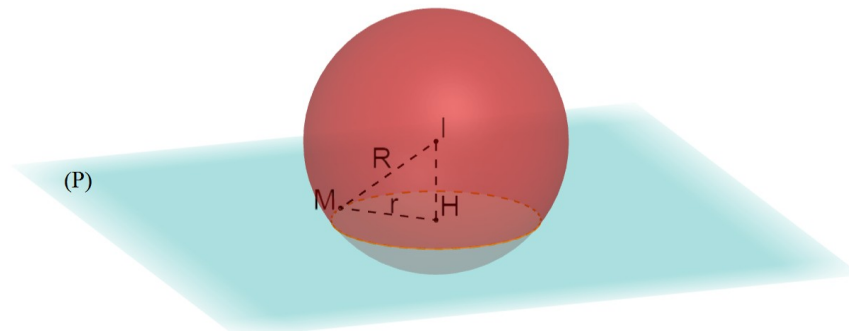
A. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25.$

B. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16.$

C. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 34.$

D. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34.$

Lời giải



Gọi M là điểm nằm trên đường tròn giao tuyến của (S) và (P) . Ta có $IM = R$. Áp dụng công thức tính bán kính mặt cầu trong trường hợp mặt cầu (S) giao với mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r là

$$IM^2 = R^2 = d_{(I,(P))}^2 + r^2 \quad (*)$$

$$d_{(I,(P))} = \frac{|-1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 3 = IH.$$

Ta có:

Từ $(*) \Rightarrow R^2 = 3^2 + r^2 = 34$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34.$$

Câu 62. (Đà Nẵng 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 2 = 0$ và điểm $K(2; 2; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa tất cả các tiếp điểm của các tiếp tuyến vẽ từ K đến mặt cầu (S) .

A. $2x + 2y + z - 4 = 0$ B. $6x + 6y + 3z - 8 = 0$

C. $2x + 2y + z + 2 = 0$ D. $6x + 6y + 3z - 3 = 0$

Lời giải

Chọn C

$$(S): x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 3 \Rightarrow \text{mặt cầu tâm } I(0; 0; -1), R = \sqrt{3}.$$

Do $\overline{IK} = (2; 2; 1), IK = 3 > R \Rightarrow K$ nằm ngoài mặt cầu. Suy ra từ K vẽ được vô số tiếp tuyến đến mặt cầu và khoảng cách từ K đến các tiếp điểm bằng nhau.

Gọi E là 1 tiếp điểm $\Rightarrow IE \perp EK \Rightarrow \triangle IKE$ vuông tại $E \Rightarrow KE = \sqrt{IK^2 - IE^2} = \sqrt{6} \Rightarrow E$ thuộc mặt cầu tâm K bán kính $R' = \sqrt{6}$.

Tọa độ điểm E thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 2 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4y + 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z + 2 = 0.$$

Câu 63. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0$. Tìm số thực của tham số m để mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 2z - 8 = 0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π .

- A. $m = -3$. B. $m = -1$. C. $m = -2$. D. $m = -4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 17 - m$.

(S) là phương trình của mặt cầu thì $17 - m > 0 \Leftrightarrow m < 17$.

Khi đó $I(-1; 2; 3); R = \sqrt{17 - m}$ lần lượt là tâm và bán kính của (S) .

Để mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 2z - 8 = 0$ cắt (S) theo thiết diện là một đường tròn có chu vi bằng 8π thì đường tròn đó có bán kính $r = 4$.

Ta có $R^2 = d^2(I, (\beta)) + r^2 \Leftrightarrow 17 - m = 16 + 2 \Leftrightarrow m = -1$ (TMĐK).

Câu 64. (THPT Kinh Môn - HD - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 4y + z - 11 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) , biết (P) song song với giá của vectơ $v = (1; 6; 2)$, vuông góc với (α) và tiếp xúc với (S) .

A. $\begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ x - 2y + z - 21 = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 3x + y + 4z + 1 = 0 \\ 3x + y + 4z - 2 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 4x - 3y - z + 5 = 0 \\ 4x - 3y - z - 27 = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2x - y + 2z + 3 = 0 \\ 2x - y + 2z - 21 = 0 \end{cases}$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 2)$ và bán kính $R = 4$.

Vì mặt phẳng (P) song song với giá của vectơ $v = (1; 6; 2)$, vuông góc với (α) nên có vec tơ pháp tuyến $n = [n_{(\alpha)}, v] = (2; -1; 2)$.

Mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + D = 0$

Vì (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên ta có:

$$d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 - 3 + 2 \cdot 2 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 4 \Leftrightarrow |D + 9| = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -21 \\ D = 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là: $\begin{cases} 2x - y + 2z + 3 = 0 \\ 2x - y + 2z - 21 = 0 \end{cases}$

Câu 65. (SGD - Đà Nẵng - 2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - 2y - 2z - 5 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 4$. Tìm phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S) .

A. $x - 2y - 2z + 1 = 0$ B. $-x + 2y + 2z + 5 = 0$

C. $x - 2y - 2z - 23 = 0$ D. $-x + 2y + 2z + 17 = 0$

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; -3)$ và bán kính $R = 2$.

Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S) .

Phương trình (Q) có dạng: $x - 2y - 2z + D = 0$ ($D \neq -5$).

$$(Q) \text{ tiếp xúc với } (S) \text{ khi và chỉ khi } d(I, (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|1 - 2 \cdot (-2) - 2 \cdot (-3) + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow |D + 11| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} D + 11 = 6 \\ D + 11 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -5 \\ D = -17 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện suy ra $D = -17$.

Vậy phương trình của (Q) là $x - 2y - 2z - 17 = 0 \Leftrightarrow -x + 2y + 2z + 17 = 0$.

Câu 66. (Việt Đức Hà Nội 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) qua bốn điểm $A(3; 3; 0)$, $B(3; 0; 3)$, $C(0; 3; 3)$, $D(3; 3; 3)$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

B. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$

C. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$

D. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$

Vì mặt cầu đi qua 4 điểm nên:

$$\begin{cases} 18 - 6a - 6b + d = 0 \\ 18 - 6a - 6c + d = 0 \\ 18 - 6b - 6c + d = 0 \\ 27 - 6a - 6b - 6c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6a - 6b + d = -18 \\ -6a - 6c + d = -18 \\ -6b - 6c + d = -18 \\ -6a - 6b - 6c + d = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = \frac{3}{2} \\ d = 0 \end{cases}$$

Suy ra tâm $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ bán kính $R = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Vậy phương trình mặt cầu $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$

Câu 67. (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 6)$, $D(2; 4; 6)$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Viết phương trình mặt cầu (S') có tâm trùng với tâm của mặt cầu (S) và có bán kính gấp 2 lần bán kính của mặt cầu (S) .

A. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 56$

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$

C. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 14$

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 12 = 0$

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Vì (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên ta có:

$$\begin{cases} 2^2 + 0^2 + 0^2 - 2.a.2 - 2.b.0 - 2.c.0 + d = 0 \\ 0^2 + 4^2 + 0^2 - 2.a.0 - 2.b.4 - 2.c.0 + d = 0 \\ 0^2 + 0^2 + 6^2 - 2.a.0 - 2.b.0 - 2.c.6 + d = 0 \\ 2^2 + 4^2 + 6^2 - 2.a.2 - 2.b.4 - 2.c.6 + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + d = -4 \\ -8b + d = -16 \\ -12c + d = -36 \\ -4a - 8b - 12c + d = -56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0 \Rightarrow I(1; 2; 3) \text{ và } R = \sqrt{14} \Rightarrow R' = 2\sqrt{14}$$

Vậy: mặt cầu (S') có tâm $I(1; 2; 3)$ và $R' = 2\sqrt{14}$: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 56$

Câu 68. (Trần Phú - Hà Tĩnh - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2; 1; -3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là

- A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 4$ B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 13$
C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9$ D. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 10$

Lời giải

Gọi M là hình chiếu của I trên $Oy \Rightarrow M(0; 1; 0)$

Mặt cầu (S) tâm $I(2; 1; -3)$ và tiếp xúc với trục Oy có bán kính $IM = \sqrt{13}$.

