

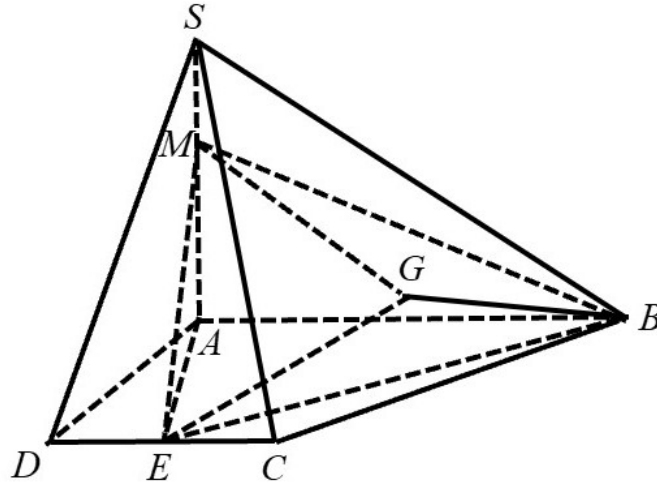
Chủ đề 5 - Khối đa diện - Mức độ vận dụng cao - File word có lời giải.docx

Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D . Biết $AB = 4a, AD = CD = 2a$. Cạnh bên $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC , M là điểm sao cho $\vec{MA} = -2\vec{MS}$ và E là trung điểm cạnh CD (tham khảo hình vẽ). Tính thể tích V của khối đa diện $MGABE$.



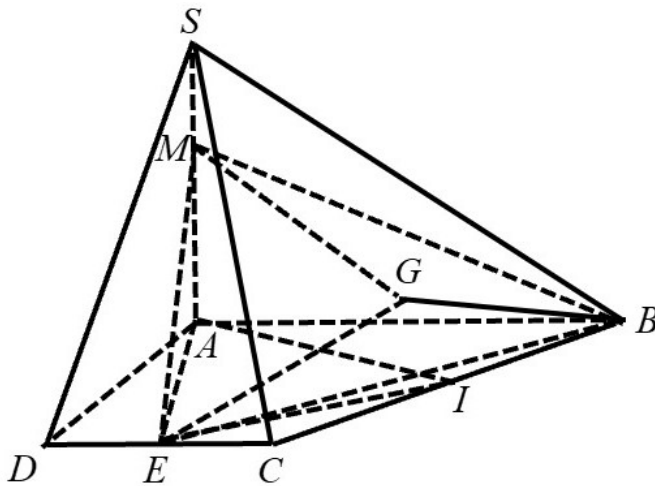
A. $\frac{27a^3}{8}$.

*B. $\frac{10a^3}{3}$.

C. $\frac{13a^3}{4}$.

D. $\frac{25a^3}{9}$.

Lời giải



Ta có $V_{MGABE} = V_{GABE} + V_{GABM} + V_{GAEM}$.

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 4a = 4a^2 \Rightarrow V_{GABE} = \frac{1}{3} V_{SABE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} S_{ABE} \cdot SA = \frac{1}{9} \cdot 4a^2 \cdot 3a = \frac{4a^3}{3}$$

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot 2a = 4a^2 \Rightarrow V_{GABM} = \frac{1}{3} V_{CABM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} S_{ABM} \cdot DA = \frac{1}{9} \cdot 4a^2 \cdot 2a = \frac{8a^3}{9}$$

Gọi I là trung điểm của BC .

$$AE = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}; \quad EI = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{16a^2 + 4a^2}}{2} = a\sqrt{5}$$

$$AI^2 = \frac{AC^2 + AB^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{8a^2 + 16a^2}{2} - \frac{8a^2}{4} = 10a^2 \Rightarrow AI = a\sqrt{10}$$

Dựng $EH \perp AI \Rightarrow H$ là trung điểm của AI .

$$EH = \sqrt{5a^2 - \left(\frac{a\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}; S_{AEI} = \frac{1}{2}EH \cdot AI = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{2} \cdot a\sqrt{10} = \frac{5}{2}a^2$$

$$V_{GAEM} = \frac{2}{3}V_{LAEM} = \frac{2}{3}V_{MAEI} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}S_{AEI} \cdot MA = \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{2}a^2 \cdot 2a = \frac{10a^3}{9}$$

$$\text{Vậy } V_{MGABE} = \frac{4a^3}{3} + \frac{8a^3}{9} + \frac{10a^3}{9} = \frac{10a^3}{3}$$

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. E là điểm trên cạnh AD sao cho BE vuông góc với AC tại H và $AB > AE$, cạnh SH vuông góc với mặt phẳng đáy, góc $\angle BSH = 45^\circ$. Biết $AH = \frac{2a}{\sqrt{5}}$, $BE = a\sqrt{5}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

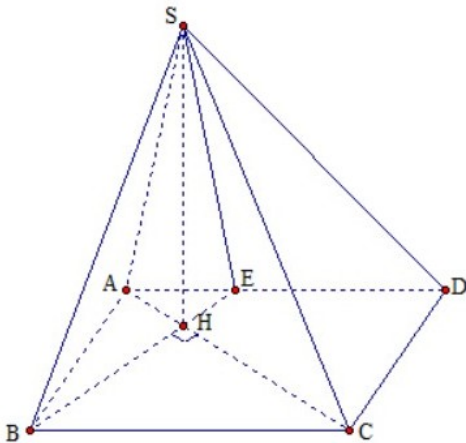
A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{15}$

*B. $\frac{16a^3}{3\sqrt{5}}$

C. $\frac{32a^3}{\sqrt{5}}$

D. $\frac{8a^3\sqrt{5}}{5}$

Lời giải



Đặt $AE = x$, $AB = y$ ($y > x$).

Tam giác ABE vuông tại A , có đường cao AH . Áp dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$+) \begin{cases} BE^2 = AE^2 + AB^2 \\ \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AB^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2 = x^2 + y^2 \\ \frac{5}{4a^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5a^2 \\ xy = 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3a \\ xy = 2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 2a \end{cases}$$

$$+) BH = \frac{AB^2}{BE} = \frac{4a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}a}{5} \Rightarrow EH = BE - BH = a\sqrt{5} - \frac{4\sqrt{5}a}{5} = \frac{\sqrt{5}a}{5}$$

Tam giác SHB vuông cân tại H (có $\angle BSH = 45^\circ$), suy ra: $SH = \frac{4\sqrt{5}a}{5}$

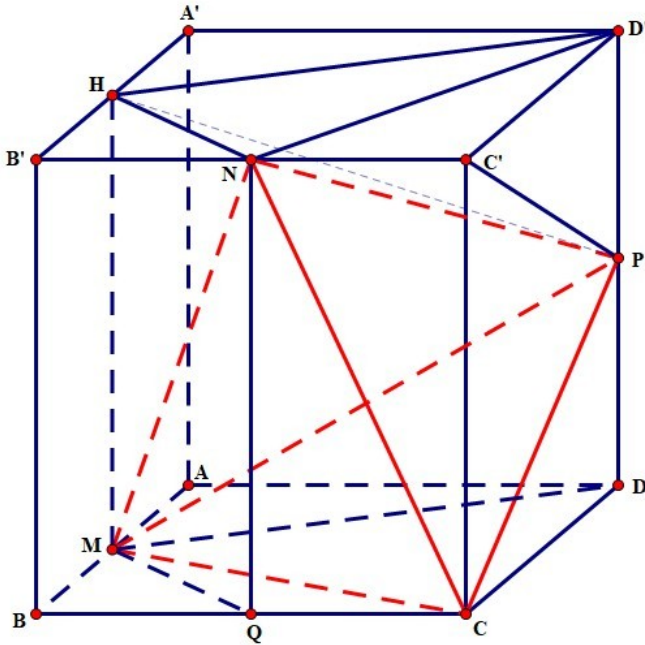
$$+) \frac{BC}{EA} = \frac{BH}{EH} = 4 \Rightarrow BC = 4a$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot SH \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{6} \cdot \frac{4\sqrt{5}a}{5} \cdot 2a \cdot 4a = \frac{16\sqrt{5}a^3}{15}$$

Câu 3. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $AB, B'C', DD'$. Gọi thể tích khối tứ diện $CMNP$ là V' , khi đó tỉ số $\frac{V'}{V}$ bằng

A. $\frac{1}{16}$. *B. $\frac{3}{16}$. C. $\frac{1}{64}$. D. $\frac{3}{64}$.

Lời giải



Ta có: $V = V' + V_{B'HN.BMQ} + V_{A'HD'.AMD} + V_{N.MQC} + V_{P.NCC'} + V_{P.D'CN} + V_{P.D'HN} + V_{P.HNM} + V_{P.MDC}$.

Gọi S là diện tích đáy và h là chiều cao khối hộp.

Xét: $V_{B'HN.BMQ} = \frac{1}{8}Sh$, $V_{A'HD'.AMD} = \frac{1}{4}Sh$, $V_{N.MQC} = \frac{1}{24}Sh$, $V_{P.NCC'} = \frac{1}{12}Sh$, $V_{P.D'CN} = \frac{1}{24}Sh$, $V_{P.D'HN} = \frac{1}{16}Sh$,

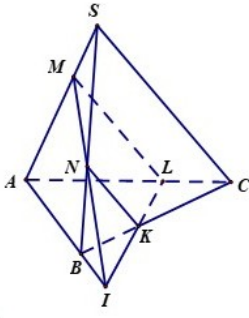
$V_{P.HNM} = V_{D'.HNM} = V_{M.HND'} = \frac{1}{8}Sh$, $V_{P.MDC} = \frac{1}{12}Sh$.

Suy ra: $V = V' + \frac{13}{16}V \Leftrightarrow V' = \frac{3}{16}V \Leftrightarrow \frac{V'}{V} = \frac{3}{16}$.

Câu 4. Cho tứ diện $SABC$ và hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SB sao cho $\frac{SM}{AM} = \frac{1}{2}$, $\frac{SN}{BN} = \frac{1}{2}$. Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm M, N và song song với cạnh SC cắt AC, BC lần lượt tại L, K . Gọi V, V' lần lượt là thể tích các khối đa diện $SCMNKL, SABC$. Tỉ số $\frac{V}{V'}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. *B. $\frac{4}{9}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải



Gọi I là giao điểm của AB, MN, KL .

Do $ML \parallel SC$ và $NK \parallel SC$ nên ta có $\frac{AM}{AS} = \frac{AL}{AC} = \frac{2}{3}$ và $\frac{BN}{BS} = \frac{BK}{BC} = \frac{1}{3}$.

Ta có $\frac{MA}{MS} \cdot \frac{NS}{NB} \cdot \frac{IB}{IA} = 1$ suy ra $\frac{IB}{IA} = \frac{1}{4}$.

Ta có $\frac{CL}{CA} \cdot \frac{BA}{BI} \cdot \frac{KI}{KL} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{KI}{KL} = 1 \Leftrightarrow KL = KI$ suy ra $\Rightarrow MN = NI$ hay $\frac{IN}{IM} = \frac{IK}{IL} = \frac{1}{2}$.

