

ÁP DỤNG HÀM SỐ NGƯỢC ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

I. Một số kiến thức chuẩn bị:

1. Định nghĩa hàm số ngược:

Cho hàm số $f: D \rightarrow D'$ (với $D, D' \subset \mathbb{R}$)
 $x \in D \Rightarrow y = f(x)$

Nếu f là song ánh thì tồn tại hàm số ngược

$$f^{-1}: D' \rightarrow D$$
$$y \in D' \Rightarrow x = f^{-1}(y)$$

2. Cách tìm hàm số ngược:

- Tìm miền xác định D của f nếu đề bài chưa cho.
- Tìm miền giá trị D' của f .
- Chứng minh $f: D \rightarrow D'$ là một song ánh. Khi đó f có hàm số ngược là

$$f^{-1}: D' \rightarrow D$$
$$y \in D' \Rightarrow x = f^{-1}(y)$$

Trong thực hành, để tìm hàm số ngược của hàm số $f(x)$ ta giải phương trình $y = f(x)$ với ẩn là x , ta được $x = g(y)$, sau đó đổi vai trò của x và y .

Ví dụ: [4] Tìm hàm ngược của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

Trước hết ta giải phương trình với ẩn x là $y = \frac{x-1}{x+1}$ với $x \neq -1$.

$$\text{Ta có } xy + y = x - 1 \Leftrightarrow x(1-y) = y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1+y}{1-y}.$$

Như vậy hàm số ngược của hàm số đã cho là $f^{-1}(x) = \frac{1+x}{1-x}$.

3. Tính chất:

- Hàm số g là hàm ngược của f khi và chỉ khi f là hàm ngược của g .
- Hàm ngược (nếu có) của một hàm số là duy nhất.
- Hàm ngược là một đơn ánh.
- Mọi hàm số đơn ánh đều có hàm ngược. Mọi hàm số đơn điệu nghiêm ngặt đều có hàm số ngược.

4. Đồ thị của hàm số ngược:

Nếu hàm số $g(x)$ là hàm ngược của hàm số $f(x)$ thì hai đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ I và thứ III.

II. Nội dung:

1. Ví dụ mở đầu:[5]

$$\text{Giải phương trình } x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1} \quad (1)$$

Giải:

Hầu hết các sách về toán sơ cấp đều giải như sau

$$\text{Đặt } \sqrt[3]{2x - 1} = y \Leftrightarrow y^3 + 1 = 2x.$$

$$\text{Vậy ta có hệ phương trình } \begin{cases} x^3 + 1 = 2y & (2) \\ y^3 + 1 = 2x & (3) \end{cases}$$

$$\text{Lấy (2) - (3) ta được } x^3 - y^3 = 2(y - x)$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

$$\text{Thay vào (2) ta được } x^3 + 1 = 2x \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm: } x = 1, x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Nhận xét: (1) } \Leftrightarrow \frac{x^3 + 1}{2} = \sqrt[3]{2x - 1} \quad (4)$$

Để thấy $y = f(x) = \frac{x^3 + 1}{2}$ và $y = g(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$ là 2 hàm ngược nhau, hay $g(x) = f^{-1}(x)$. Do đó (3) $\Leftrightarrow f(x) = f^{-1}(x)$.

Ta xét phương trình dạng này.

2. Phương trình dạng $f(x) = f^{-1}(x)$ (*)

Tính chất: Xét $f(x)$ là hàm đồng biến, khi đó phương trình

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x.$$

Chứng minh:

Điều kiện cần:

$$\text{Giả sử } x < f(x) = f^{-1}(x).$$

$$\text{Vì } f(x) \text{ đồng biến } \Rightarrow f(x) < f(f^{-1}(x)) = x < f(x) \text{ (mâu thuẫn).}$$

$$\text{Giả sử } x > f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow f(x) > f(f^{-1}(x)) = x > f(x) \text{ (mâu thuẫn).}$$

$$\text{Vậy } f(x) = x.$$

Điều kiện đủ:

Vì $f(x) = x$ nên $A(x, f(x))$ thuộc đường thẳng (d) : $y = x$.

Do đó điểm đối xứng của A qua đường thẳng (d) cũng là A.

Suy ra A cũng thuộc đồ thị hàm số $y = f^{-1}(x) \Rightarrow f(x) = f^{-1}(x)$. $\square$

Trở lại ví dụ mở đầu, (4) có dạng $f(x) = f^{-1}(x)$, trong đó $f(x) = \frac{x^3 + 1}{2}$ là hàm đồng biến trên $\mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó (4)} \Leftrightarrow f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{x^3 + 1}{2} = x \\ &\Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0. \end{aligned}$$

Vậy với những hàm $f(x)$ đồng biến cụ thể thì ta sẽ được những phương trình cụ thể mà ta gọi là phương trình chứa hai hàm ngược nhau. Khi gặp phương trình như vậy, ta tìm cách biến đổi về dạng trên.

Xét một số ví dụ sau:

Ví dụ 1: [1]

Giải phương trình $(8\cos^3 x + 1)^3 = 162\cos x - 27 \quad (1)$
--

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{(2\cos x)^3 + 1}{3} \right)^3 = 3(2\cos x) - 1 \quad (2)$$

Đặt $2\cos x = t, t \in [-2, 2]$.

$$\text{Phương trình (2) trở thành } \left(\frac{t^3 + 1}{3} \right)^3 = 3t - 1 \Leftrightarrow \frac{t^3 + 1}{3} = \sqrt[3]{3t - 1} \quad (3)$$

Hàm số $y = f(t) = \frac{t^3 + 1}{3}$ đồng biến và có hàm số ngược là $y = f^{-1}(t) = \sqrt[3]{3t - 1}$.

Do đó (3) $\Leftrightarrow f(t) = f^{-1}(t)$ với $f(t)$ đồng biến

$$\Leftrightarrow f(t) = t$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^3 + 1}{3} = t$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 3t + 1 = 0$$

$$\text{Vậy (1)} \Leftrightarrow (2\cos x)^3 - 3(2\cos x) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8\cos^3 x - 6\cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(4\cos^3 x - 3\cos x) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{9} + k \frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbf{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm \frac{2\pi}{9} + k \frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbf{Z})$.

Nhận xét: Ở ví dụ trên, phương trình gốc vẫn là $\frac{t^3+1}{3} = \sqrt[3]{3t-1}$. Từ phương trình này ta thay $t = 2\cos x$ và biến đổi sẽ được phương trình ban đầu.

Tổng quát: Có thể tổng quát lên dạng $(f(x))^n + b = a \sqrt[n]{af(x) - b} \quad (**)$, trong đó $a > 0$, n là số tự nhiên lẻ.

Đặt $y = f(x)$, $y \in D'$ (D' là miền giá trị của $f(x)$).

$$\text{Khi đó } (**) \Leftrightarrow \frac{y^n + b}{a} = \sqrt[n]{ay - b}.$$

$$\text{Xét } g(y) = \frac{y^n + b}{a}. \text{ Ta có } g'(y) = \frac{n}{a} y^{n-1} \geq 0, \quad "y \in D'.$$

$\Rightarrow g(y)$ đồng biến trên D' .