Vậy (S) có phương trình $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 13$

Câu 69. (THPT Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu

(S) có tâm $I(-1; 4; 2)$ và có thể tích bằng $\frac{256\pi}{3}$. Khi đó phương trình mặt cầu (S) là

- A. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 16$ B. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 4$
C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 4$ D. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 4$

Lời giải

Thể tích mặt cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Theo đề bài ta có $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{256\pi}{3} \Leftrightarrow R = 4$.

Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(-1; 4; 2)$ và bán kính $R = 4$ là $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 16$

Câu 70. (THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2018) Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua điểm $A(1; -1; 4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ.

- A. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 16$ B. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9$
C. $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 36$ D. $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 49$

Lời giải

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu (S) . Mặt cầu (S) tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ

$$d(I, (Oxy)) = d(I, (Oyz)) = d(I, (Oxz)) \Leftrightarrow |a| = |b| = |c| = R \quad (1)$$

Mặt cầu (S) đi qua $A(1; -1; 4)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \begin{cases} IA = R \\ a > 0; c > 0; b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = R^2 \\ a > 0; c > 0; b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (b+1)^2 + (c-4)^2 = R^2 \\ a = c = -b = R > 0 \quad (\text{do (1)}) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (-a+1)^2 + (a-4)^2 = a^2 \\ a = c = -b = R > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 12a + 18 = 0 \\ a = c = -b = R > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 6a + 9 = 0 \\ a = c = -b = R > 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = c = 3 \\ b = -3 \\ R = 3 \end{cases} \Rightarrow (S): (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9
\end{aligned}$$

Câu 71. (Kim Liên - Hà Nội - 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2; 2; 1)$, $N\left(\frac{-8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OMN và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) .

A. $x^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$

B. $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$

D. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$

Lời giải

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN .

Ta áp dụng tính chất sau: “Cho tam giác OMN với I là tâm đường tròn nội tiếp, ta có $a\vec{IO} + b\vec{IM} + c\vec{IN} = \vec{0}$, với $a = MN$, $b = ON$, $c = OM$ ”.

Ta có $OM = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$, $ON = \sqrt{\left(\frac{-8}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = 4$

$MN = \sqrt{\left(\frac{-8}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 1\right)^2} = 5$

$$\vec{IO} + 4\vec{IM} + 3\vec{IN} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{5 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot \left(\frac{-8}{3}\right)}{3 + 4 + 5} = 0 \\ y_I = \frac{5 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)}{3 + 4 + 5} = 1 \\ z_I = \frac{5 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)}{3 + 4 + 5} = 1 \end{cases}$$

Mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y = 0$.

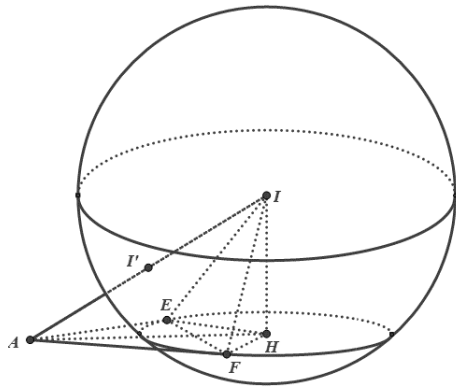
Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) nên mặt cầu có bán kính $R = d(I, (Oxz)) = 1$.

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$.

- Câu 72.** (Mã 103 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu: $(S): x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a; b; c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau?
A. 20. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 5$ có tâm $I(0; 0; -1)$ và có bán kính $R = \sqrt{5}$

$A(a; b; 0) \in (Oxy)$, Gọi I' là trung điểm của $AI \Rightarrow I' \left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; -\frac{1}{2} \right)$

Gọi E, F lần lượt là hai tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua A sao cho $AE \perp AF$.

Ta có: E, F cùng thuộc mặt cầu (S') đường kính IA có tâm $I' \left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; -\frac{1}{2} \right)$, bán kính $R' = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 1}$.

Để tồn tại E, F thì hai mặt cầu (S) và (S') phải cắt nhau suy ra $|R - R'| \leq II' \leq R + R'$

$$\Leftrightarrow \left| \sqrt{5} - \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 1} \leq \sqrt{5} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + 1} \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 4 \quad (1)$$

Gọi H là hình chiếu của I trên (AEF) khi đó tứ giác $AEHF$ là hình vuông có cạnh $AE = HF = \sqrt{AI^2 - 5}$.

Ta có $IH^2 = R^2 - HF^2 = 5 - (AI^2 - 5) = 10 - AI^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 1 \leq 10 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 9 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $4 \leq a^2 + b^2 \leq 9$ mà $a, b, c \in \mathbb{Z}$ nên có 20 điểm thỏa bài toán.

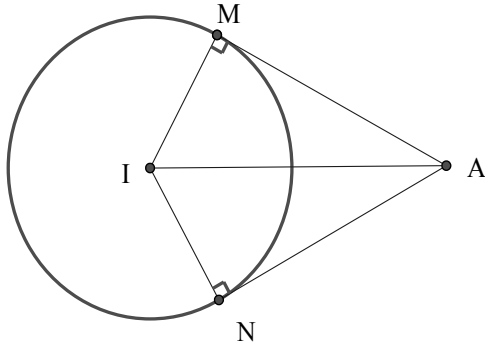
Cách khác:

Mặt cầu (S) có tâm $I(0, 0, -1)$ bán kính $R = \sqrt{5}$. Ta có $d_{(I(Oxy))} = 1 < R \Rightarrow$ mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (Oxy) . Để có tiếp tuyến của (S) đi qua $A \Leftrightarrow AI \geq R$ (1).

Có $A(a, b, c) \in (Oxy) \Rightarrow A(a, b, 0), IA = a^2 + b^2 + 1$.

Quỹ tích các tiếp tuyến đi qua A của (S) là một mặt nón nếu $AI > R$ và là một mặt phẳng nếu $AI = R$.

Trong trường hợp quỹ tích các tiếp tuyến đi qua A của (S) là một mặt nón gọi AM, AN là hai tiếp tuyến sao cho A, M, I, N đồng phẳng.



Tồn tại ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\angle MAN \geq 90^\circ \Leftrightarrow IA \leq R\sqrt{2}$ (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow 4 \leq a^2 + b^2 \leq 9$. Vì $a, b \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 9 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 4 \end{cases}.$$

Bốn hệ phương trình đầu tiên có hai nghiệm, ba hệ sau có 4 nghiệm suy ra số điểm A thỏa mãn là $4.2 + 3.4 = 20$.

Câu 73. (THPT Chuyên Ngữ - Hà Nội - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và một điểm $M(2; 3; 1)$. Từ M kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S) , biết tập hợp các tiếp điểm là đường tròn (C) . Tính bán kính r của đường tròn (C) .

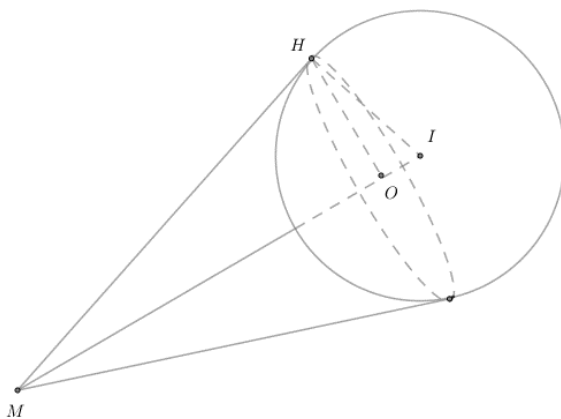
A. $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

B. $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $r = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

D. (2).

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;0)$ và bán kính $R=2$.

