

A/ PHAÀN MÔU ÑÀÀU

I/ LÝ DO CHỌN ÑÈA TÀI:

Khaùo saùt haøm soá vaø òùng duïng cuûa khaùo saùt haøm soá laø moät phaàn raát quan troïng trong chöông trình lôùp 12, trong caùc ñeà thi ñaïi hoïc. Moät trong caùc òùng duïng cuûa khaùo saùt haøm soá laø bieán luaän soá nghieäm cuûa phöông trình baèng ñoà thò. Ñaây laø daïng toaùn raát hay, raát coù ích cho hoïc sinh, khoâng chaë cho hoïc sinh lôùp 12 maø keå caû cho hoïc sinh lôùp 10, 11. Raát nhieàu baøi toaùn muoán bieán luaän soá nghieäm cuûa phöông trình, baát phöông trình theo tham soá m, neáu duøng phöông phaùp ñaïi soá caùc em gaëp nhieàu khoù khaên vì phaûi xeùt quaù nhieàu tröôøng hôïp, nhöng neáu duøng ñoà thò thì baøi toaùn trôû naên ñôn giaûn, deã thaáy hôn. Ñeà tài naøy ñi saâu vaøo vieäc giuùp hoïc sinh coù kyõ naêng giaûi nhanh vaø chính xaùc loaïi toaùn naøy

II/TÍNH CAÁP THIẾT KHI CHỌN ÑÈA TÀI:

Trong chöông trình lôùp 12 , khi daïy phaàn bieán luaän phöông trình baèng ñoà thò, toâi thaáy saùch giaùo khoa chaë ñeà caáp ñeán hai daïng thöôøng gaëp ñoù laø tröôøng hôïp phöông trình ñeà baøi cho laø phöông trình hoaøn nh ñoà giao ñieäm cuûa ñöôøng cong (C) vôùi moät ñöôøng thaúng d maø ñöôøng d laø ñöôøng thaúng cuøng phöông vôùi truïc Ox. Trong khi ñoù coù nhieàu baøi toaùn trong ñeà thi tuyeân sinh ñaïi hoïc thì phöông trình ñeà baøi cho laø phöông trình hoaøn nh ñoà giao ñieäm cuûa ñöôøng cong (C) vôùi moät ñöôøng thaúng d maø nhöõng ñöôøng thaúng d luôôn song song vôùi nhau, khoâng cuøng phöông Ox, hoaëc nhöõng ñöôøng d naøy luôôn quay quanh moät ñieäm A coá ñònh. Ngoaøi ra coøn raát nhieàu baøi toaùn khi giaûi ta thöôøng ñoà veà daïng xeùt daáu tam thöïc $f(x) = ax^2 + bx + c$ treân mieàn K , daïng toaùn naøy hoïc sinh thöôøng gaëp phaûi khoù khaên khi a coù chöùa tham soá vaø coù raát nhieàu em giaûi thieáu tröôøng hôïp , keå caû khi caùc em ñoïc lôøi giaûi saün , coù em vaãn khoâng hieåu taïi sao laïi phaûi ñoà ra caùc ñieäu kieän nhö theá Song neáu coù söï giuùp ñöö cuûa ñoà thò thì vieäc giaûi quyeaát caùc baøi toaùn treân trôû naên nhöõng hôn vaø ít xaùy ra tình traïng thieáu nghieäm. Vì vaäy vôùi baøi vieát naøy toâi hy voïng giuùp caùc em hoïc sinh thaøo göõ ñöôïc nhöõng khoù khaên khi gaëp caùc baøi toaùn treân.

Baøi vieát coøn nhieàu haïn cheá, taùc giaû raát mong nhaän ñöôïc yù kieán ñoùng goùp chaân thaønh cuûa quí thaày cô cuøng ñoàng nghieäp ñeã baøi vieát ñöôïc toảng quaùt hôn, hay hôn.