Xét hình chóp $IAML$ ta có $\frac{V_{I.BNK}}{V_{I.AML}} = \frac{IB \cdot IN \cdot IK}{IA \cdot IM \cdot IL} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.

Mặt khác ta có $V_{IAML} = \frac{1}{3} d(I; (AML)) \cdot S_{\triangle AML} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} d(B; (AML)) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} S_{\triangle SAC} = \frac{16}{27} V_{SABC}$.

Suy ra $\frac{V_{I.BNK}}{V_{SABC}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{16}{27} = \frac{1}{27}$. Suy ra $V_{I.BNK} = \frac{1}{27} V' \Rightarrow V_{BNK.AML} = \frac{16}{27} V' - \frac{1}{27} V' = \frac{5}{9} V'$.

Ta có $V_{SCMKNL} = V' - V_{BNK.AML} = V' - \frac{5}{9} V' = \frac{4}{9} V'$.

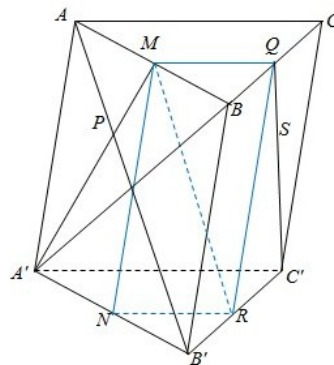
Từ đó ta có $\frac{V}{V'} = \frac{4}{9}$.

Câu 5. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, Q, R lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, A'B', BC, B'C'$ và P, S lần lượt là trọng tâm của các tam giác $AA'B, CC'B$. Tỉ số thể tích khối đa diện $MNRQPS$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $\frac{1}{9}$. *B. $\frac{5}{54}$. C. $\frac{1}{10}$. D. $\frac{2}{27}$.

Lời giải

(*) Cách 1:



• Đặt: $V = V_{ABC.A'B'C'}$; $V_{B'.AA'C'C} = \frac{1}{3} S_{AA'C'C} \cdot d(B', (AA'C'C)) = \frac{2}{3} V$

$$V_{B'MNRQ} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNRQ} \cdot d(B', (MNRQ)) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} S_{AA'C'C} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} d(B', (AA'C'C)) \right)$$

$$= \left(\frac{1}{3} \cdot S_{AA'C'C} \cdot d(B', (AA'C'C)) \right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} V = \frac{1}{6} V$$

$$V_{P.MNRQ} = \frac{1}{3} \cdot V_{A'MNRQ} = \frac{1}{3} \cdot V_{B'MNRQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} V = \frac{1}{18} V$$

$$\bullet V_{A.BB'C'C} = \frac{1}{3} S_{BB'C'C} \cdot d(A, (BB'C'C)) = \frac{2}{3} V$$

$$S_{\triangle QRC'} = \frac{1}{2} S_{QRC'C} = \frac{1}{4} S_{BB'C'C}; \quad S_{\triangle QRS} = \frac{1}{3} S_{QRC'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} S_{BB'C'C} = \frac{1}{12} S_{BB'C'C}$$

$$V_{A.QRS} = \frac{1}{3} S_{\triangle QRS} \cdot d(A, (QRS)) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{12} S_{BB'C'C} \right) \cdot (d(A, (BB'C'C)))$$

$$= \left(\frac{1}{3} \cdot S_{BB'C'C} \cdot d(A, (BB'C'C)) \right) \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{3} V = \frac{1}{18} V$$

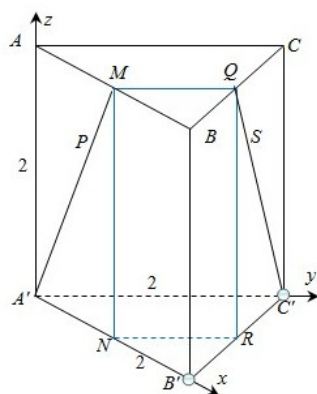
$$V_{P.QRS} = \frac{PB'}{AB'} \cdot V_{A.QRS} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{18} V = \frac{1}{27} V$$

$$\bullet V_{MNRQPS} = V_{P.MNRQ} + V_{P.QRS} = \frac{1}{18} V + \frac{1}{27} V = \frac{5}{54} V$$

$$\frac{V_{MNRQPS}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{5}{54}$$

Vậy: $V_{ABC.A'B'C'}$

(*) Cách 2:



• Chuẩn hóa lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng có đáy $\triangle ABC$ vuông tại A và các cạnh

$$AB = AC = AA' = 2. \text{ Khi đó: } V_{ABC.A'B'C'} = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \right) \cdot 2 = 4$$

Đặt khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $A' \equiv O$ và B', C', A lần lượt nằm trên chiều dương của các trục Ox, Oy, Oz (như hình vẽ).

$$A'(0;0;0) \quad B'(2;0;0) \quad C'(0;2;0) \quad A(0;0;2) \quad B(2;0;2) \quad C(0;2;2)$$

$$M(1;0;2) \quad N(1;0;0) \quad R(1;1;0) \quad Q(1;1;2) \quad P\left(\frac{2}{3};0;\frac{4}{3}\right) \quad \overline{SC'} = -2\overline{SQ} \Rightarrow S = \left(\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$$

$$\overline{PM} = \left(\frac{1}{3};0;\frac{2}{3}\right) \quad \overline{PR} = \left(\frac{1}{3};1;-\frac{4}{3}\right) \quad \overline{PQ} = \left(\frac{1}{3};1;\frac{2}{3}\right) \quad \overline{PS} = \left(0;\frac{4}{3};0\right)$$

$$V_{P.MQR} = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{vmatrix} \overline{PM} & \overline{PQ} \\ \overline{PR} & \overline{PS} \end{vmatrix} \right| \cdot \overline{PR} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}; \quad V_{P.MQRN} = 2 \cdot V_{P.MQR} = \frac{2}{9}$$

$$V_{P.QRS} = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{bmatrix} \overrightarrow{PR}; \overrightarrow{PQ} \end{bmatrix} \right| \cdot \overrightarrow{PS} = \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{9} = \frac{4}{27}$$

$$V_{MNRQPS} = V_{P.MQRN} + V_{P.QRS} = \frac{2}{9} + \frac{4}{27} = \frac{10}{27}$$

$$\text{Vậy: } \frac{V_{MNRQPS}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{\frac{10}{27}}{\frac{5}{4}} = \frac{40}{27}$$

Câu 6. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = CB = 2, AC = 1$. Một mặt phẳng (P) cắt các đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt tại M, N, P sao cho tam giác MNP đều. Gọi φ là góc tạo bởi mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC) , khi đó

A. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}$

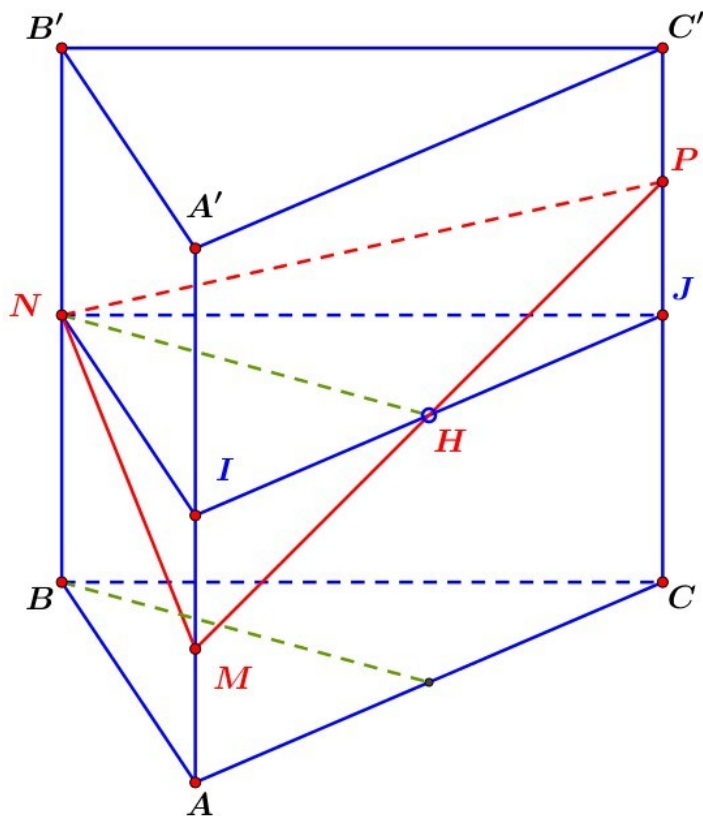
*C. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{10}}{5}$

Lời giải

Ta có: $AB = CB = 2, AC = 1 \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại $B \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot d(B; (AC)) \cdot AC = \frac{\sqrt{15}}{4}$

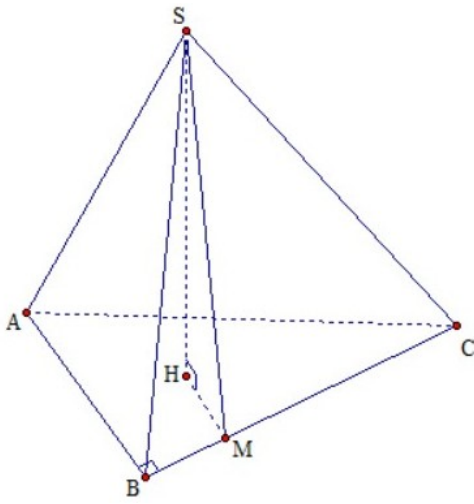
Ta có: Mặt phẳng (P) cắt các đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt tại M, N, P ; Gọi mặt phẳng (α) qua N song song với mặt đáy cắt AA', CC' lần lượt tại I, J ; Gọi H là giao điểm của IJ và MP thì H là trung điểm của IJ và MP .



Ta đặt: $MN = x > 0 \Rightarrow IM = \sqrt{x^2 - 4} = PJ$, $MH = \sqrt{IM^2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{x^2 - \frac{15}{4}}$

Mà H là trung điểm IJ nên H cũng là trung điểm $MP \Rightarrow MP = 2MH = \sqrt{4x^2 - 15}$

Do đề cho tam giác MNP đều nên ta có phương trình: $MP = MN \Leftrightarrow x = \sqrt{4x^2 - 15} \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$



Ta có $AC^2 = 25a^2 = 9a^2 + 16a^2 = AB^2 + BC^2$, vậy tam giác ABC vuông tại B .