Ta có $\vec{IM} = (1;2;1)$ và $IM = \sqrt{6}$.

Gọi H là một tiếp điểm tùy ý khi kẻ tiếp tuyến từ $Oxyz$ đến mặt cầu, khi đó $MH = \sqrt{IM^2 - R^2} = \sqrt{2}$. Gọi O là tâm của đường tròn (C) khi đó $IM \perp HO$ và $HO = r$.

$$\text{Ta có } HI \cdot HM = HO \cdot IM \Rightarrow r = \frac{HI \cdot HM}{IM} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 74. (THPT Chuyên Hạ Long - 2018) Trong không gian, cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là 2, 3, 3, 2 (đơn vị độ dài) tiếp xúc ngoài với nhau. Mặt cầu nhỏ nhất tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng

- A. $\frac{5}{9}$. B. $\frac{3}{7}$. C. $\frac{7}{15}$. D. $\frac{6}{11}$.

Lời giải

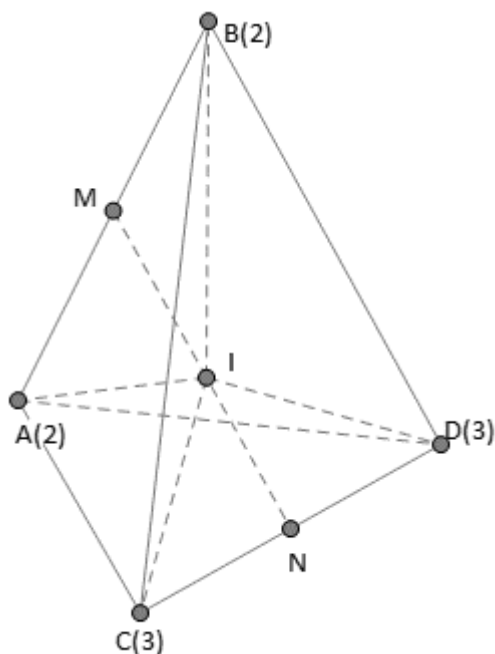
Cách 1:

Gọi A, B, C, D là tâm bốn mặt cầu, không mất tính tổng quát ta giả sử $AB=4$, $AC=BD=AD=BC=5$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Dễ dàng tính được $MN=2\sqrt{3}$. Gọi I là tâm mặt cầu nhỏ nhất với bán kính r tiếp xúc với bốn mặt cầu trên. Vì $IA=IB, IC=ID$ nên I nằm trên đoạn MN .

$$\text{Đặt } IN = x, \text{ ta có } IC = \sqrt{3^2 + x^2} = 3 + r, \quad IA = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3} - x)^2} = 2 + r$$

$$\text{Từ đó suy ra } \sqrt{3^2 + x^2} - \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3} - x)^2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{12\sqrt{3}}{11}, \text{ suy ra } r = \sqrt{3^2 + \left(\frac{12\sqrt{3}}{11}\right)^2} - 3 = \frac{6}{11}$$

Cách 2



Gọi A, B là tâm quả cầu bán kính bằng 2. C, D là tâm quả cầu bán kính bằng 3. I là tâm quả cầu bán kính x .

Mặt cầu (I) tiếp xúc ngoài với 4 mặt cầu tâm A, B, C, D nên $IA = IB = x + 2, IC = ID = x + 3$.

Gọi $(P), (Q)$ lần lượt là các mặt phẳng trung trực đoạn AB và CD .

$$\begin{cases} IA = IB \Rightarrow I \in (P) \\ IC = ID \Rightarrow I \in (Q) \end{cases} \Rightarrow I \in (P) \cap (Q) \quad (1)$$

Tứ diện $ABCD$ có $DA = DB = CA = CB = 5$ suy ra MN là đường vuông góc chung của AB và CD , suy ra $MN = (P) \cap (Q)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $I \in MN$

Tam giác IAM có $IM = \sqrt{IA^2 - AM^2} = \sqrt{(x+2)^2 - 4}$

Tam giác CIN có $IN = \sqrt{IC^2 - CN^2} = \sqrt{(x+3)^2 - 9}$

Tam giác ABN có $NM = \sqrt{NA^2 - AM^2} = \sqrt{12}$

Suy ra $\sqrt{(x+3)^2 - 9} + \sqrt{(x+2)^2 - 4} = \sqrt{12} \Rightarrow x = \frac{6}{11}$

Câu 75. (Mã 102-2023) Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có tâm $I(3, 7, 12)$ và bán kính R thay đổi. Có bao nhiêu giá trị nguyên của R sao cho ứng với mỗi giá trị đó, tồn tại hai tiếp tuyến của (S) trong mặt phẳng (Oyz) mà hai tiếp tuyến đó cùng đi qua O và góc giữa chúng không nhỏ hơn 60° ?

A. 11.

B. 7.

C. 5.

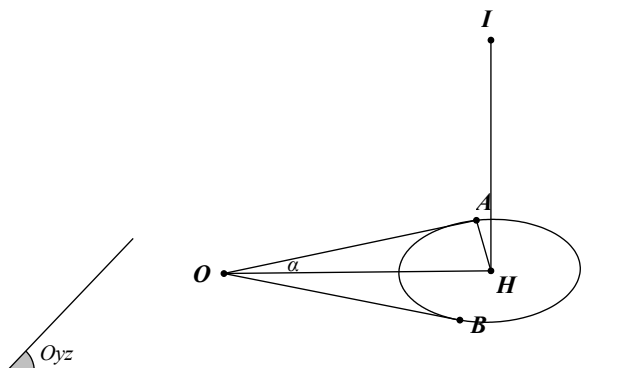
D. 3.

Lời giải

Chọn C

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (Oyz) thì $H(0,7,12)$ và $OH = \sqrt{193}$.

Gọi d_1, d_2 là hai tiếp tuyến thỏa mãn và A, B là các tiếp điểm tương ứng.



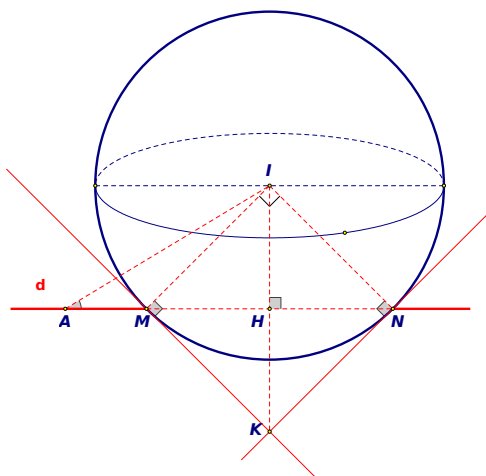
Đặt $\alpha = \angle AOH$ thì $\sin \alpha = \frac{AH}{OH} = \frac{\sqrt{R^2 - 9}}{\sqrt{193}}$. Theo giả thiết thì $30^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$ nên $\frac{1}{2} \leq \sin \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Từ đó $\frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{R^2 - 9}}{\sqrt{193}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{229}{4}} \leq R \leq \sqrt{\frac{615}{4}}$. Mà $R \in \mathbb{Z}$ nên $R \in \{8, 9, 10, 11, 12\}$.