Ñoàng Xoaøi, ngaøy 21 thaùng 2 naêm

2009

Giaùo vieân

B/ PHAÀN NOÀI DUNG

Vaán ñeà 1 : Giaûi vaø bieán luaän phöông trình baèng ñoà thò

Cho phöông trình (1) , ñieän duøng ñoà thò (C) : $y = f(x)$ bieán luaän theo tham soá m soá nghieäm cuûa phöông trình (1) thì ta bieán ñoài sao cho moät veá cuûa (1) laø $f(x)$ coøn veá coøn laïi seõ coù moät trong 5 daïng sau :

DAÏNG 1 : $f(x) = m$ (1) .Ta xem (1) laø phöông trình hoaøn h ñoà giao ñieäm cuûa

(C) : $y = f(x)$ vaø ñöôøng thaúng d : $y = m$

d laø ñöôøng thaúng cuøng phöông Ox vaø ñi qua ñieäm coù toïa ñoà (0; m) .Soá nghieäm cuûa phöông trình (1) chính laø soá giao ñieäm cuûa (C) vaø d .Doïa vaøo ñoà thò cuûa (C) vaø d ta tìm ñöôïc soá nghieäm cuûa phöông trình (1) .

VÍ DUÏ 1: 1/ Khaùu saùt vaø veõ ñoà thò (C) : $y = x^3 - 3x^2 + 1$
 2/ Duøng ñoà thò (C) bieán luaän theo m soá nghieäm cuûa phöông trình :

a/ $x^3 - 3x^2 + 1 = m$ (1)
 b/ $x^3 - 3x^2 + 1 - m = 0$ (2)
 c/ $\cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1 - m = 0$ (3) $x \in [0; \pi]$

GIAÛI:

1/ + **Taäp xaùc ñònh :** $D = \mathbb{R}$

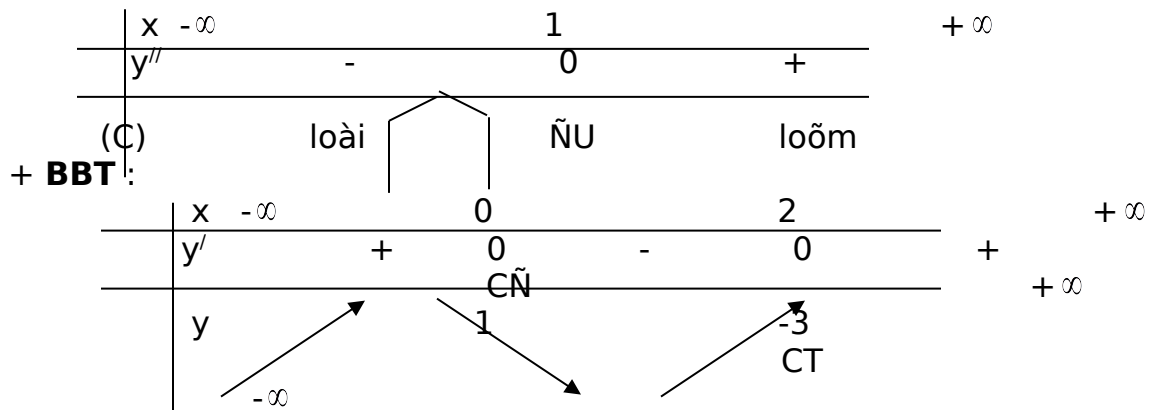
$$+ y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