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) . Vì các mặt bên tạo với đáy góc 60° suy ra: $d(H; AC) = d(H; BC) = d(H; AB)$ và H thuộc miền trong của tam giác ABC nên H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Từ H kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại M , suy ra:
$$\begin{cases} BC \perp HM \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHM) \Rightarrow BC \perp SM$$

Suy ra: $\angle SMH = (\angle SBC; (ABC)) = 60^\circ$

Đoạn HM là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC , suy ra:

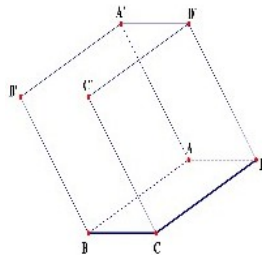
$$HM = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{AB \cdot BC}{AB + BC + CA} = \frac{3a \cdot 4a}{3a + 4a + 5a} = \frac{12a^2}{12a} = a$$

$$SH = HM \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{6} AB \cdot BC \cdot SH = \frac{1}{6} \cdot 3a \cdot 4a \cdot a\sqrt{3} = 2a^3\sqrt{3}$$

Vậy

Câu 9. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ đáy là hình bình hành. Với $AC = BC = a$, $CD = a\sqrt{2}$, $AC' = a\sqrt{3}$, $\angle A'B' = \angle D'C = 90^\circ$. Thể tích khối tứ diện $BCDA'$ là



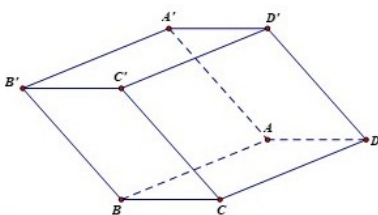
*A. $\frac{a^3}{6}$

B. a^3

C. $\frac{2a^3}{3}$

D. $\sqrt{6}a^3$

Lời giải



Ta có tam giác ABC vuông cân tại C

Gọi O là trung điểm của $AC' \Rightarrow OC' = OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Gọi H là chân đường cao hạ từ C' xuống mặt $(A'B'C'D')$.

Ta có: $\begin{cases} A'D' \perp CH \\ A'D' \perp D'C \end{cases} \Rightarrow A'D' \perp HD'$

Lại có: $\begin{cases} A'B' \perp A'C \\ A'B' \perp CH \end{cases} \Rightarrow A'B' \perp A'H$

Ta có: $A'H \perp A'B' \Rightarrow \angle HA'B' = 90^\circ; A'D'H = 90^\circ$. Tam giác $A'D'H$ vuông cân tại D'

Giả sử $CH = x \Rightarrow CA' = \sqrt{x^2 + 2a^2}$

$$CC'^2 = x^2 + a^2$$

$$C'O = \frac{CC'^2 + C'A'^2}{2} - \frac{CA'^2}{4} \Leftrightarrow \frac{3a^2}{4} = \frac{x^2 + a^2 + a^2}{2} - \frac{x^2 + 2a^2}{4} = \frac{x^2 + 2a^2}{4}$$

$$x^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow x = a = CH$$

$$V_{BCD.A'} = \frac{1}{6} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{6} \cdot CH \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3}{6}$$

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều có cạnh $\sqrt{6}$. Biết rằng các mặt bên của hình chóp có diện tích bằng nhau và một trong các cạnh bên bằng $3\sqrt{2}$. Tính thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.ABC$.

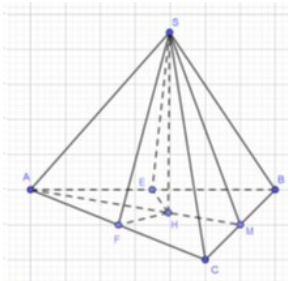
A. 4.

*B. 3.

C. $2\sqrt{2}$.

D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên $mp(ABC)$. E, F, M lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên AB, AC, BC khi đó ta có $AB \perp SE, AC \perp SF, BC \perp SM$.

Vì $S_{SAB} = S_{SAC} = S_{SBC}$, $AB = AC = BC = \sqrt{6}$ suy ra $SE = SF = SM$

$\Rightarrow V_{SHE} = V_{SHF} = V_{SHM} \Rightarrow HE = HF = HM$ nên H là tâm đường tròn nội tiếp hoặc H là tâm đường tròn bàng tiếp góc A hoặc B , hoặc C của $\triangle ABC$.

TH1: H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Do $\triangle ABC$ đều nên H cũng là trọng tâm $\triangle ABC$ và $S.ABC$ là hình chóp đều.

Ta có $HA = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2}, SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}^2} = 4$ $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{6}^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

TH2: H là tâm đường tròn bàng tiếp ∇ABC . Giả sử H là tâm đường tròn bàng tiếp góc A.

Ta có $HBC = 60^\circ$, $HM = BM \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AH = AM + HM = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$,
 $HB = \frac{BI}{\cos 60^\circ} = \sqrt{6}$. Hình chóp $S.ABC$ có một cạnh bên bằng $3\sqrt{2} \Rightarrow SB = SC = 3\sqrt{2}$ (Vì $SA > AH = 3\sqrt{2}$)

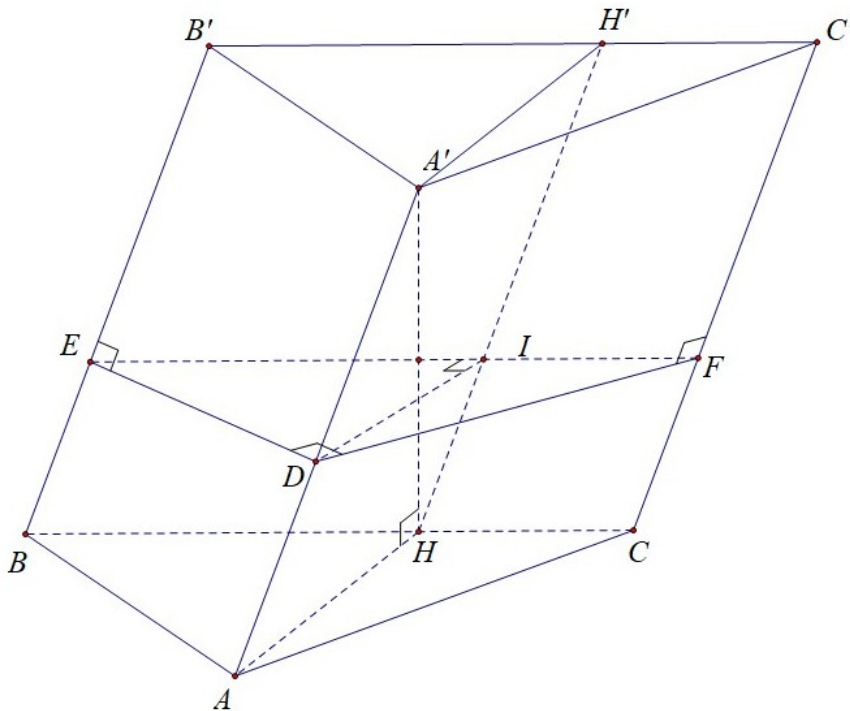
suy ra $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 6} = 2\sqrt{3}$, $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\nabla ABC} = \frac{1}{3} 2\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3$.

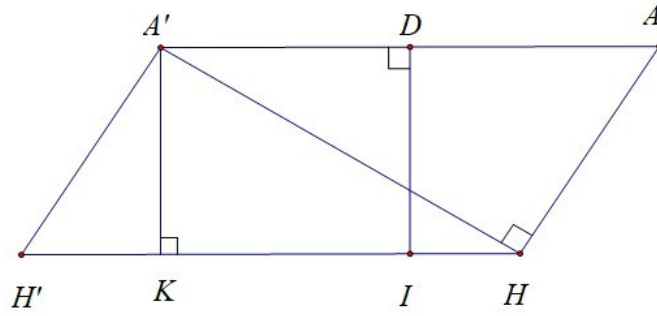
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất bằng 3.

Câu 11. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm của BC . Mặt phẳng (P) vuông góc với các cạnh bên và cắt các cạnh bên của hình lăng trụ lần lượt tại D, E, F . Biết mặt phẳng $(ABBA')$ vuông góc với mặt phẳng $(ACC'A')$ và chu vi của tam giác DEF bằng 4, thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

- *A. $12(10 - 7\sqrt{2})$ B. $4(10 + 7\sqrt{2})$ C. $6(10 - 7\sqrt{2})$ D. $12(10 + 7\sqrt{2})$

Lời giải





Gọi H và H' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Khi đó ta có $\begin{cases} BC \perp A'H \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp AA'$
 $\Rightarrow BC \perp BB', BC \perp CC'$, suy ra $BB'C'C$ là hình chữ nhật.

Vì $E \in BB', F \in CC'$, và $EF \perp BB', EF \perp CC'$ (do $EF \subset (P)$ vuông góc với các cạnh bên của lăng trụ), suy ra $EF \parallel BC$ và $EF = BC = a$ (giả sử cạnh đáy của lăng trụ là a).

Gọi I là trung điểm của $HH' \Rightarrow I$ cũng là trung điểm của EF .

Kẻ $ED \perp AA', D \in AA'$, suy ra $DF \perp AA'$.

Do $(ABB'A') \perp (ACC'A')$ nên suy ra $ED \perp DF$. Hơn nữa dễ thấy $DE = DF$, nên $\triangle DEF$ vuông cân tại D .

$$\text{Suy ra } 2ED^2 = EF^2 = a^2 \Rightarrow ED = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Chu vi } \triangle DEF \text{ bằng } DE + DF + EF = a\sqrt{2} + a = 4 \Rightarrow a = 4(\sqrt{2} - 1)$$

Xét hình bình hành $AA'H'H$, kẻ $A'K \perp HH'$. Ta thấy, $ID \perp AA' \Rightarrow ID \perp HH'$, suy ra $A'K \parallel ID$
 $\Rightarrow A'K = ID = \frac{EF}{2} = \frac{a}{2}$ (do $\triangle DEF$ vuông cân tại D).

Khi đó, ta có diện tích hình bình hành $AA'H'H$ bằng: $A'K \cdot AA' = A'H \cdot AH$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} \cdot AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot A'H \Rightarrow AA' = \sqrt{3}A'H$$

$$\text{Mà } AA'^2 = A'H^2 + AH^2 \Rightarrow 2A'H^2 = AH^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Suy ra } V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Với } a = 4(\sqrt{2} - 1) \text{ thì } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{4(\sqrt{2} - 1)}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{16(\sqrt{2} - 1)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 12(10 - 7\sqrt{2})$$

Câu 12. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B . Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. $\angle SAB = \angle SCB = 90^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị nhỏ nhất bằng

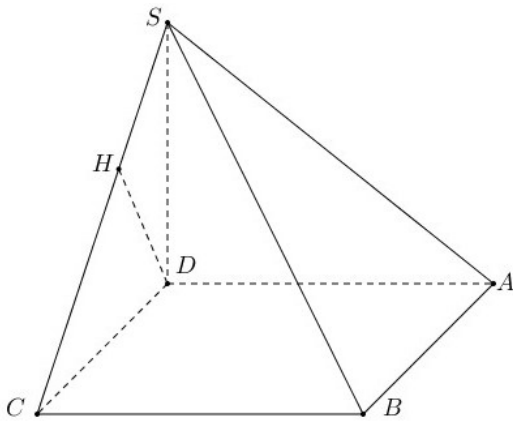
A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$

B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

*C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$

D. $a^3\sqrt{6}$

Lời giải



Dựng điểm D sao cho $ABCD$ là hình vuông.