Câu 76. (Mã 103 - 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 4$ và đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 0; -2)$, nhận $u = (1; a; 2-a)$ (với $a \in \mathbb{R}$) làm vectơ chỉ phương. Biết rằng d cắt (S) tại hai điểm phân biệt mà các tiếp diện của (S) tại hai điểm đó vuông góc với nhau. Hỏi a^2 thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(\frac{2}{5}; \frac{2}{3}\right)$. B. $\left(\frac{19}{2}; 10\right)$. C. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$. D. $\left(\frac{7}{2}; 4\right)$.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; -1) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = (0; -2; 1) \Rightarrow AI = \sqrt{5}$. Giả sử d cắt (S) tại M và N

Gọi $(P), (Q)$ là hai tiếp diện tại $M; N$ vì $(P) \perp (Q) \Rightarrow \angle MIN = 90^\circ \Rightarrow \triangle IMN$ vuông cân
 $\Rightarrow IH = MH = HN = \sqrt{2} \Rightarrow AH = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \cos(\angle FAH) = \frac{AH}{AI} = \frac{|\overrightarrow{AI} \cdot \vec{u}|}{AI \cdot |\vec{u}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |2 - 3a| = \sqrt{3} \sqrt{1 + a^2 + (a - 2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 9a^2 - 12a + 4 = 6a^2 - 12a + 15 \Leftrightarrow a^2 = \frac{11}{3} \in \left(\frac{7}{2}; 4\right)$$

Câu 77. (Mã 104-2023) Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có tâm $I(3; 5; 12)$ và bán kính R thay đổi. Có bao nhiêu giá trị nguyên của R sao cho ứng với mỗi giá trị đó, tồn tại hai tiếp tuyến của (S) trong mặt phẳng (Oyz) mà hai tiếp tuyến đó cùng đi qua O và góc giữa chúng không nhỏ hơn 60° ?

A. 4.

B. 2.

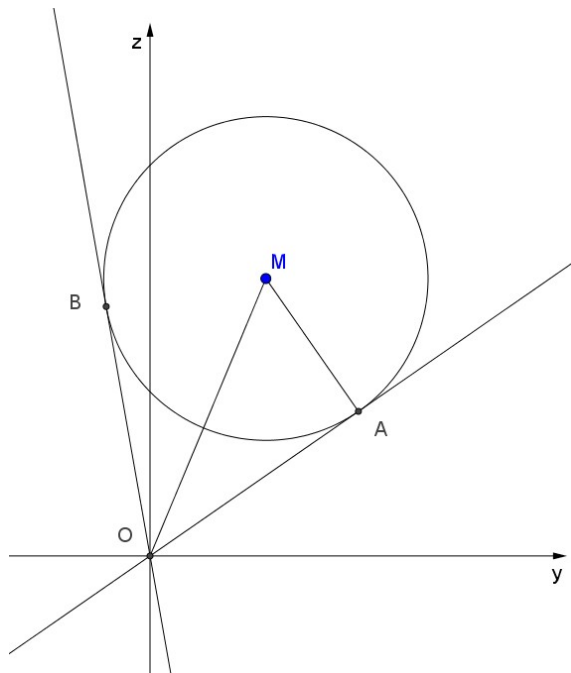
C. 10.

D. 6.

Lời giải

Ta có: $d(I, (Oyz)) = 3$

Gọi M là hình chiếu của I trên mặt phẳng $(Oyz) \Rightarrow M(0; 5; 12) \Rightarrow OM = 13$



Ta có: hai tiếp tuyến OA, OB hợp với nhau một góc không nhỏ hơn 60°

$$\Rightarrow 60^\circ \leq \angle AOB \leq 120^\circ$$

$$\Rightarrow 30^\circ \leq \angle AOM \leq 60^\circ$$

Tam giác AOM vuông tại A do đó ta có: $\frac{MA}{MO} = \sin \angle AOM \Rightarrow MA = MO \cdot \sin \angle AOM$

$$\text{Suy ra } 13 \cdot \sin 30^\circ \leq MA \leq 13 \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow \frac{13}{2} \leq r \leq \frac{13\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ta có: } R^2 = d^2 + r^2 = 9 + r^2$$

$$\Rightarrow 51,25 \leq R^2 \leq 135,75$$

$$\Rightarrow 7,1589 \leq R \leq 11,6511$$

$$\Rightarrow R = \{8; 9; 10; 11\}$$

Chọn đáp án **A**.

Câu 78. (Mã 110 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 6; 2)$ và $B(2; -2; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B , gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d . Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R = \sqrt{3}$

B. $R = 2$

C. $R = 1$

D. $R = \sqrt{6}$

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(3; 2; 1)$

$$d(I; (P)) = \frac{|3 + 2 + 1|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I(3; 2; 1)$ và bán kính $R' = \frac{AB}{2} = 3\sqrt{2}$

Ta có $H \in (S)$. Mặt khác $H \in (P)$ nên $H \in (C) = (S) \cap (P)$

$$\text{Bán kính của đường tròn } (C) \text{ là } R = \sqrt{(R')^2 - d^2(I; (P))} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$$

Câu 79. Trong không gian $Oxyz$ mặt phẳng $(P): 2x + 6y + z - 3 = 0$ cắt trục Oz và đường thẳng

$$d: \frac{x-5}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{-1}$$

lần lượt tại A và B . Phương trình mặt cầu đường kính AB là:

A. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 36.$

B. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9.$

C. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 9.$

D. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 36.$

Lời giải

Chọn B

$$(P) \cap Oz = A(0;0;3)$$

Tọa độ của B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x+6y+z-3=0 \\ \frac{x-5}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6y+z-3=0 \\ 2x-y-10=0 \\ y+2z-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \\ z=7 \end{cases} \Rightarrow B(4;-2;7).$$

Gọi I là trung điểm của

$$AB \Rightarrow I(2;-1;5) \Rightarrow IA = \sqrt{4+1+4} = 3.$$

Phương trình mặt cầu đường kính AB là: $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9.$

Câu 80. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 14$ và mặt phẳng $(\alpha): x+3y+2z-5=0$. Biết đường thẳng Δ nằm trong (α) , cắt trục Ox và tiếp xúc với (S) . Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của Δ ?

- A. $u = (4; -2; 1)$ B. $v = (2; 0; -1)$ C. $m = (-3; 1; 0)$ D. $n = (1; -1; 1)$

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;4)$ và bán kính $R = \sqrt{14}$.

Ta có $d(I, (\alpha)) = \sqrt{14} = R \Rightarrow (\alpha)$ tiếp xúc với (S) .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(\alpha) \Rightarrow H(1;0;2)$

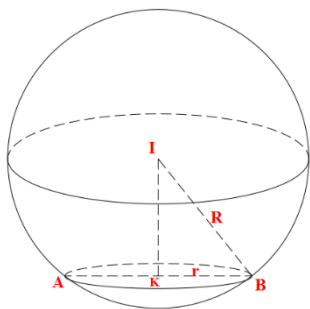
Gọi $A = \Delta \cap Ox \Rightarrow A(a;0;0)$ và $\overrightarrow{AH} = (a-1;0;-2)$

Đường thẳng Δ nằm trong (α) , cắt trục Ox và tiếp xúc với (S) nên $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{n_\alpha}$. Tức là $a-1+0-4=0 \Leftrightarrow a=5 \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (4;0;-2)$ cùng phương với $v = (2;0;-1)$.

Câu 81. (Bình Dương - 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y-z+9=0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) . Tìm tọa độ tâm K và bán kính r của đường tròn (C) là

A. $K(3;-2;1)$, $r=10$ B. $K(-1;2;3)$, $r=8$ C. $K(1;-2;3)$, $r=8$ D. $K(1;2;3)$, $r=6$.

Lời giải



• Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;1)$, $R=10$.

• Khoảng cách từ I đến (P) là $IK = d(I; (P)) = \frac{|6+4-1+9|}{3} = 6$.

• Đường thẳng qua $I(3; -2; 1)$ vuông góc với (P) có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ khi đó

Tọa độ tâm K là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \\ 2x - 2y - z + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow K(-1; 2; 3)$.

• Bán kính: $r = \sqrt{R^2 - IK^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$.

Câu 82. (Chuyên Thái Bình 2019) Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 1)$, $B(2; 2; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z = 0$. Mặt cầu (S) thay đổi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại H . Biết H chạy trên 1 đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

- A. $3\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Có $A(1; 1; 1), B(2; 2; 1) \Rightarrow$ Phương trình AB: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$

Gọi K là giao điểm của AB và $(P) \Rightarrow K(-1; -1; 1)$

Có Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) tại H .