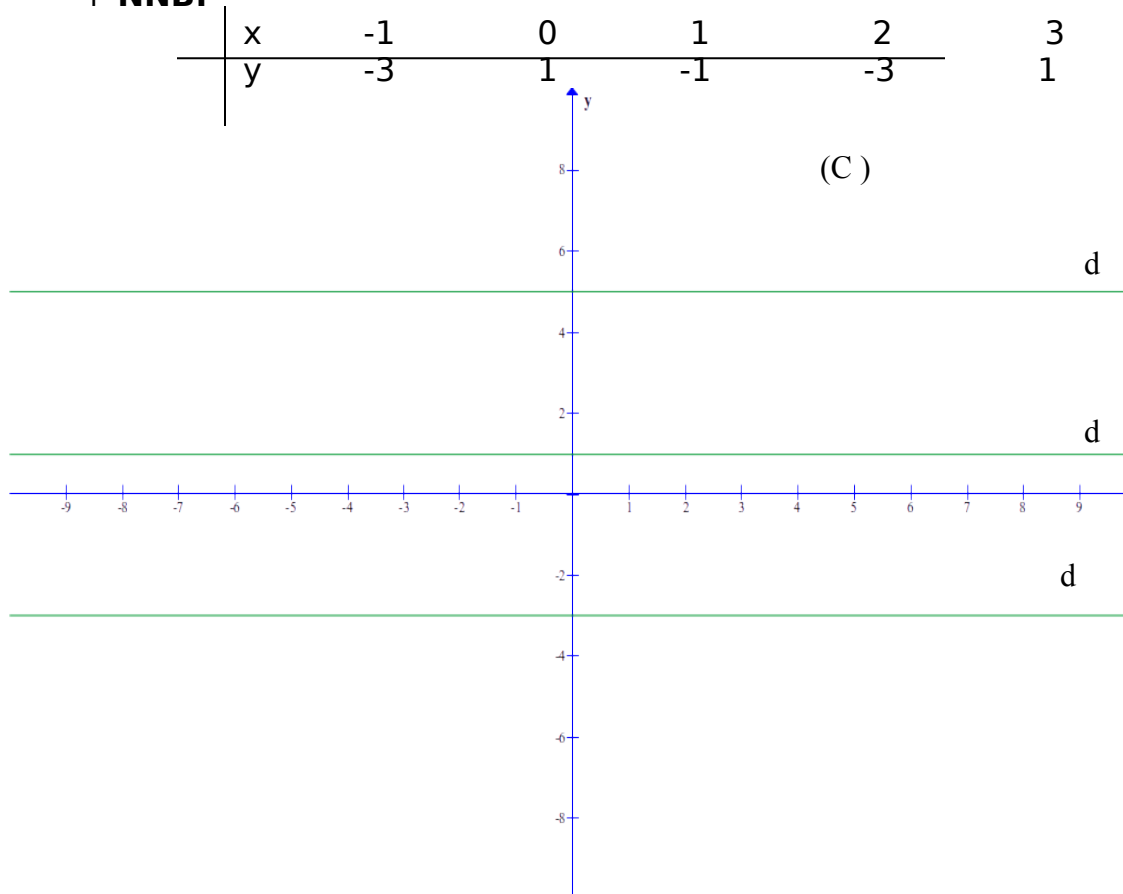
$$+ y'' = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1$$

BXD :



+ **ÑÑB:**



2/ a/ $x^3 - 3x^2 + 1 = m$ (1)

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của (C) : $y = x^3 - 3x^2 + 1$ và
đường thẳng $d : y = m$

d là đường thẳng song song với trục Ox và đi qua điểm có tọa độ $(0; m)$. Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của (C) và d. Để vẽ đồ thị của (C) và d ta có:

+ Nếu $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$ thì (C) và d có 1 giao điểm $\Rightarrow$ phương trình (1) có một nghiệm

+ Nếu $\begin{cases} m = -3 \\ m = 1 \end{cases}$ thì (C) và d có 2 giao điểm $\Rightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm

+ Nếu $-3 < m < 1$ thì (C) và d có 3 giao điểm $\Rightarrow$ phương trình (1) có ba nghiệm

b/ $x^6 - 3x^4 + 1 - m = 0$ (2) $\Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 1 = m$ (2') với $t = x^2 \geq 0$

(2') là phương trình hoành độ giao điểm của (C) : $y = t^3 - 3t^2 + 1$ với $t \geq 0$ và đường thẳng $d : y = m$, d là đường thẳng song song với trục Ox và đi qua điểm có tọa độ $(0; m)$. Số nghiệm của phương trình (2') chính là số giao điểm của (C) và d với điều kiện $t \geq 0$. Để vẽ đồ thị của (C) và d ta có:

+ Nếu $m < -3$ thì (C) và d có 1 giao điểm với hoành độ âm $\Rightarrow$ (2') vô nghiệm $\Rightarrow$ (2) vô nghiệm