Do đó $g(y)$ có hàm số ngược là $g^{-1}(y) = \sqrt[n]{ay - b}$.

$$\text{Vậy } (**) \Leftrightarrow \frac{y^n + b}{a} = y$$

$$\Leftrightarrow y^n - ay + b = 0 \quad (4)$$

Tuy nhiên, việc giải phương trình (4) là không đơn giản. Người ta thường cho $n = 3$.

Nhận xét: Ở (**), nếu ta thay hằng số b bằng một biểu thức theo x thì vẫn giải được.

Ví dụ 2:[8]

$$\text{Giải phương trình sau} \quad 7x^2 - 13x + 8 = 2x^2 \sqrt[3]{x(1 + 3x - 3x^2)} \quad (1)$$

Giải:

Nhận xét rằng phương trình trên chưa có dạng như trên, nhưng có thể biến đổi để đưa về dạng trên.

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình. Chia hai vế phương trình cho x^3 ta được: $\frac{7}{x} - \frac{13}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 3} \quad (2)$

Đặt $\frac{1}{x} = t$, $t \in \mathbb{R}^*$. Khi đó (2) được viết lại:

$$8t^3 - 13t^2 + 7t = 2\sqrt[3]{t^2 + 3t - 3}$$

$$\Leftrightarrow (2t - 1)^3 - (t^2 - t - 1) = 2\sqrt[3]{2(2t - 1) + t^2 - t - 1} \quad (3)$$

Đặt $y = 2t - 1$, $y \neq -1$.

(3) được viết lại $y^3 - (t^2 - t - 1) = 2\sqrt[3]{2y + t^2 - t - 1}$

$$\Leftrightarrow \frac{y^3 - (t^2 - t - 1)}{2} = \sqrt[3]{2y + t^2 - t - 1} \quad (4)$$

Hàm số $f(y) = \frac{y^3 - (t^2 - t - 1)}{2}$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có hàm ngược là $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{2y + t^2 - t - 1}$.

Do đó (4) $\Leftrightarrow f(y) = f^{-1}(y)$

$$\Leftrightarrow f(y) = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^3 - (t^2 - t - 1)}{2} = y$$

$$\Leftrightarrow 8t^3 - 13t^2 + 3t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 1)(8t^2 - 5t + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t - 1 = 0 \\ 8t^2 - 5t + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ 8t^2 - 5t + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ \Delta = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{5 \pm \sqrt{89}}{16} \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{5 \pm \sqrt{89}}{16} \end{cases}$

Thử lại ta thấy ba nghiệm này thỏa phương trình (1).

Vậy phương trình có ba nghiệm $x = 1$; $x = \frac{16}{5 \pm \sqrt{89}}$.

Ở phổ thông còn có hai hàm ngược nhau mà ta thường gặp là hàm mũ và hàm logarit.

Ví dụ 3:[1]

Giải phương trình sau $\ln(\sin x + 1) = e^{\sin x} - 1. \quad (1)$

Giải:

Điều kiện: $\sin x + 1 > 0 \Leftrightarrow \sin x > -1$

$$\Leftrightarrow \sin x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

Đặt $\sin x = t, -1 < t \leq 1$.

Khi đó (1) trở thành $\ln(t+1) = e^t - 1 \quad (2)$

Hàm $f(t) = \ln(t+1)$ đồng biến trên $(-1, 1]$ và có hàm ngược là $f^{-1}(t) = e^t - 1$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow f(t) = f^{-1}(t)$

$$\Leftrightarrow f(t) = t$$

$$\Leftrightarrow \ln(t+1) = t$$

$$\Leftrightarrow \ln(t+1) - t = 0.$$

Xét hàm số $g(t) = \ln(t+1) - t$, $t \in (-1, 1]$

$$\text{Ta có } g'(t) = \frac{1}{t+1} - 1 = \frac{-t}{t+1}$$

BBT

T	-1	0	1
$g'(t)$		+	-
$g(t)$		0	

Theo BBT ta suy ra phương trình có nghiệm duy nhất là $t = 0 \in (-1, 1]$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, ($k \in \mathbf{Z}$).

Vậy phương trình có nghiệm $x = k\pi$, ($k \in \mathbf{Z}$).

Nhận xét: Ở ví dụ này ta áp dụng phương trình (*) cho $f(t) = \ln(t+1)$ là hàm đồng biến trên tập xác định của nó. Nhưng phương trình khó hơn một tí vì đã thực hiện phép đổi biến là $t = \sin x$.

Ví dụ 4:[5]

Giải phương trình sau: $7^{x-1} = 6 \log_7(6x-5) + 1$ (1)

Giải:

$$\text{ĐK: } 6x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{6}.$$

Đặt $y = x - 1$, $y > -\frac{1}{6}$. Khi đó (1) trở thành $7^y = 6 \log_7(6y+1) + 1$

$$\Leftrightarrow \frac{7^y - 1}{6} = \log_7(6y+1) \quad (2)$$

Hàm $f(y) = \frac{7^y - 1}{6}$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ và có hàm ngược là $f^{-1}(y) = \log_7(6y+1)$.

Do đó $(2) \Leftrightarrow f(y) = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(y) = y$

$$\Leftrightarrow \frac{7^y - 1}{6} = y \Leftrightarrow \frac{7^{x-1} - 1}{6} = x - 1$$

$$\Leftrightarrow 7^{x-1} - 6x + 5 = 0.$$

Xét hàm số $g(x) = 7^{x-1} - 6x + 5$, $x \in \left(\frac{1}{6}, +\infty\right)$

Ta có $g'(x) = 7^{x-1} \cdot \ln 7 - 6$

$$g''(x) = 7^{x-1} \cdot \ln^2 7 > 0 \quad \forall x \in \left(\frac{1}{6}, +\infty\right)$$

Suy ra $g'(x)$ là hàm đồng biến trên $\left(\frac{1}{6}, +\infty\right)$

Theo định lý Rolle phương trình $g(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm trên $\left(\frac{1}{6}, +\infty\right)$

Mặt khác dễ thấy $x = 1$ và $x = 2$ là hai nghiệm của $g(x)$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 1$ và $x = 2$.

Nhận xét: Ở ví dụ này ta còn áp dụng thêm định lý Rolle để giải. Ta sẽ xét phương pháp này ở chương sau!

Tổng quát: Tất cả phương trình ở các ví dụ trên đều có dạng

$$g(f(x)) + b = a g^{-1}(af(x) - b)$$

trong đó g là hàm đồng biến trên tập xác định của nó, $a > 0$.

3. Chú ý:

Tất cả những phương trình trên đều có cách giải khác mà không cần dùng tính chất của hàm số ngược.

Và phương pháp dùng tính chất của hàm số ngược này có hạn chế là không áp dụng được cho những phương trình dạng $(f(x))^n + b = a \sqrt[n]{af(x) - b}$ với n chẵn.