$\Rightarrow HK$ là tiếp tuyến của (S)

$\Rightarrow KH^2 = KA \cdot KB = 12 \Rightarrow KH = 2\sqrt{3}$ không đổi

$\Rightarrow$ Biết H chạy trên 1 đường tròn bán kính $2\sqrt{3}$ không đổi

Câu 83. (Chuyên Lam Sơn 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y - 12z + 10 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: Tiếp xúc với (S) ; song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

- A. $4x + 3y - 12z - 78 = 0$. B. $4x + 3y - 12z - 26 = 0$.

C. $4x + 3y - 12z + 78 = 0$

D. $4x + 3y - 12z + 26 = 0$

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = 4$.

Mặt phẳng (β) song song với (α) nên có phương trình dạng $4x + 3y - 12z + c = 0 (c \neq 10)$

$$(\beta) \text{ tiếp xúc với } (S) \Leftrightarrow d(I; (\beta)) = R \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 12 \cdot 3 + c|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{|-26 + c|}{13} = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -26 + c = 52 \\ -26 + c = -52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 78 \\ c = -26 \end{cases}$$

Nếu $c = 78$ thì $(\beta): 4x + 3y - 12z + 78 = 0$. Mặt phẳng (β) cắt trục Oz ở điểm $M\left(0; 0; \frac{13}{2}\right)$ có cao độ dương.

Nếu $c = -26$ thì $(\beta): 4x + 3y - 12z - 26 = 0$. Mặt phẳng (β) cắt trục Oz ở điểm $M\left(0; 0; -\frac{13}{6}\right)$ có cao độ âm.

Vậy $(\beta): 4x + 3y - 12z + 78 = 0$

Câu 84. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và

đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P), (P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T' . Tìm tọa độ trung điểm H của TT' .

A. $H\left(-\frac{7}{6}; \frac{1}{3}; \frac{7}{6}\right)$ B. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{6}\right)$ C. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$ D. $H\left(-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -1)$, bán kính $R = 1$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (1; 1; -1)$

Gọi K là hình chiếu của I trên d , ta có $K(t; 2+t; -t) \Rightarrow \vec{IK} = (t-1; 2+t; -t+1)$

Vì $IK \perp d$ nên $\vec{u}_d \cdot \vec{IK} = 0 \Leftrightarrow t-1+2+t-(-t+1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \vec{IK} = (-1; 2; 1)$

Phương trình tham số của đường thẳng IK là
$$\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2t' \\ z = -1 + t' \end{cases}$$

Khi đó, trung điểm H của TT' nằm trên IK nên $H(1-t'; 2t'; -1+t') \Rightarrow \overrightarrow{IH} = (-t'; 2t'; t')$. Mặt khác, ta có:

$$\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{IK} = IT^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{IK} = 1 \Leftrightarrow t' + 4t' + t' = 1 \Leftrightarrow t' = \frac{1}{6} \Rightarrow H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right).$$

- Câu 85.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2; 1; 3)$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là
- A. $\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 + 9t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; 5)$ và bán kính $R = 6$.

$IE = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} < R \Rightarrow$ điểm E nằm trong mặt cầu (S) .

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) , A và B là hai giao điểm của Δ với (S) .

Khi đó, AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB \perp OE$, mà $AB \perp IH$ nên $AB \perp (HIE) \Rightarrow AB \perp IE$.

Suy ra: $\overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{n_P}; \overrightarrow{EI}] = (5; -5; 0) = 5(1; -1; 0)$

Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$.

- Câu 86. (Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu

$(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

- A. $y + z + 1 = 0$ B. $x + 3y + 5z + 2 = 0$ C. $x - 2y - 3 = 0$ D. $3x - 2y - 4z - 8 = 0$

Lời giải

Chọn A

Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm cầu $I(3; 1; 0)$ lên d , từ đó ta tìm được $H(3; 0; -1)$. Thấy $IH \leq R$ nên d cắt (S) . Vậy mặt phẳng cần tìm nhận $\overrightarrow{IH} = (0; -1; -1)$ làm VTPT nên pt mặt phẳng là $y + z + 1 = 0$.

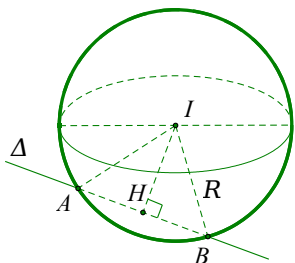
- Câu 87. (Đại học Hồng Đức – Thanh Hóa 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1; 1; 1)$, mặt phẳng $(P): x - 3y + 5z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Gọi Δ là đường

thẳng qua E , nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2$. Phương trình đường thẳng Δ là

- A. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = 5 + t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D



$(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow$ Tâm $I(0;0;0)$; bán kính $R = 2$.

$(P): x - 3y + 5z - 3 = 0 \Rightarrow$ vectơ pháp tuyến của $(P): n_P = (1; -3; 5)$.

$$\Delta \Rightarrow AH = BH = \frac{AB}{2} = 1$$

Gọi H là hình chiếu của I lên

Xét $\triangle IAH$ vuông tại $H \Rightarrow IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$.

Mặt khác ta có $\vec{IE} = (1; 1; 1) \Rightarrow IE = \sqrt{3} = IH \Rightarrow H \equiv E \Rightarrow IE \perp \Delta$.

Đường thẳng Δ đi qua $E(1; 1; 1)$; vuông góc với IE và chứa trong (P) nên:

Vectơ chỉ phương của $\Delta: \vec{n}_\Delta = [\vec{n}_P; \vec{IE}] = (-8; 4; 4)$.

$\Rightarrow$ vectơ $\vec{u} = (2; -1; -1)$ cũng là vectơ chỉ phương của Δ .

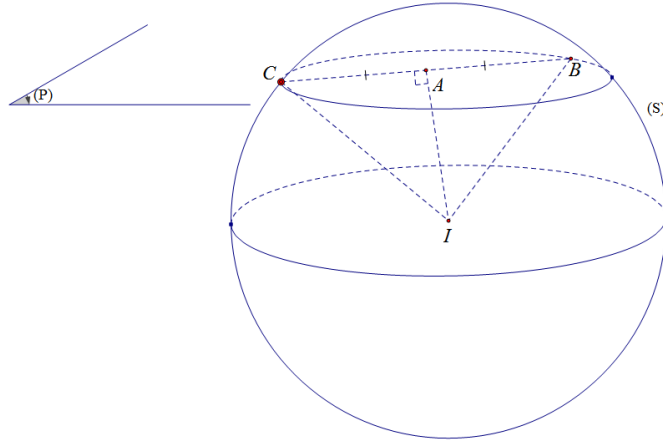
Phương trình đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Câu 88. (SGD Cần Thơ 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; 1; -2)$, mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 7 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và Δ nằm trong mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm B, C sao cho tam giác IBC có diện tích lớn nhất, với I là tâm của mặt cầu (S) . Phương trình của đường thẳng Δ là

- A. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = -2 - t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = -2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -2 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C



(S) có tâm $I(1; 2; 0)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 7} = 2\sqrt{3}$.

$\vec{AI} = (1; 1; 2) \Rightarrow AI = \sqrt{6} < R \Rightarrow A$ nằm trong mặt cầu (S) và A nằm trên dây cung BC (1).

$S_{\Delta IBC} = \frac{1}{2} IB \cdot IC \cdot \sin \angle BIC = \frac{R^2}{2} \sin \angle BIC \leq \frac{R^2}{2}$ nên diện tích ΔIBC đạt giá trị lớn nhất là $\frac{R^2}{2}$

$\Leftrightarrow \sin \angle BIC = 1 \Rightarrow \angle BIC = 90^\circ \Rightarrow \Delta IBC$ vuông cân tại $I \Rightarrow BC = IC\sqrt{2} = R\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$

Gọi J là trung điểm của BC . Ta có $IJ \perp BC$ và $IJ = \frac{BC}{2} = \sqrt{6}$ (2).