Ta có $AB \perp SA, AB \perp AD \Rightarrow AB \perp SD$

$BC \perp SC, BC \perp CD \Rightarrow BC \perp SD$

Suy ra $SD \perp (ABCD)$

Vì $AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = d(D, (SBC))$

Kẻ $DH \perp SC \Rightarrow DH \perp (SBC) \Rightarrow d(D, (SBC)) = DH = a\sqrt{2}$

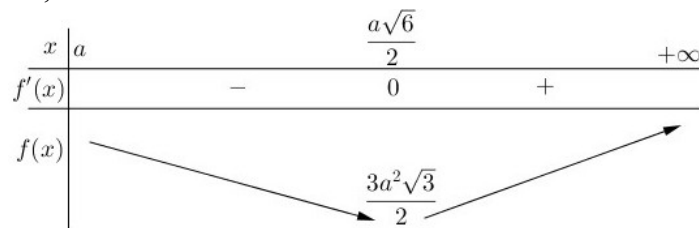
Đặt $AB = x$.

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{DC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SD^2} = \frac{1}{DH^2} - \frac{1}{DC^2} = \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 2a^2}{2a^2x^2} \Rightarrow SD = \frac{ax\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SD \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{ax\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot \frac{1}{2}x^2 = \frac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ với $x > a$.

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 3x^2a^2}{(x^2 - a^2)\sqrt{(x^2 - a^2)}} \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$



Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$, O là trung điểm của AB . Điểm M di động trên cạnh SB . Đặt $\frac{SM}{SB} = x$. Mặt phẳng qua A, M song song với OC , cắt SC tại N . Thể tích khối chóp $ABMN$ lớn nhất khi

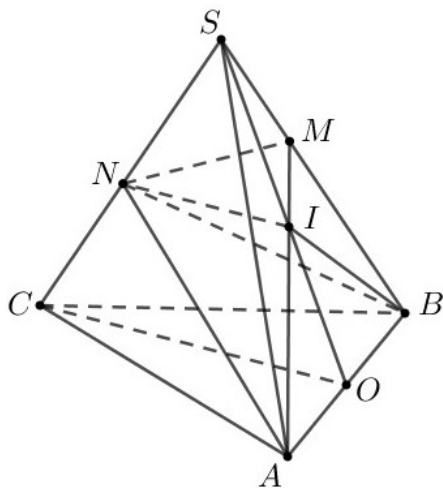
A. $x = \sqrt{3} - 1$.

B. $x = 1$.

C. $x = 3 - \sqrt{5}$.

*D. $x = -1 + \sqrt{2}$.

Lời giải



Trong mặt phẳng (SAB) , gọi I là giao điểm của SO và AM .

Mặt phẳng qua A, M , song song với SO , cắt (SOC) theo giao tuyến là đường thẳng qua I , đường thẳng đó cắt SC tại N .

Áp dụng định lý Menelaus đối với tam giác SOB và bộ ba điểm thẳng hàng A, I, M ta có

$$\frac{SM}{MB} \cdot \frac{BA}{AO} \cdot \frac{OI}{IS} = 1 \Rightarrow \frac{SI}{OI} = \frac{SM}{MB} \cdot \frac{BA}{AO} = \frac{2x}{1-x} \Rightarrow \frac{SN}{CN} = \frac{2x}{1-x} \Rightarrow \frac{NS}{CS} = \frac{2x}{x+1}.$$

Thể tích khối chóp

$$V_{ABMN} = V_{N.ABM} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABM} \cdot d(N, (ABM))$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (1-x) S_{SAB} \cdot \frac{2x}{x+1} d(C, (SAB)) = (1-x) \cdot \frac{2x}{x+1} V_{S.ABC}$$

$$= \left[-2(x+1) - \frac{4}{x+1} + 6 \right] V_{S.ABC} \leq \left[-2\sqrt{2(x+1) \cdot \frac{4}{x+1}} + 6 \right] V_{S.ABC} = (6 - 4\sqrt{2}) V_{S.ABC}$$

Do đó thể tích khối chóp $ABMN$ lớn nhất bằng $(6 - 4\sqrt{2}) V_{S.ABC}$ khi

$$2(x+1) = \frac{4}{x+1} \Rightarrow x+1 = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1$$

Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD . Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm C', G và song song với đường thẳng BD , chia khối hộp thành hai phần có thể tích V_1, V_2

$(V_1 < V_2)$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

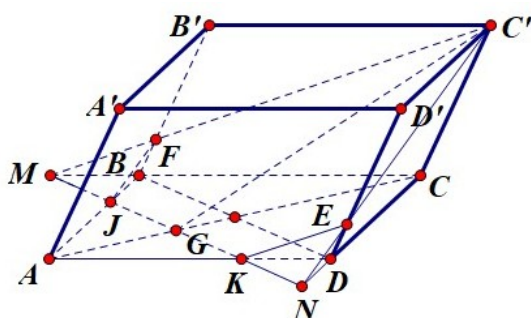
A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$.

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{17}$.

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$.

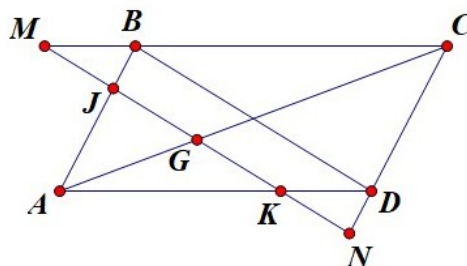
*D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{31}{77}$.

Lời giải



• Gọi V là thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$

• Dựng $\Delta = (P) \cap (ABCD)$, ta có $\Delta \parallel BD$ (do $(P) \parallel BD$). Gọi M, J, K, N lần lượt là giao điểm của Δ với BC, AB, AD, DC và F, E lần lượt là giao điểm của MC' với BB' và NC' với DD' .



• Ta có $\frac{CM}{CB} = \frac{CN}{CD} = \frac{4}{3}$. Suy ra $S_{CMN} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot S_{CBD} = \frac{16}{9} S_{CBD}$.

Mặt khác $\frac{JB}{JA} = \frac{JM}{JK} = \frac{1}{2}$. Suy ra $S_{JBM} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot S_{JAK} = \frac{1}{4} S_{JAK}$.

Mà $\frac{AJ}{AB} = \frac{AK}{AD} = \frac{2}{3}$. Suy ra $S_{AJK} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot S_{ABD} = \frac{4}{9} S_{ABD}$. Suy ra $S_{JBM} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} S_{ABD} = \frac{1}{9} S_{ABD}$.

• Tương tự $S_{NKD} = \frac{1}{9} S_{ABD}$.

• Ta lại có $\frac{d(C', (ABCD))}{d(F, (ABCD))} = \frac{MC'}{MF} = 4 \Rightarrow h = d(C', (ABCD)) = 4d(F, (ABCD))$.

• Tương tự $h = d(C', (ABCD)) = 4d(E, (ABCD))$.

• Thể tích $V_1 = V_{C'.CMN} - V_{F.MBJ} - V_{E.KDN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{9} S_{BCD} \cdot h - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} S_{BCD} \cdot \frac{1}{4} h = \frac{31}{54} S_{BCD} \cdot h$.

$= \frac{31}{108} S_{ABCD} \cdot h = \frac{31}{108} V \Rightarrow V_2 = \frac{77}{108} V$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{31}{77}$.

Câu 15. Cho khối chóp $S.ABC$. Có $AB = 2, AC = 3$ và $\angle BAC = 120^\circ, SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SC . Biết góc giữa mặt phẳng (ABC) và (AMN) bằng 60° . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

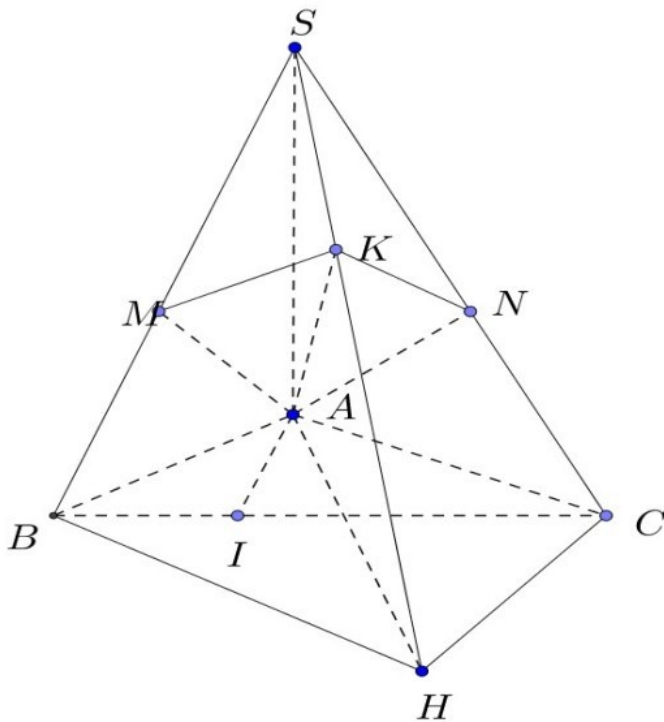
A. $\sqrt{57}$.

B. $3\sqrt{57}$.

*C. $\frac{\sqrt{57}}{3}$.

D. $\frac{3\sqrt{57}}{2}$.

Lời giải



Trong mặt phẳng (ABC) : Kẻ $HC \perp AC, HB \perp AB$.

$$\Rightarrow HB \perp (SAB), HC \perp (SAC)$$

$$\Rightarrow AM \perp (SBH), AN \perp (SCH) \Rightarrow SH \perp (AMN)$$

Mà $SA \perp (ABC), \angle ASH < 90^\circ$

$$\Rightarrow ((AMN), (ABC)) = (\overline{SA}, SH) = \angle ASH$$

$$\Rightarrow \angle ASH = 60^\circ; BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{19}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AI = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$$

$$AH = \frac{AB}{\sin \angle BCA} = \frac{AB}{\frac{AI}{AC}} = \frac{AB \cdot AC}{AI} = \frac{2 \cdot 3}{\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{19}}} = \frac{2\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$$

$$SA = \frac{AH}{\tan 60^\circ} = \frac{\frac{2\sqrt{19}}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{19}}{3} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{19}}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{57}}{3}$$

Câu 16. Cho khối lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông; khoảng cách và góc giữa hai

đường thẳng AC và DC' lần lượt bằng $\frac{3\sqrt{7}a}{7}$ và φ với $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

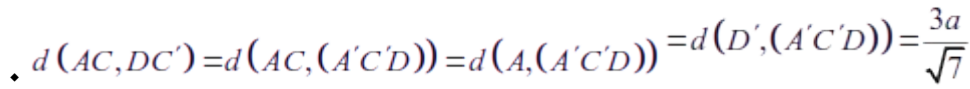
A. $3a^3$.