Ví dụ: [5]

$$\text{Giải phương trình } x^2 - \sqrt{x+5} = 5 \quad (1)$$

Giải:

Cách 1:

ĐK: $x \geq -5$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 5 = \sqrt{x+5}$$

Đặt $\sqrt{x+5} = t, t \geq 0$.

$$\text{Khi đó ta có hệ } \begin{cases} t^2 - x = 5 & (2) \\ x^2 - t = 5 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Lấy (2) - (3) } \Rightarrow t^2 - x^2 - x + t = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-x)(t+x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ t+x+1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ x = -x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 + \text{ TH1 } t = x &\Rightarrow \begin{cases} x^3 \geq 0 \\ \sqrt{x+5} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \geq 0 \\ x^2 - x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \\
 + \text{ TH2 } t = -x - 1 &\Rightarrow \begin{cases} x + 1 \leq 0 \\ x^2 + x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}.
 \end{aligned}$$

Thử lại ta thấy 2 nghiệm này thỏa phương trình.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$ và $x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$.

Cách 2:

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x^3 \geq \sqrt{5} \\ 5 \leq x \leq -\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad &\Leftrightarrow x + 5 = (x^2 - 5)^2 \Leftrightarrow x + 5 = x^4 - 2x^2 \cdot 5 + 5^2 \\
 &\Leftrightarrow 5^2 - (2x^2 + 1) \cdot 5 + x^4 - x = 0 \quad (4)
 \end{aligned}$$

Đặt $5 = t$. Khi đó (4) được viết lại $t^2 - (2x^2 + 1)t + x^4 - x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2 - x \\ t = x^2 + x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2} \\ t = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

So với điều kiện ta được $x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$ và $x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$ là hai nghiệm của phương trình đã cho.

Cách 2 đã thay đổi vai trò của hằng số và ẩn. Do đó cách này gọi là phương pháp hằng số biến thiên. Đây là một phương pháp độc đáo và thú vị.

III. Bài tập đề nghị:

Giải các phương trình sau:

1. [8] $4x^2 + 7x + 1 = 2\sqrt{x+2}$.
2. $x^3 + 3x^2 - 3\sqrt[3]{3x+5} = 1 - 3x$ (đề thi Olympic 30-4, lần thứ 15-2009).
3. [1] $x^3 + (3 - a^2)a = 3\sqrt[3]{3x + (a^2 - 3)a}$ với $a \in (-2, 2)$.
4. [5] $\sqrt[3]{ax+b} = c(dx+e)^3 + ax + b$ trong đó $d = ac + a$, $e = bc + b$.
5. [5] $s^{ax+b} = c \log_s(dx+e) + ax + b$ trong đó $d = ac + a$, $e = bc + b$, $s > 1$.

Chương 2:

ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ LAGRANGE VÀ ĐỊNH LÝ ROLLE

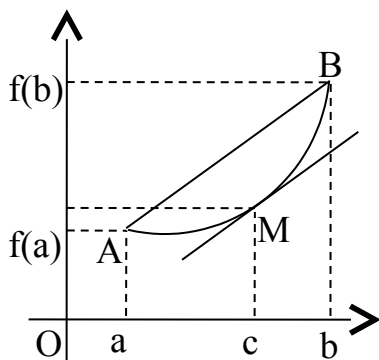
ĐỀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

I. Một số kiến thức chuẩn bị:

1. Định lý Lagrange:

Cho hàm số $f(x)$ xác định liên tục trên $[a,b]$, khả vi trên (a,b) . Khi đó tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

2. Ý nghĩa hình học của định lý:



Cho một cung nối hai điểm A, B có tính chất:

- Cung liên từ A đến B.
- Cung trơn (có tiếp tuyến) tại mọi điểm trên cung trừ tại A, B thì tồn tại một điểm M trên cung khác A, B sao cho tiếp tuyến tại M với cung AB song song với AB.

3. Một số hệ quả:

Hệ quả 1: (Định lý Rolle)

Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $[a,b]$, khả vi trên (a,b) và $f(a) = f(b)$. Thế thì tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Hệ quả 2: Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và có đạo hàm trên (a,b) . Nếu phương trình $f'(x) = 0$ có n nghiệm trên (a,b) thì phương trình $f(x) = 0$ có không quá $(n+1)$ nghiệm trong khoảng đó.

II. Nội dung:

1. Ứng dụng định lý Lagrange chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình:

a. Phương pháp chung:

Từ định lý Lagrange, nếu $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$ có nghiệm thuộc (a,b) .

Như vậy, để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong (a,b) bằng cách sử dụng định lý Lagrange điều quan trọng nhất là nhận ra được nguyên hàm của $f(x)$. Cụ thể ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định hàm số $F(x)$ khả vi liên tục trên $[a,b]$ và thỏa mãn

i. $F'(x) = f(x)$, tức là $F(x) = \int f(x) dx$.

ii. $F(b) - F(a) = 0$.

Bước 2: Khi đó tồn tại $x_0 \in (a,b)$ sao cho $F'(x_0) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$.

$$\Leftrightarrow f(x_0) = 0.$$

$\Leftrightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (a,b)$.

b. Một số ví dụ:

Ví dụ 1:[2]

Giả sử $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $a2^{2x} + b2^x + c = 0$ (1) luôn có nghiệm.

Giải:

Đặt $2^x = t, t > 0$. Ta được $at^2 + bt + c = 0$.

Xét hàm số $F(t) = \frac{1}{3}at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + ct$ khả vi và liên tục trên $(0, +\infty)$ và thỏa mãn

$$\text{i) } F'(t) = at^2 + bt + c$$

$$\text{ii) } F(1) - F(0) = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0.$$

Khi đó tồn tại $t_0 \in (0,1)$ sao cho $F'(t_0) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = 0$

$$\Leftrightarrow at_0^2 + bt_0 + c = 0$$

$\Leftrightarrow$ phương trình $at^2 + bt + c = 0$ có nghiệm $t_0 \in (0,1)$.

Với $t_0 \in (0,1)$ ta có $2^x = t_0 \Leftrightarrow x = \log_2 t_0$. Tức là phương trình (1) luôn có nghiệm.

Ví dụ 2:[2]

Giả sử $\frac{a}{2003} + \frac{b}{2002} + \frac{c}{2001} = 0$. Chứng minh rằng phương trình $a2^{lg^2 x} + b2^{lg x} + c = 0$ (1) luôn có nghiệm.

Giải:

ĐK: $x > 0$.

Đặt $lg x = t$, ta được $at^2 + bt + c = 0$.

Xét hàm số $F(t) = \frac{at^{2003}}{2003} + \frac{bt^{2002}}{2002} + \frac{ct^{2001}}{2001}$ khả vi và liên tục trên $\mathbf{R}$, thỏa mãn

$$\text{i) } F'(t) = at^{2002} + bt^{2001} + ct^{2000} = t^{2000}(at^2 + bt + c).$$

$$\text{ii) } F(1) - F(0) = \frac{a}{2003} + \frac{b}{2002} + \frac{c}{2001} = 0.$$

Khi đó tồn tại $t_0 \in (0,1)$ sao cho $F'(t_0) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = 0$

$$\Leftrightarrow t_0^{2000}(at_0^2 + bt_0 + c) = 0$$

$$\Leftrightarrow at_0^2 + bt_0 + c = 0$$

Do đó phương trình $at^2 + bt + c = 0$ có nghiệm $t_0 \in (0,1)$.

Với $t_0 \in (0,1)$ ta có $\lg x = t_0 \Leftrightarrow x = 10^{t_0}$.

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm.