+ Nếu $-3 \leq m < 1$ thì (C) có 3 giao điểm trong đó có 1 giao điểm có hoành độ âm và 2 giao điểm có hoành độ dương $\Rightarrow$ (2') có 2 nghiệm $\Rightarrow$ (2) có 4 nghiệm

+ Nếu $m = 1$ thì (C) có 2 giao điểm trong đó có 1 giao điểm có hoành độ bằng 0 và 1 giao điểm có hoành độ dương $\Rightarrow$ (2') có 2 nghiệm $\Rightarrow$ (2) có 3 nghiệm

+ Nếu $m > 1$ thì (C) có 1 giao điểm với hoành độ dương $\Rightarrow$ (2') có 1 nghiệm $\Rightarrow$ (2) có 2 nghiệm đối nhau

$$C/ \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1 - m = 0 \quad (3) \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 1 = m \quad (3')$$

với $t = \cos x$ vì $x \in [0; \pi]$ nên $t \in [-1; 1]$

(3') là phương trình hoành độ giao điểm của (C) : $y = t^3 - 3t^2 + 1$ với $t \in [-1; 1]$ và đồ thị

d : $y = m$, d là đường thẳng song song trục Ox và đi qua điểm có tọa độ $(0; m)$. Số nghiệm của phương trình (3') chính là số giao điểm của (C) và d với điều kiện hoành độ giao điểm $t \in [-1; 1]$. Dựa vào đồ thị của (C) và d ta có :

+ Nếu $m < -3$ thì (C) có 1 giao điểm với hoành độ $t < -1 \Rightarrow$ (3') vô nghiệm $\Rightarrow$ (3) vô nghiệm.

+ Nếu $-3 \leq m < 0$ thì (C) có 3 giao điểm trong đó có 1 giao điểm có hoành độ $t \in [-1; 1]$ và 2 giao điểm có hoành độ $t \notin [-1; 1] \Rightarrow$ (3') có 1 nghiệm $\Rightarrow$ (3) có 1 nghiệm

+ Nếu $0 \leq m < 1$ thì (C) có 3 giao điểm trong đó có 2 giao điểm có hoành độ $t \in [-1; 1]$ và 1 giao điểm có hoành độ $t \notin [-1; 1] \Rightarrow$ (3') có 2 nghiệm $\Rightarrow$ (3) có 2 nghiệm

+ Nếu $m = 1$ thì (C) có 2 giao điểm trong đó có 1 giao điểm có hoành độ bằng 0 và 1 giao điểm có hoành độ $t \notin [-1; 1] \Rightarrow$ (3') có 1 nghiệm $\Rightarrow$ (3) có 1 nghiệm

+ Nếu $m > 1$ thì (C) có 1 giao điểm với hoành độ $t \notin [-1; 1] \Rightarrow$ (3') vô nghiệm $\Rightarrow$ (3) vô nghiệm.

Ví dụ 2 : Biện luận theo m số nghiệm của phương trình : $x^3 - mx + m = 0$ (1)

Giai :

$$(1) x^3 - mx + m = 0 \Leftrightarrow x^3 = m(x - 1) \Leftrightarrow \frac{x^3}{x - 1} = m$$

(vì $x = 1$ không phải là nghiệm của (1))

Ta xem (1) là phương trình hoành độ giao điểm của (C) : $y = \frac{x^3}{x - 1}$ và

(d) : $y = m$

$$\text{Khai triển và vẽ (C) : } y = \frac{x^3}{x - 1} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x - 1}$$

+ Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$+ y' = 2x + 1 - \frac{1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2(2x - 3)}{(x - 1)^2}$$

+(C) có tiệm cận đứng : $x = 1$, tiệm cận cong : $y = x^2 + x + 1$

+ Bảng biến thiên

$x - \infty$	0	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
y'	-	0	-	0
y	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$