*B. $9a^3$.

C. $3\sqrt{3}a^3$.

D. $\sqrt{3}a^3$.

Lời giải



• Đặt $DD' = x, D'E = \frac{3a}{\sqrt{7}}$, ta có $\frac{1}{DD'^2} + \frac{1}{D'O^2} = \frac{1}{D'E^2} = \frac{7}{9a^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{D'O^2} = \frac{7}{9a^2}$

$$\tan \varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1} = \sqrt{7}$$

Vì $AA' = 3a$ và $AB = \frac{3ax\sqrt{2}}{\sqrt{7x^2 - 9a^2}} = a\sqrt{3}$ nên $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA' \cdot S_{ABCD} = 9a^3$

*A. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{24}$ B. $\frac{7\sqrt{6}a^3}{24}$ C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$

Góc tạo bởi (ABC') và (ABC) là góc $\widehat{B'JC} = 60^\circ$ với J là trung điểm AB .

Trang 16/30

$$S_1 = S_{ACN} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2} a^2$$

$$S_2 = S_{C'MP} = \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{1}{2} C'M \cdot C'P = \frac{1}{8} a^2$$

$$V = \frac{CC'}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{7\sqrt{3}a^3}{24}$$

Câu 18. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2. Gọi M, N là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AA', BB' sao cho M là trung điểm của AA' và $BN = \frac{1}{2} B'N$. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $A'C'$ tại điểm P , đường thẳng CN cắt đường thẳng $A'B'$ tại Q . Tính thể tích của khối đa diện $A'MPB'NQ$ bằng.

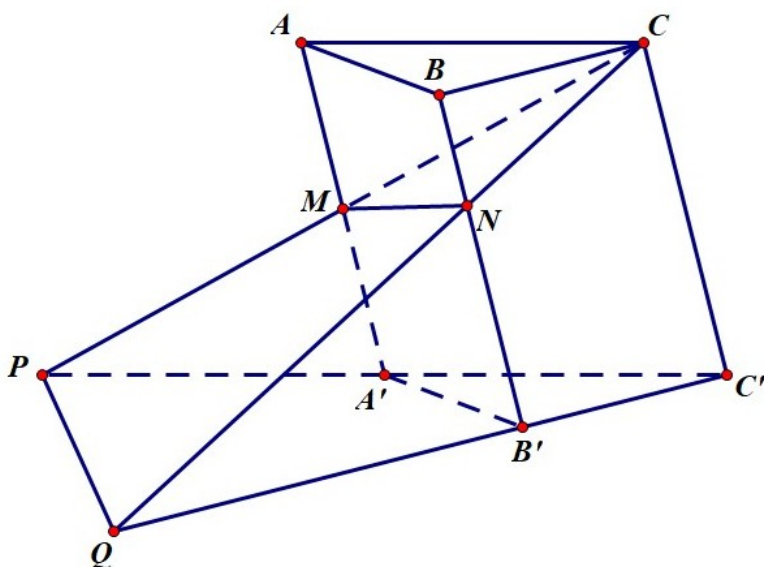
A. $\frac{13}{18}$.

*B. $\frac{23}{9}$.

C. $\frac{21}{9}$.

D. $\frac{7}{18}$.

Lời giải



Đặt $S = S_{\Delta A'B'C'}$ và $h = d(C, (A'B'C'))$ ta có $V_{ABC.A'B'C'} = hS = 2$.

Trong mặt phẳng $(AA'C'C)$ ta có $\begin{cases} A'M = \frac{1}{2} CC' \\ A'M \parallel CC' \end{cases}$ nên ta có A' là trung điểm của PC' .

Tương tự trong mặt phẳng $(BCC'B')$ ta có $C'B' = \frac{1}{3} C'Q$.

Từ đây ta có diện tích tam giác $C'PQ$ là $S_{\Delta C'PQ} = 6S$ do vậy thể tích khối tứ diện $CC'PQ$ là $V_{CC'PQ} = \frac{1}{3} h \cdot 6S = 2hS = 4$.

Trong khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ ta có $\frac{V_{CABMN}}{V_{CAB.C'A'B'}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 0}{3} = \frac{5}{18}$ suy ra $V_{CABMN} = \frac{5}{18} V_{CAB.C'A'B'} = \frac{5}{9}$ do đó thể tích khối $A'B'C'MNC$ bằng $2 - \frac{5}{9} = \frac{13}{9}$.

Do vậy thể tích của khối đa diện $A'MPB'NQ$ bằng $4 - \frac{13}{9} = \frac{23}{9}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, M, O lần lượt là trung điểm các cạnh AB, SA, AC và G là trọng tâm tam giác SBC . Thể tích khối tứ diện $GHMO$ bằng

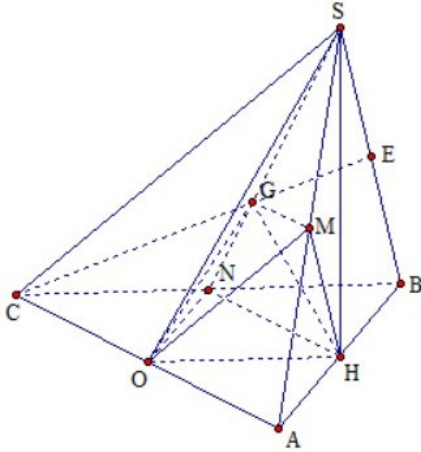
A. $\frac{3a^3}{64}$.

B. $\frac{3a^3}{128}$.

C. $\frac{a^3}{128}$.

*D. $\frac{a^3}{64}$.

Lời giải



Gọi N, E lần lượt là trung điểm của CB và SB .

Ta có: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{8}$.

+) $S_{OAHN} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} \Rightarrow V_{S.OAHN} = \frac{1}{2} V_{S.ABC} = \frac{a^3}{16}$, $V_{S.AHN} = V_{S.OAN} = \frac{1}{2} V_{S.AHNO} = \frac{a^3}{32}$.

+) $\frac{V_{S.GMH}}{V_{S.NAH}} = \frac{SG}{SN} \cdot \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SH}{SH} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.GMH} = \frac{1}{3} V_{S.NAH} = \frac{a^3}{96}$.

+) $\frac{V_{S.GMO}}{V_{S.NAO}} = \frac{SG}{SN} \cdot \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SO}{SO} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.GMH} = \frac{1}{3} V_{S.OAH} = \frac{a^3}{96}$.

+) $V_{G.ONH} = \frac{1}{3} d(G; (ABC)) \cdot S_{\Delta ONH} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot SH \cdot \frac{1}{4} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{12} V_{S.ABC} = \frac{a^3}{96}$.

+) $V_{M.OAH} = \frac{1}{3} d(M; (ABC)) \cdot S_{\Delta OAH} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} SH \cdot \frac{1}{4} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{8} V_{S.ABC} = \frac{a^3}{64}$.

Vậy $V_{GMOHN} = V_{S.HNO} - V_{S.GMH} - V_{S.GMO} - V_{G.HNO} - V_{G.HAO} = \frac{a^3}{16} - 3 \cdot \frac{a^3}{96} - \frac{a^3}{64} = \frac{a^3}{64}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = BC = a$, góc $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle SAB = \angle SCB = 90^\circ$ và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{2a}{\sqrt{21}}$. Tính thể tích khối $S.ABC$.

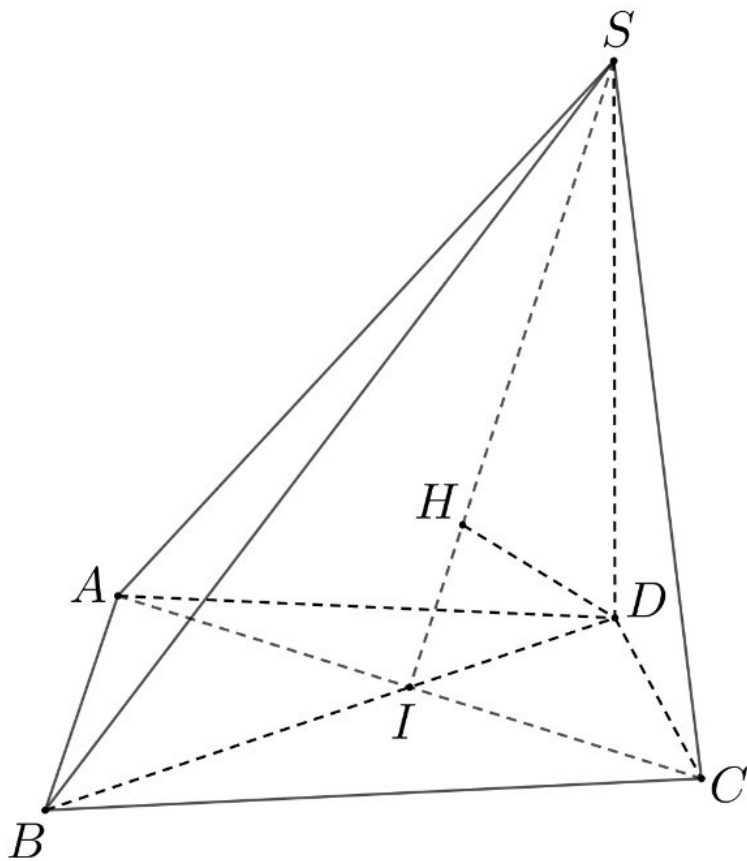
A. $V = \frac{a^3 \sqrt{5}}{10}$.

*B. $V = \frac{a^3 \sqrt{15}}{10}$.

C. $V = \frac{a^3 \sqrt{15}}{5}$.

D. $V = \frac{a^3 \sqrt{5}}{2}$.

Lời giải



Gọi D là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) .

$$\text{Có } \begin{cases} BC \perp SC \\ BC \perp SD \Rightarrow BC \perp CD \end{cases}$$

$$\text{Có } \begin{cases} AB \perp SD \\ AB \perp SA \Rightarrow AB \perp AD \end{cases}$$

Gọi I là giao điểm của BD và AC (BD là đường phân giác của góc $\angle ABC$)

$$BD = \frac{BC}{\cos 60^\circ} = 2a \quad BI = BC \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên SI .

$$\begin{cases} (SAC) \perp (SBC) \\ (SAC) \cap (SBC) = SI \\ DH \perp SI \end{cases} \Rightarrow DH \perp (SAC) \text{ hay } DH = d(D; (SAC))$$

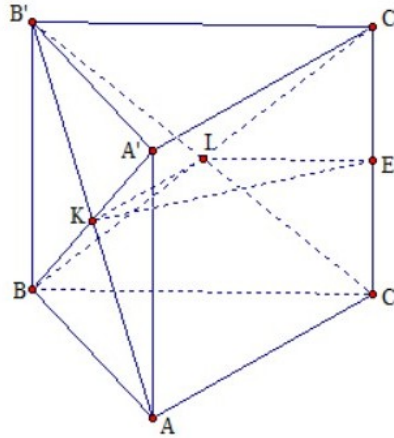
$$\text{Ta có: } d(D; (SAC)) = \frac{DI}{BI} \cdot d(B; (SAC)) = 3 \cdot \frac{2a}{\sqrt{21}} = \frac{6a}{\sqrt{21}} = DH$$

$$SD = \frac{DI \cdot DH}{\sqrt{DI^2 - DH^2}} = \frac{\frac{3a}{2} \cdot \frac{6a}{\sqrt{21}}}{\sqrt{\frac{9a^2}{4} - \frac{12a^2}{7}}} = \frac{6a\sqrt{5}}{5}$$

Suy ra:

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SD \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6a\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{15}}{10}$$

Câu 21. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $\angle BAC = 120^\circ$. Gọi I , K lần lượt là tâm của các mặt bên $BCC'B'$, $ABB'A'$ và E là trung điểm của CC' (tham khảo hình vẽ).