☛ **Tổng quát:** Qua 2 ví dụ trên, ta có thể giải bài toán tổng quát sau:

“Giả sử $\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$. Chứng minh rằng phương trình $a(f(x))^2 + bf(x) + c = 0$ luôn có nghiệm trong miền xác định của $f(x)$ ”

Cách giải cũng tương tự như trên.

Ví dụ 3:

Chứng tỏ rằng với $a + 3b = 27$ thì phương trình $2(6x - b)\sqrt{x+1} = a$ (1) luôn có ít nhất một nghiệm.

Giải:

ĐK: $x \geq -1$.

* $a = 0, b = 9$ thì phương trình (1) luôn có ít nhất một nghiệm $x = -1$.

* $a \neq 0 \Rightarrow x = -1$ không phải nghiệm của (1).

Do đó (1) $\Leftrightarrow -6x + b + \frac{a}{2\sqrt{x+1}} = 0$.

Xét hàm số $F(x) = a\sqrt{x+1} - 3x^2 + bx$ liên tục, khả vi trên $[0, +\infty)$.

Ta có $F'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x+1}} - 6x + b$. Và $F(3) - F(0) = a + 3b - 27 = 0$.

Khi đó $x_0 \in [0,3]$ sao cho $F'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{2\sqrt{x_0+1}} - 6x_0 + b = 0$.

Tức là (1) luôn có nghiệm $x_0 \in [0,3]$.

Vậy phương trình luôn có nghiệm.

Ví dụ 4:

Chứng tỏ rằng với $a + b - c = 0$ thì phương trình

$$a\sqrt{3x+1} + 3b\sqrt{x} = 4cx\sqrt{x(3x+1)} \quad (1)$$

luôn có nghiệm thuộc $(0,1)$.

Giải:

ĐK: $x \geq 0$.

Trường hợp $a = 0, b = c$ thì (1) có nghiệm là $x = 0$.

Trường hợp $a \neq 0$ hoặc $b \neq c$: $x = 0$ không là nghiệm của (1).

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \frac{a}{2\sqrt{x}} + \frac{3b}{2\sqrt{3x+1}} - 2cx = 0$

Xét $F(x) = a\sqrt{x} + b\sqrt{3x+1} - cx^2$ liên tục, khả vi trên $(0,1)$, và $F(1) - F(0) = a + b - c = 0$.

Theo định lý Rolle, tồn tại $x_0 \in (0,1)$ sao cho $F'(x_0) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2\sqrt{x_0}} + \frac{3b}{2\sqrt{3x_0+1}} - 2cx_0 = 0$$

Tức là phương trình (1) luôn có nghiệm thuộc $(0,1)$.

Ví dụ 5:[3]

Cho $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ thỏa

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = a_0 + a_1 + \frac{a_2}{3} 2^2 + \frac{a_3}{4} 2^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1} 2^n = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình $a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} = 0$ (*) có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0,2)$.

Giải:

Xét hàm số $f(x) = a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 + \dots + \frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}$.

Ta có: + $f(x)$ khả vi cấp 2 trên $\mathbf{R}$

$$+ f(0) = 0$$

$$+ f(1) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

$$\begin{aligned} + f(2) &= a_0 \cdot 2 + \frac{a_1}{2} 2^2 + \frac{a_2}{3} 2^3 + \frac{a_3}{4} 2^4 + \dots + \frac{a_n}{n+1} 2^{n+1} \\ &= 2(a_0 + a_1 + \frac{a_2}{3} 2^2 + \frac{a_3}{4} 2^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1} 2^n) = 0 \end{aligned}$$

Theo định lý Rolle, $\exists c_1 \in (0,1), c_2 \in (1,2)$ sao cho $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$.

Khi đó lại theo định lý Rolle, $\exists c_3 \in (c_1, c_2)$ sao cho $f''(c_3) = 0$.

$$\Rightarrow a_1 + 2a_2c_3 + 3a_3c_3^2 + \dots + na_nc_3^{n-1} = 0.$$

Hay phương trình $a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} = 0$ có nghiệm $c_3 \in (c_1, c_2) \subset (0,2)$.

Vậy (*) có ít nhất một nghiệm thuộc $(0,2)$.

Nhận xét:

Qua các ví dụ 3,4,5 ta thấy việc vận dụng định lý Lagrange không phải lúc nào cũng tiến hành trực tiếp, mà phải qua các phép biến đổi sao cho phù hợp, và ta vận dụng định lý Lagrange hay hệ quả của nó (định lý Rolle) là tùy thuộc vào sự biến đổi đó.

Để kết thúc nội dung này, ta xét 2 ví dụ sau:

Ví dụ 6:[6]

Phương trình $x^2 = 100^{\sin x}$ có bao nhiêu nghiệm trên $(2\pi, 3\pi)$.

Giải:

Với $x > 0$ ta có $x^2 = 100^{\sin x} \Leftrightarrow x = 10^{\sin x} \Leftrightarrow \lg x = \sin x$.

Xét hàm số $f(x) = \lg x - \sin x$ với $2\pi < x < 3\pi$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{x \ln 10} - \cos x.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cos x \ln 10 = 1.$$

Xét hàm số $g(x) = x \cos x, x \in (2\pi, 3\pi)$.

$$\text{Ta có } g'(x) = \cos x - x \sin x.$$

Phương trình $g'(x) = 0$ có duy nhất nghiệm $x_0 \in (2\pi, 3\pi)$ và ta có $2p < x_0 < \frac{3p}{2}$ (vì $g(2\pi) = g(\frac{3p}{2}) < 0$).

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2\pi, x_0)$ và nghịch biến trên $(x_0, 3\pi)$.

Hơn nữa ta có $g(2\pi) = 2\pi > \frac{1}{\ln 10}$

$g(3p) = -3p < 0$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm trên $(2p, 3p)$.

Theo định lý Rolle suy ra $f(x)$ có không quá 2 nghiệm trên $(2p, 3p)$.

Mặt khác, ta có $f(2p) = \lg(2p) > 0$, $f(\frac{3p}{2}) = \lg(\frac{3p}{2}) - 1 < 0$, $f(3p) = \lg(3p) > 0$.

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm thuộc $(2p, \frac{3p}{2})$ và đúng 1 nghiệm thuộc $(\frac{3p}{2}, 3p)$.

Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm thuộc $(2\pi, 3\pi)$.

Ví dụ 7:[3]

Cho $p(x)$ là đa thức bậc n ($n \in \mathbb{N}$) với hệ số thực. Biết rằng $p(x)$ không có nghiệm thực. Chứng minh rằng đa thức $q(x) = p(x) + ap'(x) + a^2p''(x) + \dots + a^n p^{(n)}(x)$ với $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ cũng không có nghiệm thực.

Giải:

* Với $a = 0$: hiển nhiên.

* Với $a \neq 0$:

Do $p(x)$ là đa thức bậc n ($n \in \mathbb{N}$) với hệ số thực và $p(x)$ không có nghiệm thực nên n chẵn. Suy ra $q(x)$ là đa thức bậc chẵn với hệ số thực.

Giả sử $q(x)$ có nghiệm thực là $m \in \mathbb{R} \Rightarrow q(x) = (x - m)r(x)$, với $r(x)$ là đa thức bậc lẻ với hệ số thực.

$\Rightarrow r(x)$ có nghiệm thực là $t \in \mathbb{R} \Rightarrow q(x)$ có 2 nghiệm thực là m và t .