CT

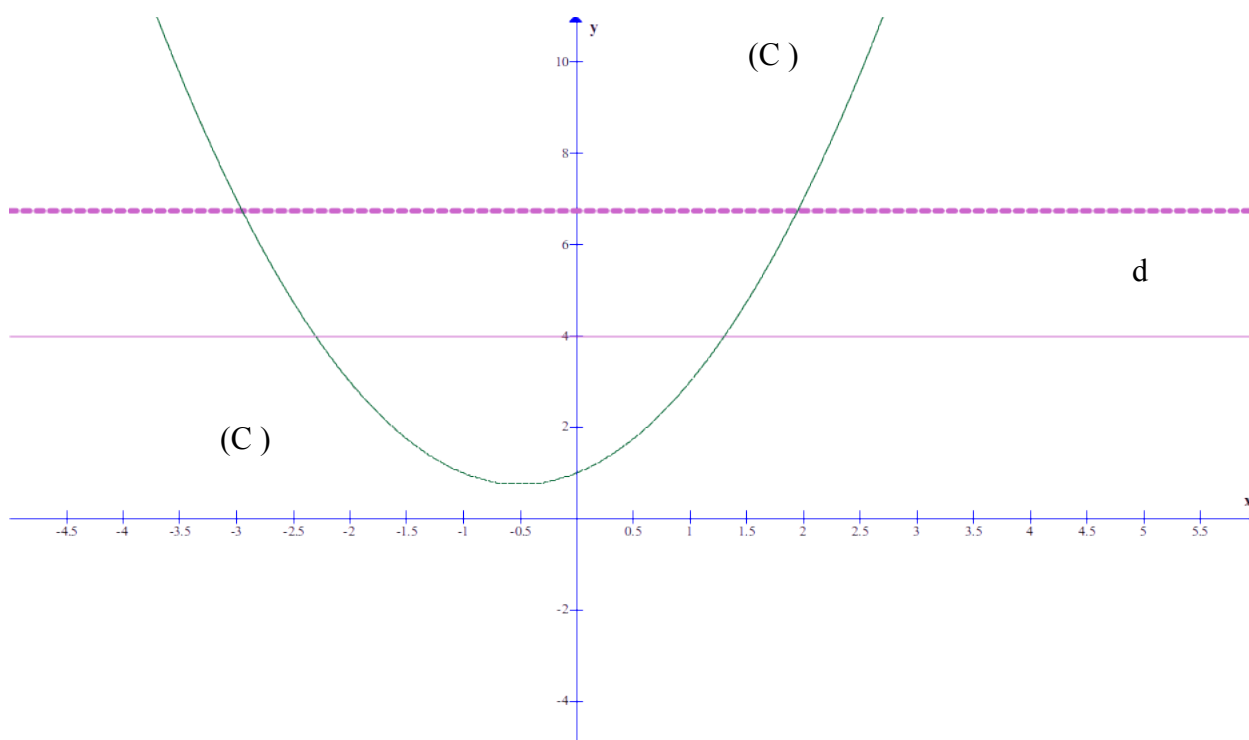
Ñoà thò haøm soá ñaït cöïc tieåu taïi ñieåm $(\frac{3}{2}; \frac{27}{4})$, coù ñieåm uoán O (0;0)

Döïa vaøo ñoà thò (C) vaø d ta coù :

+ $m < \frac{27}{4}$ thì (1) coù ñuùng moät nghieäm

+ $m = \frac{27}{4}$ thì (1) coù hai nghieäm

+ $m > \frac{27}{4}$ thì (1) coù ba nghieäm



Ví dụ 3 : Giaûi vaø bieán luaän phöông trình sau theo tham soá m :

$$|x - 1|(x + 2) + m = 0 \quad (1)$$

Chuù yù : Vôùi ví dụ 3 nếu giaûi baèng phöông phaùp ñaïi soá thì caùc em duøng ñònh nghóa ñeå phaùu boû ñaáu giaù trò tuyeät ñoái vaø ñoà veà vieäc giaûi vaø bieán luaän phöông trình baäc hai , caùch laøm naøy phöùc taïp hôn , nhöng neáu ta nhìn baøi toaùn naøy döôùi daïng 1 thì baøi giaûi laïi ñôn giaûn hôn .