Biết hai mặt phẳng (ACB') , (ABC') tạo với nhau một góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$. Thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh A, B, C, K, E, I là

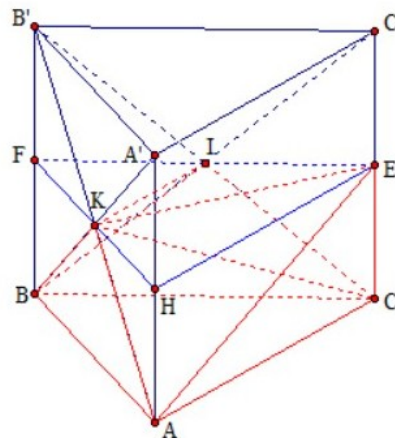
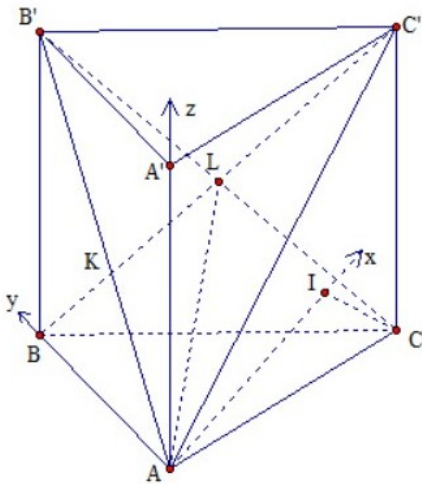
A. $\frac{a^3}{2}$.

B. $\frac{7a^3}{16}$.

C. $\frac{5a^3}{8}$.

*D. $\frac{9a^3}{16}$.

Lời giải



Kẻ tia Ax vuông góc với AB trên mặt phẳng (ABC) , chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Gọi I là hình chiếu của C trên trục Ax , đặt $AA' = h$.

Ta có: $\angle IAC = 30^\circ \Rightarrow IC = AC \sin 30^\circ = a$, $IA = AC \cos 30^\circ = a\sqrt{3}$.

Khi đó, trên hệ trục tọa độ đã chọn ta có: $A(0;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(a\sqrt{3};-a;0)$, $B'(0;a;h)$, $C'(a\sqrt{3};-a;h)$

$$+) \vec{AC} = (a\sqrt{3}; -a; 0), \vec{AB'} = (0; a; h) \Rightarrow [\vec{AC}; \vec{AB'}] = (-ah; -ah\sqrt{3}; a^2\sqrt{3})$$

Mặt phẳng (ACB') có VTPT $\vec{n_1} = (h; h\sqrt{3}; -a\sqrt{3})$

$$+) \vec{AB} = (0; a; 0), \vec{AC'} = (a\sqrt{3}; -a; h) \Rightarrow [\vec{AB}; \vec{AC'}] = (ah; 0; -a^2\sqrt{3})$$

Mặt phẳng (ABC') có VTPT $\vec{n_2} = (h; 0; -a\sqrt{3})$

$$\text{Suy ra: } \cos \alpha = \left| \cos(\vec{n_1}; \vec{n_2}) \right| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{|h^2 + 3a^2|}{\sqrt{4h^2 + 3a^2} \sqrt{h^2 + 3a^2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{\sqrt{h^2 + 3a^2}}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{h^2 + 3a^2}{4h^2 + 3a^2} \Leftrightarrow 8h^2 + 6a^2 = 5h^2 + 15a^2 \Leftrightarrow h = a\sqrt{3}$$

Gọi V là thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh A, B, C, K, E, I . Hai điểm F, H lần lượt là trung điểm của BB' và AA' .

$$\text{Ta có: } \frac{V_{B.FKL}}{V_{B.B'A'C'}} = \frac{BF}{BB'} \cdot \frac{BK}{BA'} \cdot \frac{BL}{BC'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{B.FKL} = \frac{1}{8} V_{B.B'A'C'} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{24} V_{ABC.A'B'C'}$$

$$V_{A.KHE} = \frac{1}{3} AH \cdot S_{HKE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AA' \cdot \frac{1}{2} S_{HFE} = \frac{1}{12} AA' \cdot S_{HFE} = \frac{1}{12} V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\text{Vậy } V = V_{ABC.HEF} - V_{A.HKE} - V_{B.FKI} = \frac{1}{2} V_{ABC.A'B'C'} - \frac{1}{24} V_{ABC.A'B'C'} - \frac{1}{12} V_{ABC.A'B'C'} \\ = \frac{3}{8} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{8} \cdot AA' \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{3}{8} \cdot h \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{9a^3}{16}$$

Câu 22. Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai đoạn thẳng BC và BD sao cho

$$2 \cdot \frac{BC}{BM} + 3 \cdot \frac{BD}{BN} = 10. \text{ Gọi } V_1, V_2 \text{ lần lượt là thể tích của các khối tứ diện } ABMN \text{ và } ABCD. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất}$$

của $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{3}{8}$.

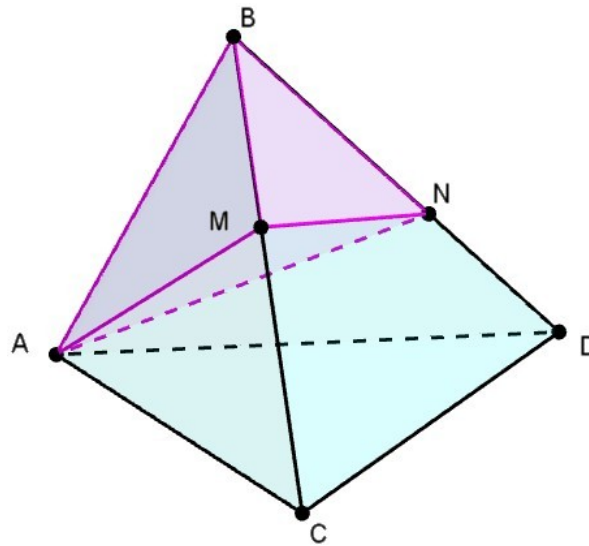
B. $\frac{2}{7}$.

*C. $\frac{6}{25}$.

D. $\frac{5}{8}$.

Lời giải

Cách 1



- Vì $M \in BC, N \in BD$ nên ta đặt $\frac{BD}{BN} = a \ (a > 1)$

Suy ra $1 < \frac{BC}{BM} = \frac{10 - 3a}{2} = 5 - \frac{3}{2}a \Rightarrow 1 < a < \frac{8}{3}$.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{BN}{BD} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{5 - \frac{3}{2}a} = \frac{1}{5a - \frac{3}{2}a^2}$$

- $\left(\frac{V_1}{V_2} \right)_{\min} \Leftrightarrow \left(5a - \frac{3}{2}a^2 \right)_{\max} \cdot \text{Tìm } \max_{\left(1; \frac{8}{3} \right)} \left(5a - \frac{3}{2}a^2 \right)$

- Xét hàm số $f(a) = 5a - \frac{3}{2}a^2, a \in \left(1; \frac{8}{3} \right); f'(a) = 5 - 3a; f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5}{3}$.

a	$-\infty$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{3}$	$+\infty$
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$			$\frac{25}{6}$		

- Suy ra $\max_{\left(1; \frac{8}{3} \right)} f(a) = \frac{25}{6}$.

- Vậy $\left(\frac{V_1}{V_2} \right)_{\min} = \frac{6}{25}$.

Cách 2

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}} = \frac{S_{BMN}}{S_{BCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BM \cdot BN \cdot \sin B}{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot BD \cdot \sin B} = \frac{BM \cdot BN}{BC \cdot BD}$$

$$\left(\frac{V_1}{V_2} \right)_{\min} \Leftrightarrow \left(\frac{BM \cdot BN}{BC \cdot BD} \right)_{\min} \Leftrightarrow \left(\frac{BC \cdot BD}{BM \cdot BN} \right)_{\max}$$

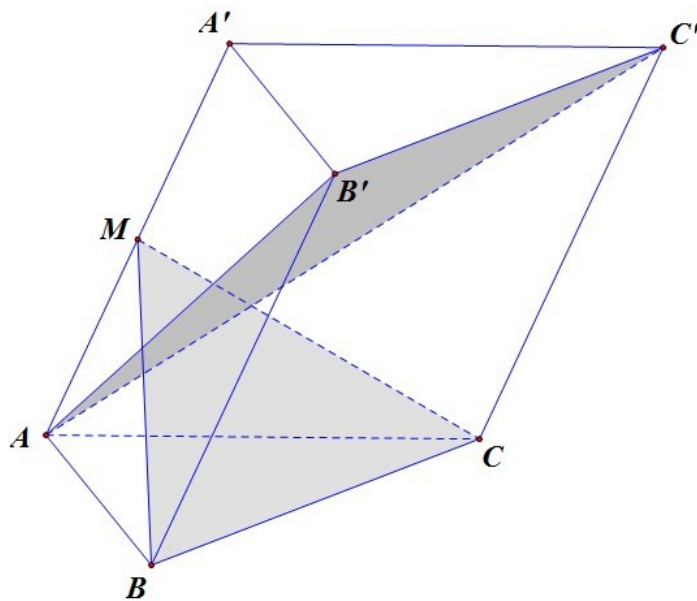
$$\bullet \text{ Theo giả thiết; } 10 = \frac{2 \cdot BC}{BM} + \frac{3 \cdot BD}{BN} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot BC}{BM} \cdot \frac{3 \cdot BD}{BN}} = 2 \cdot \sqrt{6 \cdot \frac{BC}{BM} \cdot \frac{BD}{BN}}$$

$$\Rightarrow 5 \geq \sqrt{6 \cdot \frac{BC \cdot BD}{BM \cdot BN}} \Leftrightarrow \frac{BC \cdot BD}{BM \cdot BN} \leq \frac{25}{6}$$

$$\bullet \text{ Do đó } \left(\frac{V_1}{V_2} \right)_{\min} = \frac{6}{25}$$

$$\bullet \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2 \cdot BC}{BM} = \frac{3 \cdot BD}{BN} \\ 2 \cdot \frac{BC}{BM} + 3 \cdot \frac{BD}{BN} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BM = \frac{2}{5} \cdot BC \\ BN = \frac{3}{5} \cdot BD \end{cases}$$

Câu 23. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2, $A'A = A'B = A'C = 2$, M là trung điểm của AA' . Tính thể tích phần chung của 2 khối đa diện $A'M.BCC'B'$ và $A.A'B'C'$.