* Nếu $m = t \Rightarrow q(x) = (x - m)^2 \cdot h(x)$, với $h(x)$ là đa thức bậc $n - 2$.

Ta có $q'(x) = 2(x - m)h(x) + (x - m)^2 h'(x)$.

Khi đó $q'(x)$ có nghiệm $x = m \in \mathbb{R} \Rightarrow q(x) - aq'(x)$ có nghiệm $x = m$.

Mặt khác $q(x) - aq'(x) = (p(x) + ap'(x) + a^2p''(x) + \dots + a^n p^{(n)}(x)) - a(p'(x) + ap''(x) + \dots + a^{n-1}p^{(n-1)}(x)) = p(x)$.

Suy ra $p(x)$ có nghiệm $x = m \in \mathbb{R}$, trái với giả thiết.

* Nếu $m < t$. Do $a \neq 0$ nên ta xét hàm số $g(x) = aq(x)e^{\frac{x}{a}}$ thì $g(x)$ liên tục trên $[m, t]$ và $g(m) = g(t) = 0$.

Theo định lý Rolle, $\exists c \in (m, t)$ sao cho $g'(c) = 0$.

Mặt khác $g'(x) = [aq'(x) - q(x)] e^{\frac{x}{a}} = -p(x) \cdot e^{\frac{x}{a}}$.

Do vậy $-p(c) \cdot e^{\frac{c}{a}} = 0 \Leftrightarrow p(c) = 0$ hay c là nghiệm của $p(x)$, trái giả thiết.

Vậy $q(x)$ không có nghiệm thực.

*** Một số kết quả thu được từ bài toán:**

+ Từ tính liên tục của $p(x)$ và $q(x)$, ta có nếu $p(x)$ vô nghiệm trên $\mathbb{R}$ thì $p(x)$ giữ nguyên một dấu trên $\mathbb{R} \Rightarrow q(x)$ cũng giữ nguyên một dấu trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} q(x)$. Do đó nếu $p(x) > 0$ thì $q(x) > 0$ và $p(x) < 0$ thì $q(x) < 0$.

+ Với giả thiết $p(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, cho $a = 1$, ta phải chứng minh $p(x) + p'(x) + p''(x) + \dots + p^{(n)}(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

+ Cho $p(x) = x^4 + a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1$ với a_1, b_1, c_1, d_1 thuộc $\mathbb{R}$. Khi đó nếu $p(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $F(x) = p(x) + p'(x) + p''(x) + p'''(x) + p^{(4)}(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Trên đây là một số bài toán vận dụng định lý Lagrange để chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình. Ta nhận thấy rằng việc vận dụng định lý Lagrange có những ưu thế nhất định trong vấn đề chứng minh tồn tại nghiệm, có nghiệm duy nhất, ước lượng số nghiệm của phương trình. Điều này vô cùng quan trọng trong việc giải phương trình mà chúng tôi đề cập sau đây.

2. Ứng dụng định lý Lagrange giải phương trình mũ – logarit:

Phương trình mũ và phương trình logarit là 2 loại phương trình quan trọng và khó, thường xuất hiện trong các kì thi tuyển sinh, dưới đây chúng tôi sẽ giới thiệu đến các bạn 1 công cụ tương đối hiệu quả để giải bài toán phương trình mũ và phương trình logarit, đó là sử dụng định lý Lagrange và định lý Rolle.

Ví dụ 1:[3]

Cho 3 số thực dương $a, b, c, b > a$ và $f(x)$ là hàm số xác định trên $\mathbf{R}$. Chứng minh rằng nghiệm của phương trình

$$(a + c)^{f(x)} + b^{f(x)} = a^{f(x)} + (b + c)^{f(x)} \quad (1)$$

nếu có cũng là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ hoặc $f(x) = 1$.

Giải:

Giả sử x_0 là một nghiệm của phương trình (1), nghĩa là

$$(a + c)^{f(x_0)} + b^{f(x_0)} = a^{f(x_0)} + (b + c)^{f(x_0)}$$

$$\Leftrightarrow (a + c)^{f(x_0)} - a^{f(x_0)} = (b + c)^{f(x_0)} - b^{f(x_0)}$$

Xét hàm số $g(t) = (t + c)^{f(x_0)} - t^{f(x_0)}, t \in [a, b]$.

Ta có $g(t)$ liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b) , $g(a) = g(b)$.

Theo định lý Rolle, tồn tại $m \in (a, b)$ sao cho $g'(m) = 0$

$$\Leftrightarrow f(x_0)((m + c)^{f(x_0)-1} - m^{f(x_0)-1}) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = 0 \\ \text{hoặc} \\ (m + c)^{f(x_0)-1} - m^{f(x_0)-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = 0 \\ \text{hoặc} \\ f(x_0) = 1 \end{cases} \quad (\text{dpcm}).$$

Ví dụ 2:

Giải phương trình: $a^x + b^x = (a + b - 2)x + 2$, với $a, b \in \mathbb{R}^*$ (1)

Giải:

Ta có $a^x + b^x = (a + b - 2)x + 2 \Leftrightarrow a^x + b^x - (a + b - 2)x - 2 = 0$.

Xét hàm số $f(x) = a^x + b^x - (a + b - 2)x - 2$ liên tục, khả vi trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b - (a + b - 2)$

$$f''(x) = a^x \ln^2 a + b^x \ln^2 b > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Theo định lý Rolle, phương trình $f(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm.

Dễ thấy $x = 0, x = 1$ là hai nghiệm của phương trình.

Vậy (1) có 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$.

☛ **Tổng quát:** Ta có phương trình sau:

$$\prod_{i=1}^n a_i^{f(x)} = \prod_{i=1}^n a_i - n \frac{1}{x} + n, \quad a_i > 0, i = \overline{1, n}.$$

Việc giải phương trình trên hoàn toàn tương tự như các ví dụ trên.

Ví dụ 3:

Giải phương trình $a^x + b^x = 2 \frac{a + b}{a + b}$, với $a, b \in \mathbb{R}^*$

Giải:

$$\text{Ta có } a^x + b^x = 2 \frac{a + b}{a + b} \Leftrightarrow \frac{a^{2a}}{a + b} + \frac{b^{2b}}{a + b} - 2 = 0$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{a^{2a}}{a + b} + \frac{b^{2b}}{a + b} - 2$ liên tục, khả vi trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{a^{2a}}{a + b} \ln \frac{2a}{a + b} + \frac{b^{2b}}{a + b} \ln \frac{2b}{a + b},$$

$$f''(x) = \frac{a^{2a}}{a + b} \ln^2 \frac{2a}{a + b} + \frac{b^{2b}}{a + b} \ln^2 \frac{2b}{a + b} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Theo định lý Rolle phương trình $f(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm.

Dễ thấy $x = 0$ và $x = 1$ là 2 nghiệm của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$.

☛ **Tổng quát:** Từ ví dụ trên ta có dạng tổng quát sau:

$$\prod_{i=1}^n a_i^{f(x)} = n \frac{\prod_{i=1}^n a_i}{n}, \quad a_i > 0, i = \overline{1, n}.$$

Ví dụ 4:

Giải phương trình $a^x + b^x = c^x + d^x$ với $a + b = c + d, a, b, c, d > 0$.