ΔAIJ vuông tại $J \Rightarrow AI \geq IJ$, kết hợp thêm với (1) và (2) ta có $IJ = AI \Rightarrow A \equiv J \Rightarrow A$ là trung điểm của BC và $IA \perp BC$.

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = (1; 1; 1)$ có giá vuông góc với Δ .

Vậy Δ nhận $\vec{u} = [\vec{n}_{(P)}, \vec{AI}] = (1; -1; 0)$ làm vectơ chỉ phương và đi qua $A(0; 1; -2)$

$$\Rightarrow \Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = -2 \end{cases}$$

Câu 89. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (P): $z + 2 = 0$, $K(0; 0; -2)$, đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. Phương trình mặt cầu tâm thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo thiết diện là đường tròn tâm K , bán kính $r = \sqrt{5}$ là

A. $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 16$

B. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

C. $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 9$

D. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

Lời giải

Chọn D

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (0; 0; 1)$.

Viết lại phương trình của đường thẳng d dưới dạng tham số: $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$.

Gọi I là tâm của mặt cầu cần lập. Vì $I \in d$ nên giả sử $I(t; t; t)$. Có $\vec{IK} = (-t; -t; -2-t)$.

Thiết diện của mặt cầu và mặt phẳng (P) là đường tròn tâm K nên ta có $\vec{IK} \perp (P)$. Suy ra

$\vec{IK}$ và $n = (0; 0; 1)$ cùng phương. Do đó tồn tại số thực k để
 $\vec{IK} = kn \Leftrightarrow \begin{cases} -t = k \cdot 0 \\ -t = k \cdot 0 \\ -2-t = k \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ k = -2 \end{cases}$

Suy ra $I(0; 0; 0)$. Tính được $d(I, (P)) = 2$.

Gọi R là bán kính mặt cầu. Ta có: $R = \sqrt{r^2 + [d(I, (P))]^2} = 3$.

Vậy mặt cầu cần tìm có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Câu 90. (Chuyên Hạ Long 2019) Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{2}$ và $\Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Tính diện tích mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .

- A. $\frac{16}{17}\pi$ (đvdt). B. $\frac{4}{\sqrt{17}}\pi$ (đvdt). C. $\frac{16}{\sqrt{17}}\pi$ (đvdt). D. $\frac{4}{17}\pi$ (đvdt).

Lời giải

Gọi $A; B$ là hai điểm thuộc lần lượt Δ_1 và Δ_2 sao cho AB là đoạn thẳng vuông góc chung giữa 2 đường. Gọi M là trung điểm AB . Để có mặt cầu tâm M bán kính $R = \frac{AB}{2}$ tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là mặt cầu có bán kính bé nhất.

Ta có tọa độ theo tham số của $A; B$ lần lượt là:

$A(2t_1 - 1; t_1 - 1; 2t_1 - 1)$ và $B(2t_2 + 1; 2t_2 + 1; t_2 + 1) \Rightarrow \vec{AB}(2t_2 - 2t_1 + 2; 2t_2 - t_1 + 2; t_2 - 2t_1 + 2)$.

Có $\vec{u}_1(2; 1; 2)$ và $\vec{u}_2(2; 2; 1)$ lần lượt là 2 vector chỉ phương của Δ_1 và Δ_2 nên $\begin{cases} \vec{AB} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{AB} \perp \vec{u}_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2t_2 - 2t_1 + 2) \cdot 2 + (2t_2 - t_1 + 2) \cdot 1 + (t_2 - 2t_1 + 2) \cdot 2 = 0 \\ (2t_2 - 2t_1 + 2) \cdot 2 + (2t_2 - t_1 + 2) \cdot 2 + (t_2 - 2t_1 + 2) \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8t_2 - 9t_1 + 10 = 0 \\ 9t_2 - 8t_1 + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{10}{17} \\ t_2 = \frac{-10}{17} \end{cases} \Rightarrow A(\frac{3}{17}; \frac{-7}{17}; \frac{3}{17}); B(\frac{-3}{17}; \frac{-3}{17}; \frac{7}{17}) \Rightarrow \vec{AB}(\frac{-6}{17}; \frac{4}{17}; \frac{4}{17})$$

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{(-6)^2 + 4^2 + 4^2}}{17} = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$S = 4\pi.R^2 = 4\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{17}^2} = \frac{4\pi}{17} \text{ (đvdt).}$$

Diện tích mặt cầu cần tính là

Câu 91. (THPT Quang Trung Đồng Đa Hà Nội 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=4 \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=3-t' \\ y=t' \\ z=0 \end{cases}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 .

A. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 4.$

B. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16.$

C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4.$

D. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 16.$

Lời giải

Đường thẳng d_1 có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; 1; 0)$.

Đường thẳng d_2 có vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (-1; 1; 0)$.

Để phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất và đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 khi và chỉ khi:

Tâm mặt cầu (S) nằm trên đoạn thẳng vuông góc chung của 2 đường thẳng d_1 và d_2 , đồng thời là trung điểm của đoạn thẳng vuông góc chung.

Gọi điểm $M(2t; t; 4)$ thuộc d_1 ; gọi điểm $N(3-t'; t'; 0)$ thuộc d_2 với MN là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 .

Ta có $\vec{MN} = (3-t'-2t; t'-t; -4)$.

MN là đoạn thẳng vuông góc chung $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \vec{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot (3-t'-2t) + t'-t = 0 \\ (-1) \cdot (3-t'-2t) + t'-t = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' + 5t = 6 \\ 2t' + t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2; 1; 4) \\ N(2; 1; 0) \end{cases}$$

Gọi điểm I là tâm mặt cầu (S) , do đó điểm I là trung điểm MN .

$$\Rightarrow I(2; 1; 2) \Rightarrow R = IM = IN = 2.$$

Suy ra mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$.

- Câu 92.** (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu (S) tâm $I(5; -3; 5)$, bán kính $R = 2\sqrt{5}$. Từ một điểm A thuộc mặt phẳng (P) kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại B . Tính OA biết $AB = 4$.
- A. $OA = \sqrt{11}$. B. $OA = 5$. C. $OA = 3$. D. $OA = \sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A

$$d(I; (P)) = \frac{|5 - 2(-3) + 2 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 6$$

Khoảng cách từ điểm I đến mp (P) là:

AB tiếp xúc với (S) tại B nên tam giác AIB vuông tại B , do đó ta có:

$$IA = \sqrt{IB^2 + AB^2} = \sqrt{R^2 + AB^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + 4^2} = 6 = d(I; (P)) \Rightarrow A \text{ là hình chiếu của } I \text{ lên } (P)$$

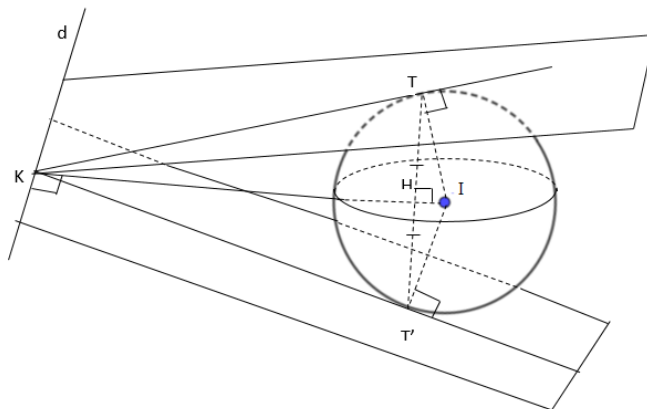
Đường thẳng IA đi qua $I(5; -3; 5)$ có VTCP $\vec{u} = \vec{n}_{(P)} = (1; -2; 2)$ có phương trình
$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$$

$$\text{Có } A = IA \cap (P) \Rightarrow 5 + t - 2(-3 - 2t) + 2(5 + 2t) - 3 = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow A(3; 1; 1) \Rightarrow OA = \sqrt{11}$$

- Câu 93.** (Tỉnh Bắc Ninh 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng (P) , (P') chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T' . Tìm tọa độ trung điểm H của TT' .