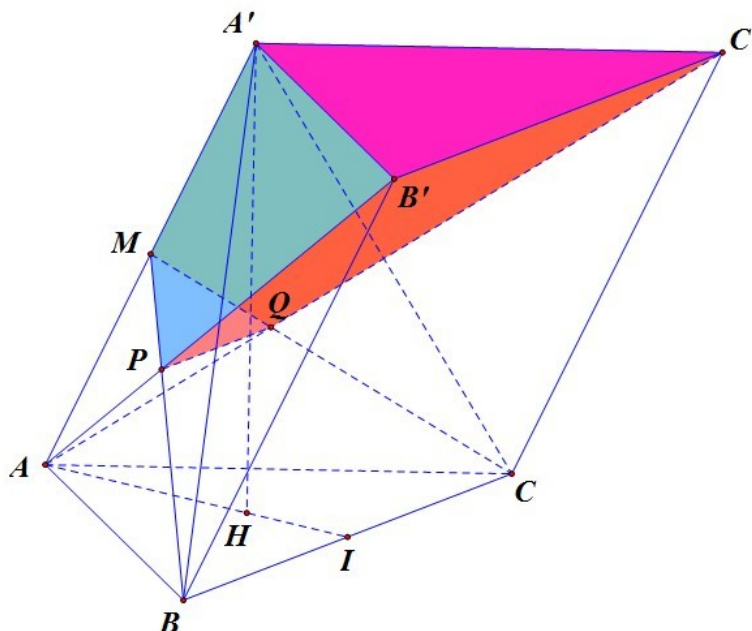
*A. $\frac{17\sqrt{2}}{27}$

B. $\frac{17\sqrt{3}}{18}$

C. $\frac{17\sqrt{3}}{27}$

D. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

Lời giải



• Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) . Vì $A'A = A'B = A'C$ nên H trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cũng là trọng tâm tam giác ABC . Gọi I là trung điểm BC .

• Ta có:

$$AI = \sqrt{3} \Rightarrow AH = \frac{2}{3} AI = \frac{2\sqrt{3}}{3}; \quad A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{4 - \frac{12}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3};$$

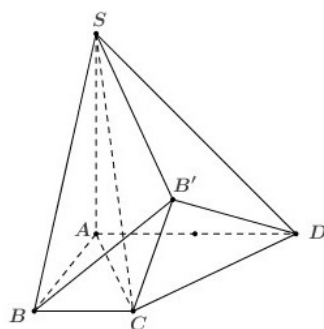
$$V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{ABC} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{2}; \quad V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2\sqrt{2}}{3};$$

• Gọi $P = AB' \cap BM$; $Q = AC' \cap CM$. Khi đó phần chung của 2 khối đa diện $A'M.BCC'B'$ và $A.A'B'C'$ là khối đa diện $MPQ.A'B'C'$.

$$\frac{V_{AMPQ}}{V_{A.A'B'C'}} = \frac{AM}{AA'} \cdot \frac{AP}{AB'} \cdot \frac{AQ}{AC'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18} \Rightarrow V_{MPQ.A'B'C'} = \frac{17}{18} V_{A.A'B'C'} = \frac{17}{18} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{17\sqrt{2}}{27}$$

• Ta có:

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi B' là điểm đối xứng của B qua mặt phẳng (SCD) . Tính thể tích khối đa diện $SB'.ABCD$ bằng



A. $\frac{5\sqrt{2}a^3}{6}$

B. $\frac{7\sqrt{2}a^3}{3}$

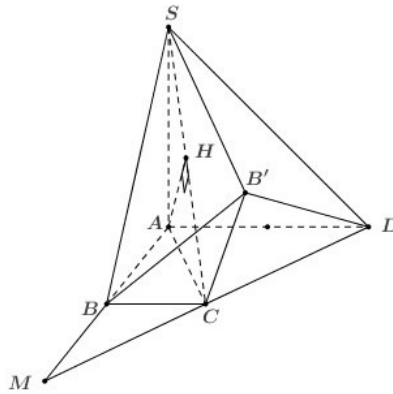
C. $\sqrt{2}a^3$

*D. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$

Lời giải

Ta có: $V_{SB'.ABCD} = V_{S.ABCD} + V_{B'.SCD} = \frac{1}{3} SAS_{ABCD} + \frac{1}{3} S_{SCD} d(B', (SCD))$

$$= \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} + \frac{1}{3} S_{SCD} \cdot d(B, (SCD)) \quad (\text{vì } B' \text{ là điểm đối xứng của } B \text{ qua mặt phẳng } (SCD))$$



$$+ V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} a \sqrt{2} \cdot \frac{(a+2a)a}{2} = \frac{a^3}{\sqrt{2}}$$

+ Gọi M là giao điểm của AB và CD , dễ dàng chứng minh được B là trung điểm của MA

$$\Rightarrow d(B, (SCD)) = \frac{1}{2} d(A, (SCD)) = \frac{1}{2} AH$$

Lại có tam giác SAC vuông cân tại A (vì $SA = AC = a\sqrt{2}$)

$$\Rightarrow d(B, (SCD)) = \frac{1}{2} d(A, (SCD)) = \frac{1}{2} AH = \frac{1}{4} SC = \frac{1}{4} \cdot 2a = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow V_{B'.SCD} = \frac{1}{3} S_{SCD} \cdot d(B', (SCD)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot SC \cdot CD \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{6} \cdot 2a \cdot a \sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6} = \frac{a^3}{3\sqrt{2}}$$

$$V_{SB'.ABCD} = V_{S.ABCD} + V_{B'.SCD} = \frac{a^3}{\sqrt{2}} + \frac{a^3}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$$

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{\sqrt{6}}{4}$, khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCA) bằng $\frac{\sqrt{15}}{10}$, khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC . Tính thể tích khối chóp $V_{S.ABC}$.

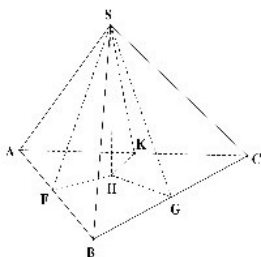
A. $\frac{1}{24}$.

B. $\frac{1}{12}$.

C. $\frac{1}{36}$.

*D. $\frac{1}{48}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC) . F, G, K lần lượt là hình chiếu của H trên AB, BC, CA .

Đặt $V = V_{S.ABC}$; $h = SH$

Ta có $3V = h \cdot S_{\Delta ABC} = d(A, (SBC)) \cdot S_{\Delta SBC} = d(B, (SAC)) \cdot S_{\Delta SAC} = d(C, (SAB)) \cdot S_{\Delta SAB}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}h = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot SF = \frac{\sqrt{15}}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot SG = \frac{\sqrt{30}}{20} \cdot \frac{1}{2} \cdot SK$$

$$\Rightarrow SF = h\sqrt{2}; SG = h\sqrt{5}; SK = h\sqrt{10} \Rightarrow HF = h; HG = 2h; HK = 3h$$

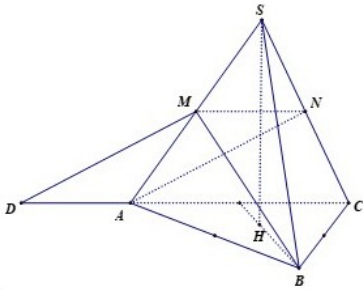
Mặt khác $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta HAB} + S_{\Delta HBC} + S_{\Delta HCA} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}HF + \frac{1}{2}HG + \frac{1}{2}HK \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{12}$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{48}$

Câu 26. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, cạnh đáy bằng a . Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC . Biết rằng BM vuông góc với AN . Thể tích của khối chóp bằng

- A. $\frac{\sqrt{7}}{24}a^3$ B. $\frac{\sqrt{7}}{8}a^3$ C. $\frac{\sqrt{14}}{8}a^3$ *D. $\frac{\sqrt{14}}{24}a^3$

Lời giải



Gọi D sao cho $MNAD$ là hình bình hành. BM vuông góc với AN nên tam giác DMB vuông cân tại M . Suy

ra: $BM = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$

Gọi cạnh $SA = x, x > 0$. BM là đường trung tuyến tam giác SAB nên ta có:

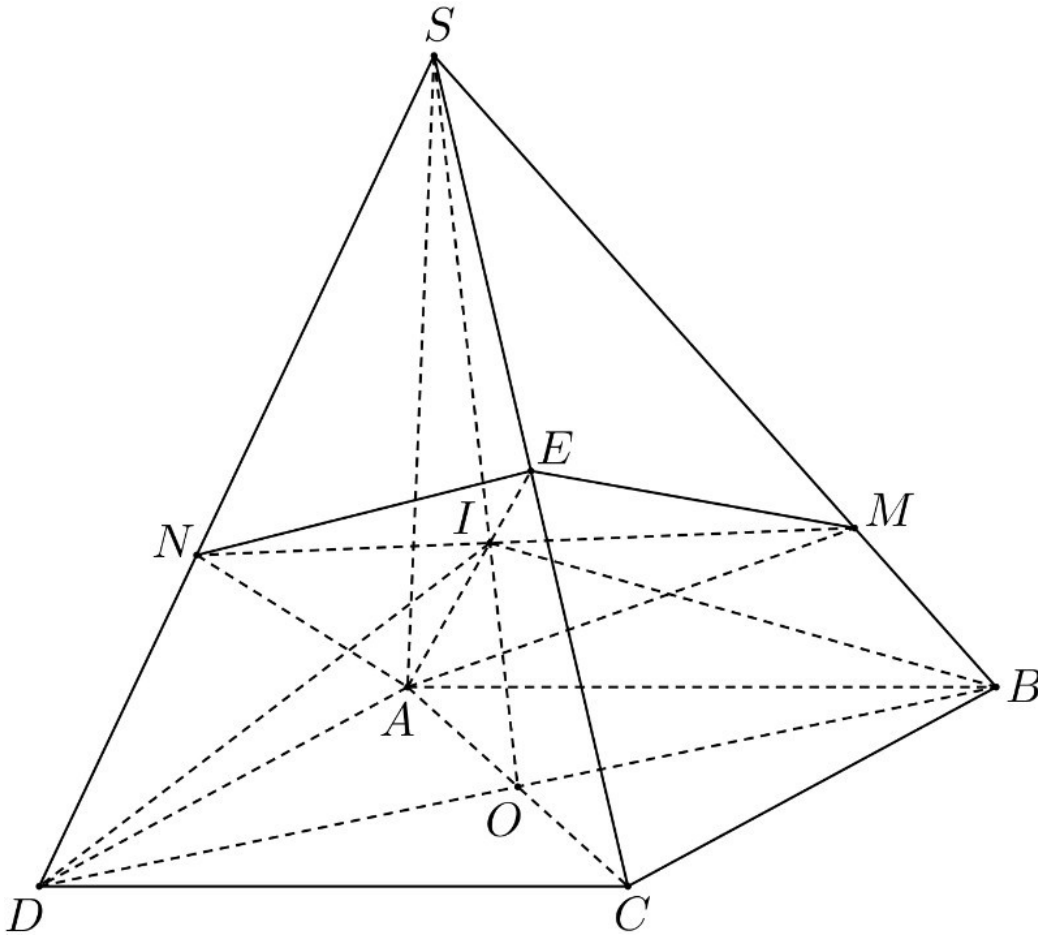
$$BM^2 = \frac{2(BA^2 + BS^2) - SA^2}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{a\sqrt{14}}{4}\right)^2 = \frac{2(a^2 + x^2) - x^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{42}}{6} \quad \text{Vậy} \quad V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{42}}{6} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{14}}{24}$$

Câu 27. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, có thể tích bằng 24 cm^3 . Gọi E là trung điểm SC . Một mặt phẳng chứa AE cắt các cạnh SB và SD lần lượt tại M và N . Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.AMEN$.