Giaûi :

Ta coù : $|x - 1|(x + 2) + m = 0 \quad (1) \Leftrightarrow m = -|x - 1|(x + 2)$

Ta xem (1) là phương trình hoành độ giao điểm của (C) : $y = -|x - 1|(x + 2)$ và $d : y = m$

Vẽ đồ thị (C) : $y = -|x - 1|(x + 2)$ và xét $x^2 + x - 2 = -m$ khi $x \geq 1$ ta có

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{9 - 4m}}{2},$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{9 - 4m}}{2} \left(m \leq \frac{9}{4} \right)$$

Tổng cộng xét $x^2 + x - 2 = m$ khi $x \leq 1$ ta có $x_3 = \frac{-1 - \sqrt{9 + 4m}}{2}$, $x_4 = \frac{-1 + \sqrt{9 + 4m}}{2}$ ($m \geq -\frac{9}{4}$)

Đưa vào đồ thị (C) và d ta có :

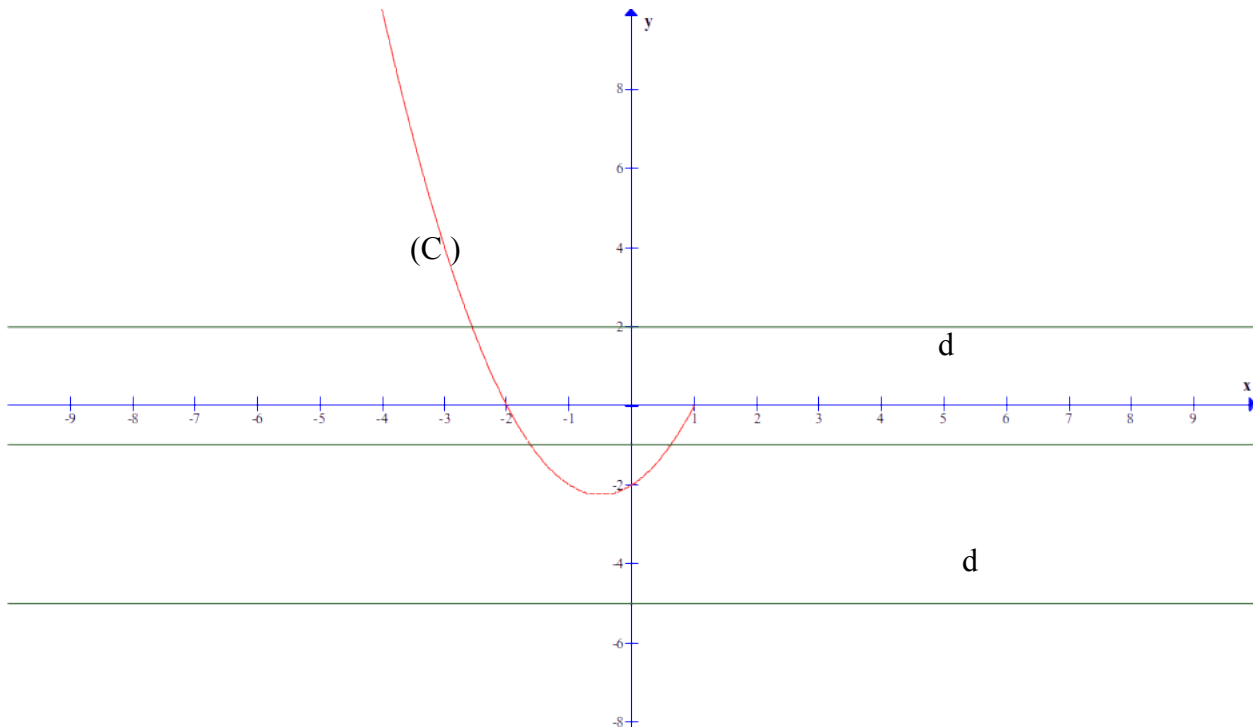
a/ $m > 0$ thì (1) có nghiệm $x = x_1$

b/ $m = 0$ thì (1) có nghiệm $\begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$

c/ $-\frac{9}{4} < m < 0$ thì (1) có nghiệm $\begin{cases} x = x_4 \\ x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$

d/ $m = -\frac{9}{4}$ thì (1) có nghiệm $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = x_4 \end{cases}$

e/ $m < -\frac{9}{4}$ thì (1) có nghiệm $x = x_4$



Ví dụ 4: Tìm tham số a để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt :

$$|-2x^2 + 10x - 8| = x^2 - 5x + a \quad (1)$$

Giải:

Ta coù : $|-2x^2 + 10x - 8| = x^2 - 5x + a \quad (1) \Leftrightarrow |2x^2 - 10x + 8| - x^2 + 5x = a$

Ta xem (1) laø phöông trình hoaøn h ñoã giao ñieäm cuûa (C) : $y =$

$$|2x^2 - 10x + 8| - x^2 + 5x$$

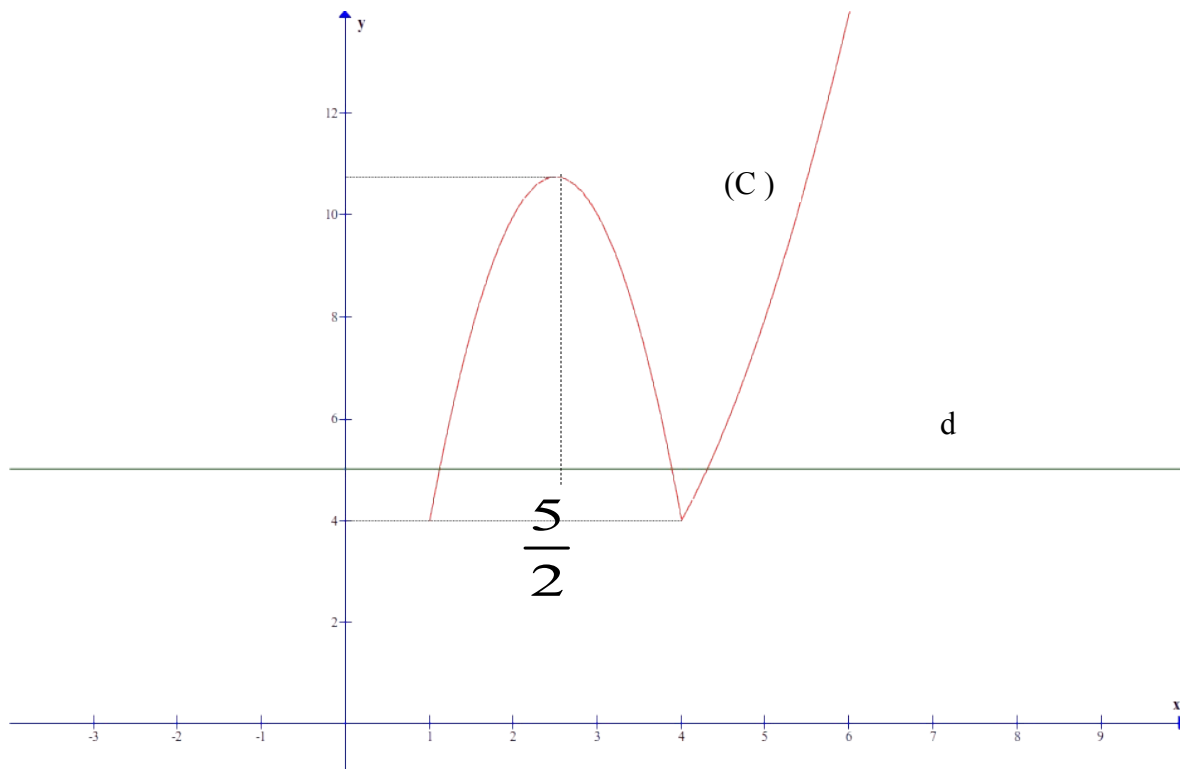
vaø d : $y = a$

Đöïng ñoà thờ (C) : $y = |2x^2 - 10x + 8| - x^2 + 5x =$

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 8 & \text{khi } \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 4 \end{cases} \\ -3x^2 + 15x - 8 & \text{khi } 1 < x < 4 \end{cases}$$