Giải:

Vì $a + b = c + d$ nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $a > c$ và $d > b$.

$$\text{Khi đó } a - c = d - b = m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c + m \\ d = b + m \end{cases}$$

$$\text{Ta có } a^x + b^x = c^x + d^x \Leftrightarrow a^x - c^x = d^x - b^x \Leftrightarrow (c + m)^x - c^x = (b + m)^x - b^x$$

Điều kiện cần:

$$\text{Giả sử } y \text{ là nghiệm của phương trình } \Rightarrow (c + m)^y - c^y = (b + m)^y - b^y.$$

Xét hàm số $f(t) = (t + m)^y - t^y, t \geq 1$.

Khi đó $f(t)$ liên tục trên $[1, +\infty)$, khả vi trên $(1, +\infty)$.

Do y là nghiệm của phương trình nên ta có $f(c) = f(b)$. Giả sử $b > c$.

Theo định lý Rolle, tồn tại $x_0 \in (b, c)$ sao cho $f'(x_0) = 0$

$$\Leftrightarrow y[(x_0 + m)^{y-1} - x_0^{y-1}] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x_0 + m)^{y-1} - x_0^{y-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Điều kiện đủ:

Dễ thấy $x = 0, x = 1$ là 2 nghiệm của phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$.

Ví dụ 5:[2]

$$\text{Giải phương trình } (1 + x)(2 + 4^x) = 3 \cdot 4^x$$

Giải:

$$\text{Ta có } (1 + x)(2 + 4^x) = 3 \cdot 4^x \Leftrightarrow \frac{3 \cdot 4^x}{2 + 4^x} - x - 1 = 0$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{3 \cdot 4^x}{2 + 4^x} - x - 1$ liên tục và khả vi trên $\mathbf{R}$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{6 \cdot \ln 4 \cdot 4^x}{(2 + 4^x)^2} - 1, f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot \ln 4 \cdot 4^x = (2 + 4^x)^2.$$

Đây là phương trình bậc 2 đối với ẩn 4^x nên có không quá 2 nghiệm. Do đó theo hệ quả 2, phương trình $f(x) = 0$ có không quá 3 nghiệm.

Mặt khác, dễ thấy $x = 0, x = \frac{1}{2}, x = 1$ là 3 nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x = 0, x = \frac{1}{2}$ và $x = 1$.

🔱 Tổng quát: Ta có thể tổng quát ví dụ trên lên bài toán sau:

$$\text{“Cho } a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ thỏa } a(b + 1) = d, (a + 1)(b + c) = dc, (a + \frac{1}{2})(b + \sqrt{c}) = d\sqrt{c}.$$

Giải phương trình sau $(a + f(x))(b + c^{f(x)}) = d \cdot c^{f(x)}$ ”.

Ví dụ 6:[2]

$$\text{Giải phương trình } \log_2(x + 1) + \log_3(2x + 1) - 2x = 0.$$

Giải:

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x+1 > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

Xét hàm số $f(x) = \log_2(x+1) + \log_3(2x+1) - 2x$ liên tục và khả vi trên $[-\frac{1}{2}, +\infty)$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 2} + \frac{2}{(2x+1)\ln 3} - 2$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2 \ln 2} - \frac{4}{(2x+1)^2 \ln 3} < 0, \quad x > -\frac{1}{2}$$

Theo định lý Rolle thì $f(x)$ có không quá 2 nghiệm

Dễ thấy rằng $x = 0$ và $x = 1$ là 2 nghiệm của $f(x)$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$.

➤ **Tổng quát:** Ví dụ trên có thể tổng quát lên như sau:

$$\text{“ Giải phương trình } \sum_{i=1}^n \log_{i+1}(ix+1) = nx \text{ ”.}$$

Cách giải tương tự như ví dụ trên.

Ví dụ 7:[3]

$$\text{Giải phương trình } 3^x + 3^{x^2} = 2^x + 4^{x^2}$$

Giải:

Điều kiện cần:

$$\text{Giả sử } y \text{ là nghiệm của phương trình đã cho } \Rightarrow 3^{y^2} - 2^y = 4^{y^2} - 3^y.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = (t+1)^{y^2} - t^y \text{ với } t > 1.$$

Ta có $f(t)$ liên tục, khả vi trên $[1, +\infty)$

Do y là nghiệm của phương trình nên $f(2) = f(3)$.

Theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (2, 3)$ sao cho $f'(c) = 0$

$$\Leftrightarrow y(c+1)^{y^2-1} - c^{y-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow y(c+1)^{y^2-1} = c^{y-1}$$

$$\Leftrightarrow y(c+1)^{y^2-1} = c^{y-1} \quad (*)$$

Ta giải (*):

$$\text{Với } y > 1, \text{ ta có } y(c+1)^{y^2-1} > (c+1)^{y^2-1} > c^{y^2-1} > c^{y-1}$$

$$0 < y < 1, \text{ ta có } y(c+1)^{y^2-1} < (c+1)^{y^2-1} < c^{y^2-1} < c^{y-1}$$

$$0 = y, \text{ ta có } y(c+1)^{y^2-1} = 0 < c^{y-1}$$

$$1 = y, \text{ ta có } y(c+1)^{y^2-1} = 1 = c^{y-1}$$

Vậy chỉ có $y = 1$ thỏa (*)

Điều kiện đủ:

Để thấy $x = 0$ và $x = 1$ là 2 nghiệm của phương trình đã cho.
 Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$.

🔑 Tổng quát:

“Giải phương trình $a^{[f(x)]^2} + b^{f(x)} = c^{f(x)} + d^{[f(x)]^2}$ với $a + b = c + d$ và $f(x)$ là hàm số xác định trên $\mathbf{R}$ ”.

Kết hợp ví dụ 4 và ví dụ trên sẽ giải được bài toán này.

Ví dụ 8:[2]

Giải phương trình $3^x = 1 + x + \log_3(1 + 2x)$ (1)

Giải:

ĐK: $x > -\frac{1}{2}$.

$$(1) \Leftrightarrow 3^x + x = 1 + 2x + \log_3(1 + 2x) \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_3 t$, $t > 0$ là hàm đồng biến.

Khi đó (2) được viết lại $f(3^x) = f(2x + 1)$

$$\Leftrightarrow 3^x = 2x + 1 \Leftrightarrow 3^x - 2x - 1 = 0 \quad (3)$$

Giải (3):

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Bernulli, dễ dàng suy ra phương trình có 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$.

Cách 2: Xét hàm số $g(x) = 3^x - 2x - 1$ là hàm liên tục và khả vi trên $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Mặt khác $g'(x) = 3^x \ln 3 - 2$, $g''(x) = 3^x \ln^2 3 > 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Theo định lý Rolle suy ra $g(x)$ có không quá 2 nghiệm trên $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Nhận thấy rằng $x = 0, x = 1$ là 2 nghiệm của $g(x)$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$.

* Nhận xét:

Ví dụ trên có thể giải bằng cách áp dụng tính chất của hàm số ngược (đã được trình bày ở chương trước). Thông qua việc giải ví dụ trên, ta có thể giải phương trình tổng quát sau:

$$s^{ax+b} = c \log_s(dx + e) + ax + b \text{ trong đó } d = ac + a, e = bc + b.$$

III. Bài tập đề nghị:

1.[2]

Giả sử $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0$. Chứng minh rằng phương trình

$$a \cdot \log_2^2 x + b \cdot \log_2 x + c = 0$$

luôn có nghiệm thuộc khoảng (1,2).