- A. 9 cm^3 *B. 8 cm^3 C. 6 cm^3 D. 7 cm^3

Lời giải



Mặt đáy $(ABCD)$ là hình bình hành $\Rightarrow \triangle ADC$ và $\triangle ABC$ có cùng diện tích
 $\Rightarrow V_{S.ADC} = V_{S.ABC}$ (hai khối chóp có cùng chiều cao và có diện tích mặt đáy bằng nhau).

$$\text{Mà } V_{S.ABCD} = V_{S.ADC} + V_{S.ABC} = 24 \text{ cm}^3 \Rightarrow V_{S.ADC} = V_{S.ABC} = \frac{V_{S.ABCD}}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Gọi O là giao điểm của AC và BD ; I là giao điểm của SO và $AE \Rightarrow I$ là trọng tâm của $\triangle SAC$ và I thuộc

MN . Gọi $\frac{SM}{SB} = a$ và $\frac{SN}{SD} = b$ ($a > 0$; $b > 0$).

$$\text{Ta có: } \frac{V_{S.ANE}}{V_{S.ADC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SE}{SC} = 1 \cdot b \cdot \frac{1}{2} = \frac{b}{2} \quad \text{và} \quad \frac{V_{S.AME}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SE}{SC} = 1 \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.ANE}}{12} = \frac{b}{2} \quad \text{và} \quad \frac{V_{S.AME}}{12} = \frac{a}{2} \Rightarrow V_{S.ANE} = 6b \text{ (cm}^3\text{)} \quad \text{và} \quad V_{S.AME} = 6a \text{ (cm}^3\text{)}.$$

$$\text{Do đó: } V_{S.AMEN} = V_{S.AME} + V_{S.ANE} = 6a + 6b = 6(a+b) \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Mặt khác: $\triangle ISM$ và $\triangle ISB$ có chung chiều cao kẻ từ I và có đáy $\frac{SM}{SB} = a \Rightarrow a = \frac{S_{ISM}}{S_{ISB}}$.

$$\text{Mà } I \text{ là trọng tâm của } \triangle SAC \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{S_{ISB}}{S_{SOB}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{S_{ISM}}{S_{SOB}} = \frac{2a}{3}.$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có: } \frac{S_{ISN}}{S_{SOD}} = \frac{2b}{3}.$$

$$O \text{ là trung điểm của } DB \Rightarrow S_{SOB} = S_{SOD} = \frac{S_{SDB}}{2} \text{ hay } S_{SDB} = 2S_{SOB} = 2S_{SOD}$$

$$\Rightarrow \frac{2a}{3} + \frac{2b}{3} = \frac{S_{ISM}}{S_{SOB}} + \frac{S_{ISN}}{S_{SOD}} = \frac{2S_{ISM}}{2S_{SOB}} + \frac{2S_{ISN}}{2S_{SOD}} = \frac{2(S_{ISM} + S_{ISN})}{S_{SDB}} = \frac{2S_{SNM}}{S_{SDB}}$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{3S_{SNM}}{S_{SDB}} = \frac{3SN \cdot SM \cdot \sin \angle MSN}{SD \cdot SB \cdot \sin \angle BSD} = 3 \cdot \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SM}{SB} = 3ab$$

$$\text{Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có: } ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow a+b = 3ab \leq \frac{3(a+b)^2}{4}$$

$$\Rightarrow 3(a+b) \geq 4 \quad (\text{do } a+b > 0) \Rightarrow a+b \geq \frac{4}{3} \Rightarrow 6(a+b) \geq 8 \text{ hay } V_{S.AMEN} \geq 8 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } a=b=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow MN \text{ đi qua } I \text{ và } MN \parallel BD.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.AMEN$ là 8 cm^3 .

Câu 28. Tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = a$, $\angle BAC = 120^\circ$, $\angle BAD = 60^\circ$ và tam giác BCD là tam giác vuông tại D . Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

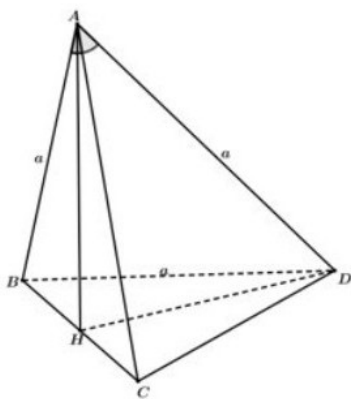
A. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{4}$

B. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$

*D. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A lên (BCD) .

Để thấy, $\triangle AHB = \triangle AHC = \triangle AHD \Rightarrow HB = HC = HD$.

Do đó, H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD \Rightarrow H$ là trung điểm của BC .

Xét tam giác ABC , có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = 3a^2$.

$$\Rightarrow BC = a\sqrt{3} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}$$

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H , có

Xét $\triangle ABD$, có $AB = AD = a$ và $\angle BAD = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ là tam giác đều cạnh $a \Rightarrow BD = a$.

Xét $\triangle BDC$ vuông tại D , có $CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

$$\Rightarrow S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} \text{ (đvdt)}.$$

Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{3} AH S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$ (đvtt).

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $3a$, tam giác SBC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SBC) một góc 60° . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

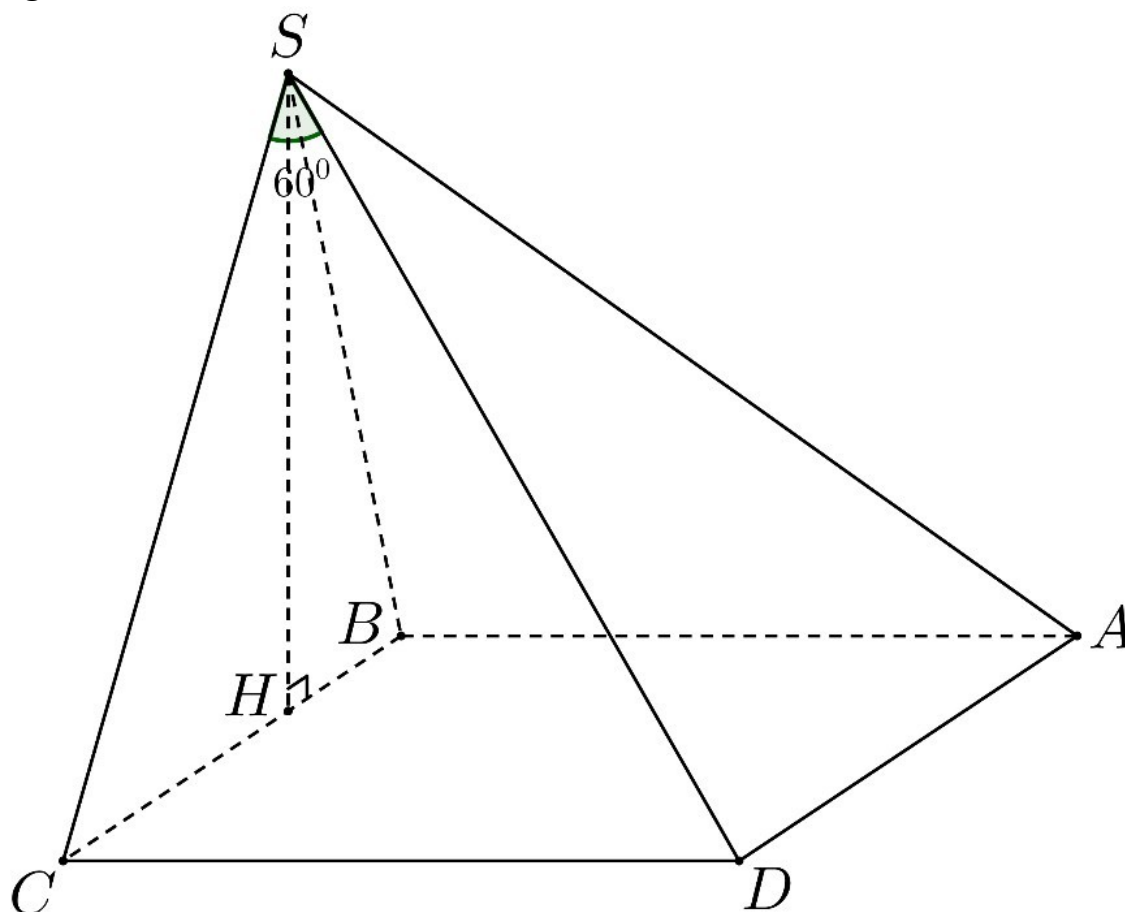
A. $2a^3 \sqrt{6}$.

B. $a^3 \sqrt{6}$.

*C. $3a^3 \sqrt{2}$.

D. $a^3 \sqrt{3}$.

Lời giải



Kẻ $SH \perp BH, H \in BC$.

$$\begin{cases} (SBC) \perp (ABCD) \\ (SBC) \cap (ABCD) = BC \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ SH \perp BC \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{cases} CD \perp BC \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SBC) \quad \text{và} \quad SD \cap (SBC) = \{S\}.$$

Suy ra SC là hình chiếu của SD lên (SBC) .

Khi đó $(\angle SD, (SBC)) = (\angle SD, SC) = \angle CSD = 60^\circ$.

Tam giác SCD vuông tại C có $SC = \frac{CD}{\tan 60^\circ} = \frac{3a}{\sqrt{3}} = a\sqrt{3}$.

Tam giác SBC vuông tại S có $SB = \sqrt{BC^2 - SC^2} = a\sqrt{6}$.

Mà
$$SH = \frac{SB.SC}{BC} = \frac{a\sqrt{6}.a\sqrt{3}}{3a} = a\sqrt{2}.$$

Vậy thể tích của khối chóp đã cho là
$$V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{2}.(3a)^2 = 3a^3\sqrt{2} \quad (\text{dvtt}).$$

---HẾT---