A. $H\left(-\frac{7}{6}; \frac{1}{3}; \frac{7}{6}\right)$. B. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{6}\right)$. C. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$. D. $H\left(-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$.

Lời giải



Mặt cầu (S) tâm $I(1; 0; -1)$, bán kính $R = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = 1$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên d .

$K \in d$ nên ta có thể giả sử $K(t; 2+t; -t)$

$\vec{IK} = (t-1; 2+t; -t+1)$, $\vec{u}_d = (1; 1; -1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d

$$IK \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t - 1 + 2 + t + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow K(0; 2; 0)$$

ΔITK vuông tại T có TH là đường cao nên $IT^2 = IH \cdot IK$.

$$\Leftrightarrow IH = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (IK = \sqrt{6}) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \frac{1}{6} \overrightarrow{IK} \quad \text{Giả sử } H(x; y; z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \frac{1}{6} \cdot (-1) \\ y - 0 = \frac{1}{6} \cdot 2 \\ z + 1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{6} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = -\frac{5}{6} \end{cases} \quad \text{Vậy } H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$$

Câu 94. (Mã 102 - 2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(4; 1; 2)$ bán kính bằng 2. Gọi $M; N$ là hai điểm lần lượt thuộc hai trục $Ox; Oy$ sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{7}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) , giá trị $AM \cdot AN$ bằng

A. $6\sqrt{2}$.

B. 14.

C. 8.

D. $9\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có: $d(I, (Oxy)) = 2$ nên mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm $A(4; 1; 0)$, đồng thời đường thẳng MN tiếp xúc với (S) cũng tại điểm $A(4; 1; 0)$ do $MN \subset (Oxy)$

Gọi $M(m; 0; 0); N(0; n; 0), m, n > 0$

$$\text{Do } A \in MN \text{ nên } \overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AN} \Rightarrow \begin{cases} m - 4 = -4k \\ -1 = k(n - 1) \end{cases} \Rightarrow (m - 4)(n - 1) = 4 \Leftrightarrow m = \frac{4n}{n - 1}, n - 1 \neq 0$$

$$\text{Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn } OI: 4x + y + 2z - \frac{21}{2} = 0$$

$$\text{Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn } OM: x = \frac{m}{2}$$

$$\text{Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn } ON: y = \frac{n}{2}$$

$$\text{Do đó tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện } OIMN \text{ là } J\left(\frac{m}{2}; \frac{n}{2}; \frac{-n^2 + 6n - 21}{4n - 4}\right)$$

Theo giả thuyết cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{7}{2}$ nên $OJ = \frac{7}{2}$

$$\Leftrightarrow OJ^2 = \frac{49}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4n^2}{(n-1)^2} + \frac{n^2}{4} + \frac{(n^2 - 6n + 21)^2}{16(n-1)^2} = \frac{49}{4}$$

$$\Leftrightarrow n^4 - 4n^3 - 10n^2 + 28n + 49 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 1 \pm 2\sqrt{2}$$

Vì $n > 0$ nên chọn $n = 1 + 2\sqrt{2}$, suy ra $m = 4 + \sqrt{2}$

Khi đó $AM \cdot AN = 6\sqrt{2}$.

Cách 2:

Dễ thấy mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm $A(4; 1; 0)$, đồng thời đường thẳng MN tiếp xúc với (S) cũng tại điểm $A(4; 1; 0)$ do $MN \subset (Oxy)$

Gọi $M(a; 0; 0)$, $N(0; b; 0)$.

$$\text{Do } A \in MN \text{ nên } \overline{AM} = k \overline{AN} \Rightarrow \begin{cases} a - 4 = -4k \\ -1 = k(b - 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{4}{a} = 1.$$

Gọi J là trung điểm $MN \Rightarrow J\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; 0\right)$ và $I(4; 1; 2)$ thuộc đường thẳng Δ vuông góc với

$$(Oxy) \text{ tại điểm } J. \text{ Phương trình } \Delta \text{ là } \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{2} \\ z = t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ là điểm $K\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; t\right)$.

$$\text{Theo giả thiết ta có hệ: } \begin{cases} \frac{1}{b} + \frac{4}{a} = 1 \\ OK = \frac{7}{2} \\ IK = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{b} + \frac{4}{a} = 1 \\ \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + t^2 = \frac{49}{4} \\ \left(\frac{a}{2} - 4\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 1\right)^2 + (t - 2)^2 = \frac{49}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4b}{b-1} \\ 4a + b + 4t - 21 = 0 \\ \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + t^2 = \frac{49}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4b}{b-1} \\ t = \frac{b^2 - 6b + 21}{4(b-1)} \\ \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + t^2 = \frac{49}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{4} + \frac{4b^2}{(b-1)^2} + \frac{(b^2 - 6b + 21)^2}{16(b-1)^2} = \frac{49}{4} \Leftrightarrow 4b^2 + 64 \left(1 + \frac{1}{b-1}\right)^2 + \left(b - 5 + \frac{16}{b-1}\right)^2 = 196$$

$$\Leftrightarrow 4b^2 + 64 + \frac{128}{b-1} + \frac{64}{(b-1)^2} + (b-5)^2 + 32(b-5) \cdot \frac{1}{b-1} + \frac{256}{(b-1)^2} = 196$$

$$\Leftrightarrow 5b^2 - 10b + 25 + \frac{320}{(b-1)^2} + 32(b-5+4) \cdot \frac{1}{b-1} = 132 \Leftrightarrow (b-1)^2 + \frac{64}{(b-1)^2} = 16$$

$$\Leftrightarrow \left[(b-1)^2 - 8\right]^2 = 0 \Leftrightarrow (b-1)^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - 2\sqrt{2} \\ b = 1 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Với $b = 1 - 2\sqrt{2}$ ta được $a = 4 - \sqrt{2} \Rightarrow AM \cdot AN = 6\sqrt{2}$.

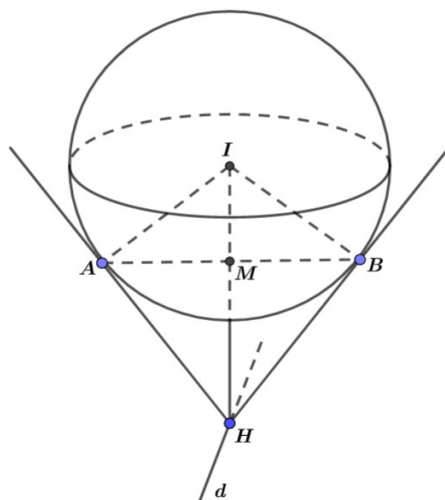
Với $b = 1 + 2\sqrt{2}$ ta được $a = 4 + \sqrt{2} \Rightarrow AM \cdot AN = 6\sqrt{2}$.

Câu 95. (THPT Hương Sơn - Hà Tĩnh - 2022) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 6$. Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ chứa d và cùng tiếp xúc với (S) lần lượt tại A, B . Gọi I là tâm mặt cầu (S) . Giá trị $\cos \angle AIB$ bằng

- A. $-\frac{1}{9}$. B. $\frac{1}{9}$. C. $-\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{6}$.

$$d: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases}, \vec{u}_d = (2; -3; 1)$$

Phương trình tham số của đường thẳng

Gọi H là hình chiếu của I lên d . Vì $H \in d \Rightarrow H(-2 + 2t; -1 - 3t; t)$

$$\Rightarrow \vec{IH} = (-4 + 2t; -3t; t + 1)$$

Khi đó, $\vec{IH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 2(-4 + 2t) - 3(-3t) + (t + 1) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow H\left(-1; -\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và $IH = \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Gọi M là hình chiếu của A lên IH .