2.[3]

Cho $a, b, c \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^*$ sao cho $c = -\frac{6(3a+2b)}{5(n+2)}$. Chứng minh rằng phương trình

$3a.\sin^n x + 2b.\cos^n x + c.\cos x = 0$ có nghiệm thuộc $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$.

3.[6]

Tồn tại hay không các số thực a, b, c để phương trình sau có 4 nghiệm thực phân biệt:

$$x + \frac{5}{6} = a.e^{3x} + b.e^{2x} + c.e^x - \frac{1}{4}e^{-x}.$$

4.[2]

Giải các phương trình

a. $2^{x^2-x} + 12^{x^2-x} = 2.7^{x^2-x}$

b. $2^{x^2+1} = 3^{x^2} + 1$

5.[2]

Giải các phương trình sau:

a. $2009^{\sin x} - 2008^{\sin x} = \sin x$

b. $(1 + \sin x)(2 + 4^{\sin x}) = 3.4^{\sin x}$

6.[2]

Giải phương trình $x = 2^{\frac{x^2-1}{3}}$

7.[2]

Giải phương trình $3^{x+1} - 2x.3^x = 3$.

8.[2]

Giải phương trình :

a. $\sum_{i=0}^{n-1} (i+2)^x - \frac{1}{2}n(n+1)x - n = 0$.

b. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)^x} - \frac{nx}{n+1} - n = 0$.

9.[6]

Giải phương trình:

a. $\log_2(\cos x + 1) = 2\cos x$.

b. $\log_2[3\log_2(3x-1)-1] = x$.

c. $2009^x + 2007^x = 4014x + 2$.

10.[3]

Giải phương trình $\log_{2003}(2003^{2|\sin x|} + 4^{|\cos x|} - 4) = 2003^{(2003^{2|\sin x|} + 4^{|\cos x|} - 5)} - 1$.

11.

Giải phương trình $a^{f^2(x)} + b^{f(x)} = a^{f(x)} + d^{f^2(x)}$ với $a + b = c + d$ và $f(x)$ là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

12.

Giải phương trình $(a + f(x))(b + c^{f(x)}) = d \cdot c^{f(x)}$.

Chương 3:

MỘT SỐ ỨNG DỤNG KHÁC CỦA ĐỊNH LÝ LAGRANGE VÀ ROLLE

Trong chương này, chúng tôi sẽ giới thiệu sơ qua với các bạn một số ứng dụng khác của định lý Lagrange và định lý Rolle.

I. Ứng dụng giải bất phương trình:

Phương pháp:

Trước hết ta tìm nghiệm của $f(x) = 0$ trên D . Quá trình tìm nghiệm này có thể vận dụng định lý Lagrange và hệ quả của định lý.

Giả sử nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trên D là $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \in \mathbb{N}$) và giả sử $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Dựa vào tính liên tục của $f(x)$ trên D để suy ra dấu của $f(x)$ trên khoảng, đoạn, nửa khoảng, nửa đoạn mà $f(x)$ không có nghiệm. Bằng cách kiểm tra dấu của $f(x)$ tại điểm cụ thể nào đó trong khoảng, đoạn, nửa khoảng, nửa đoạn kể trên. Nếu tại một điểm mà $f(x)$ có dấu dương (hay âm) thì trên toàn bộ khoảng, đoạn, nửa khoảng, nửa đoạn tương ứng $f(x)$ có dấu là dương (hay âm).

Ví dụ :

Giải bất phương trình $3^x + 5^x < 6x + 2$ (1)
--

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow 3^x + 5^x - 6x - 2 < 0.$$

Xét hàm số $f(x) = 3^x + 5^x - 6x - 2$ với $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3^x \ln 3 + 5^x \ln 5 - 6$

$$f''(x) = 3^x \ln^2 3 + 5^x \ln^2 5 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Theo định lý Rolle, phương trình $f(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm.

Dễ thấy $x = 0$ và $x = 1$ là 2 nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$.

Mặt khác, $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$.

Và trên mỗi khoảng này $f(x)$ giữ nguyên 1 dấu.

$$\text{Ta lại có } f(-1) = \frac{68}{15} > 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + \sqrt{5} - 5 < 0$$

$$f(2) = 20 > 0.$$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
f(x)	+	0	-	0	+

Kết luận: Nghiệm của (1) là $\forall x \in (0, 1)$.

Nhận xét: Qua ví dụ trên, ta thấy rằng việc giải bất phương trình bằng việc sử dụng định lý Lagrange và hệ quả của nó cũng liên quan mật thiết đến việc giải phương trình bằng phương pháp này. Như vậy chỉ việc thay đổi dấu “=” bằng dấu “ $\geq$ ”, “ $\leq$ ”, “ $>$ ”, “ $<$ ”, ta sẽ có được những bài toán giải bất phương trình và ngược lại.

II. Ứng dụng giải hệ phương trình:

Lớp bài toán này xuất phát từ bổ đề sau:

“Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) và $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Khi đó nếu $f(x) = f(y)$ với $x, y \in [a, b]$ thì $x = y$ ”.

Phương pháp:

Giả sử ta cần giải hệ $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$ (I), trong đó $x,y \in D \subset \mathbb{R}$.

Giả sử bằng các phép biến đổi tương đương hay biến đổi hệ quả, ta dẫn tới 1 phương trình nào đó có dạng $f(x) = f(y)$, trong đó $f(x)$ là một hàm số xác định, liên tục trên $[a,b]$, khả vi trên (a,b) và thỏa mãn $f'(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a,b)$. Khi đó theo bổ đề trên ta suy ra $x = y$.

Do vậy (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \\ x=y \end{cases}$ (II) thì việc giải hệ (II) có thể thực hiện dễ dàng.

Ví dụ:

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} -|x| + 3|y| = \log_3 \frac{1-|y|}{1+|y|} \\ -|y| + 3|x| = \log_3 \frac{1-|x|}{1+|x|} \end{cases} \quad (I)$$

Giải:

Đặt $|x| = a, |y| = b, 0 \leq a, b < 1$.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 3b = \log_3 \frac{1-b}{1+b} & (1) \\ -b + 3a = \log_3 \frac{1-a}{1+a} & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) – (2) ta được $\log_3 \frac{1-a}{1+a} - 4a = \log_3 \frac{1-b}{1+b} - 4b$.

Xét hàm số $f(t) = \log_3 \frac{1-t}{1+t} - 4t$ với $t \in [0,1]$.

Ta có $f'(t) = -\frac{1+t}{1-t} \cdot \frac{1}{(1+t)^2} \cdot \frac{2}{\ln 3} - 4 = 0, \forall t \in (0,1)$.

Theo bổ đề $\Rightarrow a = b$.

$$\text{Do đó (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 2a = \log_3 \frac{1-a}{1+a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ (1+a) + \log_3(1+a) = (1-a) + \log_3(1-a) \end{cases} \quad (II)$$

Xét hàm số $g(t) = t + \log_3 t$ với $t > 0$.

Ta có $g'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 3} > 0 \quad \forall t > 0$.

$$\text{Theo bổ đề, ta có (II)} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 1+a = 1-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ (I) là $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$.

III. Ứng dụng chứng minh bất đẳng thức:

Phương pháp:

Giả sử bất đẳng thức $A \geq 0$ (I) (hoặc $A \leq 0$) nào đó cần chứng minh mà các đại lượng tham gia vào bất đẳng thức (I) cần được đánh giá có liên quan đến các giá trị $f(a), f(b), f(c), \dots$ của một hàm số $f(x)$ nào đó xác định, khả vi trên tập $D \subset \mathbb{R}$, trong đó $a, b, c, \dots \in D$ và các đoạn $[a, b], [b, c], [a, c], \dots$ bao hàm trong D .

Khi đó, theo định lý Lagrange tồn tại $c_1 \in [a, b], c_2 \in [b, c], c_3 \in [c, a], \dots$ để $f'(c_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, f'(c_2) = \frac{f(c) - f(b)}{c - b}, f'(c_3) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}, \dots$ Nhờ biểu diễn này ta chuyển việc đánh giá $f(a), f(b), f(c), \dots$ về đánh giá $f'(c_1), f'(c_2), f'(c_3), \dots$ thường đơn giản hơn so với $f(a), f(b), f(c), \dots$.

Ví dụ:

Cho hàm số $f(x)$ xác định liên tục trên $[\alpha, \beta]$, khả vi trên $(\alpha, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$, và $f'(x)$ đồng biến trên (α, β) . Chứng minh rằng $\forall a, b, c \in [\alpha, \beta], a \geq b \geq c$ ta có $f(a)(b-c) + f(b)(c-a) + f(c)(a-b) \geq 0$

Giải:

Bất đẳng thức (1) sẽ hiển nhiên trở thành đẳng thức nếu trong 3 số a, b, c có 2 số bằng nhau. Do vậy, không giảm tính tổng quát ta giả sử $a > b > c$ và $a, b, c \in [\alpha, \beta]$.

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow f(a)(b-c) + f(b)[(c-b)+(b-a)] + f(c)(a-b) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow [f(a) - f(b)](b-c) \geq [f(b) - f(c)](a-b) \\ &\Leftrightarrow \frac{f(a) - f(b)}{a-b} \geq \frac{f(b) - f(c)}{b-c} \quad (2) \text{ (do } a > b > c). \end{aligned}$$

Bất đẳng thức (2) gợi ý cho ta dùng định lý Lagrange.

Thật vậy, áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f(x)$ trên $[c, b]$ và $[b, a]$ thì tồn tại $t_1 \in (c, b)$ và $t_2 \in (b, a)$ để $f'(t_1) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}, f'(t_2) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$.

Hiển nhiên $t_1 < t_2$ và theo giả thiết bài toán ta có $f'(t_2) > f'(t_1)$. Do đó (2) được chứng minh $\Rightarrow$ (1) được chứng minh.

Nhận xét:

- + Nếu $f(x)$ nghịch biến thì bất đẳng thức đổi chiều.
- + Nếu ta chọn $f(x)$ và các giá trị a, b, c thích hợp thì ta được các bất đẳng thức mà việc chứng minh bằng phương pháp đại số không đơn giản.

IV. Bài tập đề nghị:

1. Giải bất phương trình sau:

a) $3^x + 5^x \geq 2 \cdot 4^x$

b) $3^{x^2-2x} + 3^{(x^2-2x)^2} > 4^{(x^2-2x)^2} + 2^{x^2-2x}$

c) $x^\alpha \geq \alpha x + 1 - \alpha$ với $x > 0$, α là tham số dương.

2. Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} \log_2(1+3\cos x) = \log_3(\sin y) + 2 \\ \log_2(1+3\cos y) = \log_3(\sin x) + 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} e^{x-y} = \frac{\sin x}{\sin y} \\ 10\sqrt{x^6+1} = 3(y^4+2) \\ \pi < x, y < \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

3. Chứng minh rằng:

a) $\sin x > \frac{2x}{\pi} \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

b) $\sin x \leq \frac{4x}{\pi} - \frac{4x^2}{\pi^2} \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Cho a, b, c, r, s thỏa $a > b > c > 0$, $r > s > 0$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$a^r \cdot b^s + b^r \cdot c^s + c^r \cdot a^s > a^s \cdot b^r + b^s \cdot c^r + c^s \cdot a^r$$

5. Cho a, b, c, d là 4 số dương bất kì. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}}$$

6. Chứng minh rằng nếu $0 < b < a$ thì $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$.

7. Cho $0 \leq p < q < r < t \leq \pi$. Chứng minh rằng $\frac{\sin p - \sin q}{p - q} \geq \frac{\sin r - \sin t}{r - t}$.

8. Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}} \leq a + b + c + d$.

9. Biết rằng phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (*) có 3 nghiệm phân biệt ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Chứng minh rằng $|27c + 2a^3 - 9ab| < 2\sqrt{(a^2 - 3b)^3}$.

10. Cho đa thức $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1, n}$ ($n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$) có n nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng $a_{k-1}a_{k+1} < a_k^2$, $\forall k = \overline{1, n-1}$.

11. Chứng minh rằng $\forall n > 0$ ta có $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ bằng phương pháp sử dụng định lý Lagrange.

KẾT LUẬN CHUNG

Đề tài của chúng tôi đã giới thiệu đến các bạn hai phương pháp giải phương trình, đó là áp dụng tính chất của hàm số ngược và định lý Lagrange, định lý Rolle. Đồng thời đề tài cũng giới thiệu sơ qua một số ứng dụng khác của định lý Lagrange và định lý Rolle. Chúng tôi đã trình bày cụ thể phương pháp, ví dụ minh họa và tổng quát một số bài toán. Từ dạng tổng quát này, các bạn có thể cho cụ thể hàm hoặc số thích hợp sẽ có được những bài tập khá thú vị.

Tuy nhiên, vì kiến thức còn hạn chế nên đề tài không thể tránh khỏi sai sót. Rất mong nhận được sự nhận xét, đóng góp của bạn đọc về nội dung đề tài.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Đậu Thế Cấp (chủ biên), *Toán nâng cao giải tích hàm số 12*, NXB Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, 2000.
- [2] Lê Hồng Đức (chủ biên), *Phương pháp giải toán đại số - Tập 4*.
- [3] Tạ Minh Đức, *Ứng dụng định lý Lagrange vào giải toán THPT*.
- [4] Phạm Phú – Hàn Hải Liên – Ngô Long Hậu, *Sổ tay tự ôn và luyện thi Đại học – Cao đẳng đại số*, NXB Đại học Sư phạm, 2003.
- [5] Trần Phương – Lê Hồng Đức, *Tuyển tập các chuyên đề thi đại học môn Toán: Đại số sơ cấp*, NXB Hà Nội, 2004.
- [6] Nguyễn Bá Thủy, *Định lý Rolle và ứng dụng*.
- [7] *Tuyển tập 45 năm toán học tuổi trẻ*.

[8] Các trang web:

- <http://www.diendantoanhoc>
- <http://kinhhoa.violet.vn>
- <http://www.maths.com>
- <http://www.vnmath.com>