Xét tam giác AIH vuông tại A có: $IA^2 = IM \cdot IH \Rightarrow IM = \frac{IA^2}{IH} = \frac{R^2}{IH} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác AIM vuông tại M có $AM^2 = \sqrt{IA^2 - IM^2} = \sqrt{R^2 - IM^2} = \frac{\sqrt{30}}{3} \Rightarrow AB = \frac{2\sqrt{30}}{3}$.

Tam giác AIB có $IA = IB = \sqrt{6}, AB = \frac{2\sqrt{30}}{3}$. Áp dụng định lý côsin trong tam giác AIB ta có:

$$\cos \angle AIB = \frac{IA^2 + IB^2 - AB^2}{2IA \cdot IB} = -\frac{1}{9}.$$

Câu 96. (THPT Hương Sơn - Hà Tĩnh - 2022) Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng

$(\alpha): x + y - 2z - 2 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-2}{1}$. Đường thẳng Δ' là hình chiếu

vuông góc của đường thẳng Δ trên mặt phẳng (α) có phương trình:

A. $\frac{x+8}{3} = \frac{y-6}{5} = \frac{z+2}{4}$. B. $\frac{x+8}{3} = \frac{y-6}{-5} = \frac{z+2}{4}$.

C. $\frac{x+1}{7} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+1}{1}$. D. $\frac{x+1}{7} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+1}{1}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $(\alpha): x + y - 2z - 2 = 0 \Rightarrow n_\alpha = (1; 1; -2)$

$$\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \vec{u}_\Delta = (2; -2; 1)$$

Gọi (β) là mặt phẳng qua Δ và vuông góc với $(\alpha) \Rightarrow n_{\beta} = [n_{\alpha}, u_{\Delta}] = (-3; -5; -4)$.

Đường thẳng Δ' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng Δ lên mặt phẳng (α) có VTCP:

$u_{\Delta'} = [n_{\beta}, n_{\alpha}] = (14; -10; 2)$. Chọn VTCP của Δ' là $u = (7; -5; 1)$.

$$M = \Delta \cap (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-2}{1} \\ x+y-2z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8 \\ y=6 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow M(-8; 6; -2)$$

Gọi

Đường thẳng Δ' qua $M(-8; 6; -2)$ và có VTCP $u = (7; -5; 1)$ phương trình dạng tham số:

$$\begin{cases} x = -8 + 7t \\ y = 6 - 5t \\ z = -2 + t \end{cases} \text{ Với } t=1 \Rightarrow I(-1; 1; -1) \in \Delta'$$

Phương trình đường thẳng Δ' dạng: $\frac{x+1}{7} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+1}{1}$.

- Câu 97. (Chuyên Quốc Học Huế 2022)** Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp đều $S.ABC$ có tọa độ đỉnh $S(6; -2; 3)$, thể tích $V=18$ và $AB=a$ ($a < 7$). Đường thẳng BC có phương trình là $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) tại A và tiếp xúc với cạnh SB . Khi đó bán kính mặt cầu (S) thuộc khoảng nào sau đây?
- A.** $(3; 4)$ **B.** $(5; 6)$ **C.** $(2; 3)$ **D.** $(4; 5)$

Lời giải

Chọn A

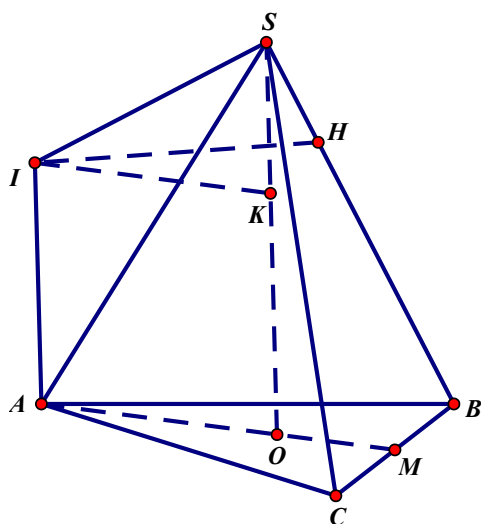
+ Gọi I, O, M là tâm của mặt cầu (S) , tâm của tam giác ABC và trung điểm của BC .

+ Ta có: $SM = d(S, BC) = \sqrt{29} \Rightarrow SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{29 - \frac{a^2}{12}}$

Do $V=18$ nên $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{29 - \frac{a^2}{12}} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 18 \Rightarrow a = 2\sqrt{6}$ (vì $0 < a < 7$)

+ Do đó: $SO = \sqrt{27}, SA = \sqrt{35}$

+ Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên SB, SO . Ta có: $BH = BA < SB$



Ta có:
$$\begin{cases} IS^2 = IH^2 + SH^2 \\ IS^2 = IK^2 + SK^2 \end{cases} \Rightarrow IH^2 + SH^2 = IK^2 + SK^2 \Leftrightarrow R^2 + (SB - HB)^2 = AO^2 + (SO - R)^2$$

$$\Leftrightarrow R^2 + (\sqrt{35} - 2\sqrt{6})^2 = 8 + (\sqrt{27} - R)^2 \Leftrightarrow R = \frac{2\sqrt{35 \cdot 24} - 24}{2\sqrt{27}} \approx 3,3 \in (3; 4)$$

Câu 98. (THPT Trần Hưng Đạo – Nam Định 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$. Lấy điểm $M(a; b; c)$ với $a < 0$ thuộc đường thẳng d sao cho từ M kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là tiếp điểm) thỏa mãn $\angle AMB = 60^\circ, \angle BMC = 90^\circ, \angle CMA = 120^\circ$. Tổng $a + b + c$ bằng

A. $\frac{10}{3}$

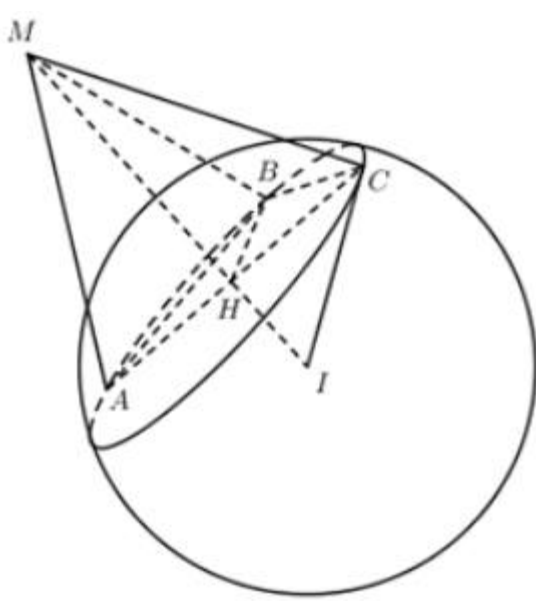
B. 1

C. -2

D. 2

Lời giải

Chọn C



Tâm $I(1; 2; -3); R = 3\sqrt{3}$.

Theo tính chất của tiếp tuyến kẻ từ một điểm đến mặt cầu ta có A, B, C thuộc đường tròn (C) tâm H .

Đặt $MA = MB = MC = a$.

$AB = a, BC = a\sqrt{2}, AC = a\sqrt{3} \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại $B \Rightarrow H$ là trung điểm AC .

Do đó $\sin 60^\circ = \frac{AI}{MI} \Rightarrow MI = 6$.

$$M(t-1; t-2; t+1) \in d \Rightarrow MI^2 = (t-2)^2 + (t-4)^2 + (t+4)^2 = 36 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=\frac{4}{3} \end{cases}$$

Gọi $\Rightarrow M(-1; -2; 1) \Rightarrow a+b+c = -2$. Do hoành độ của M âm.