Đöïa vaøo ñoà thờ (C) vaø d ta coù (1) coù boáïn nghieäm khi vaø chæ khi $4 < a$

$$< \frac{43}{4}$$



Ví dụ 5: Tìm a ñeõ phöông trình sau coù nghieäm duy nhaát :

$$|2x^2 - 3x - 2| = 5a - 8x - 2x^2 \quad (1)$$

Giaûi :

Ta coù : $|2x^2 - 3x - 2| = 5a - 8x - 2x^2 \quad (1) \Leftrightarrow |2x^2 - 3x - 2| + 2x^2 + 8x = 5a$

Ta xem (1) laø phöông trình hoaøn h ñoã giao ñieäm cuûa (C) : $y =$

$$|2x^2 - 3x - 2| + 2x^2 + 8x$$

d : $y = 5a$

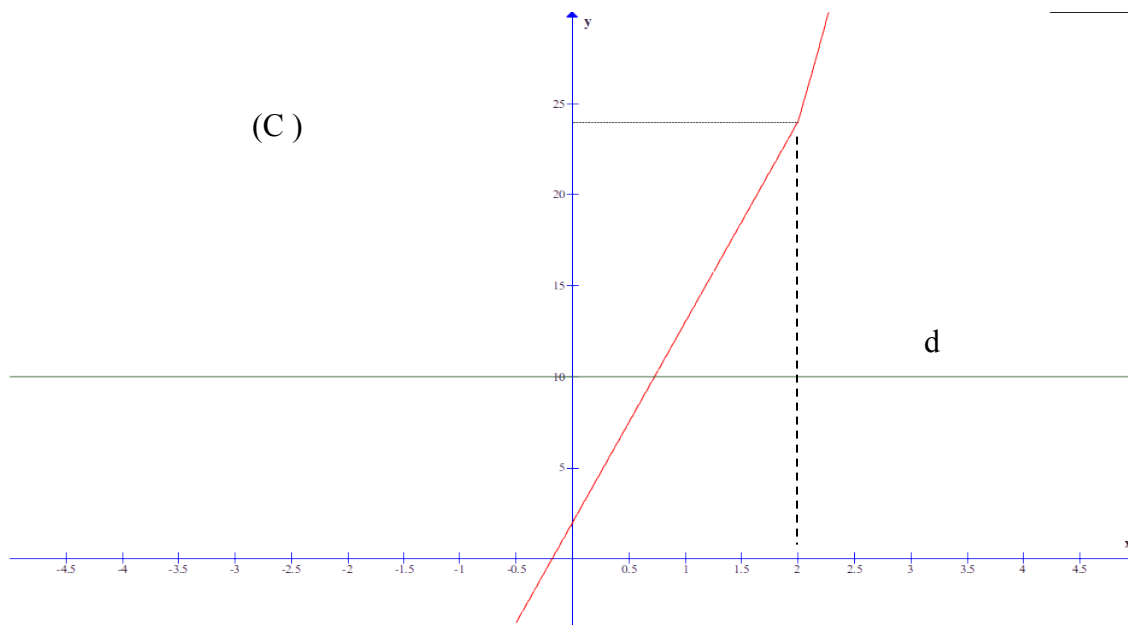
Đöïng ñoà thờ (C) : $y = |2x^2 - 3x - 2| + 2x^2 + 8x =$

$$\begin{cases} 4x^2 + 5x - 2 & \text{khi } \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \\ x \geq 2 \end{cases} \\ 11x + 2 & \text{khi } -\frac{1}{2} < x < 2 \end{cases}$$

d: $y = 5a$ laø ñöôøng thaúng cöông phöông vöùi Ox , ñi qua ñieäm (0;5a)

Döia vào ñoà thờ (C) và d ta có (1) có nghiệm duy nhất khi và chæ khi :

$$5a = -\frac{57}{16} \Leftrightarrow a = -\frac{57}{80}$$

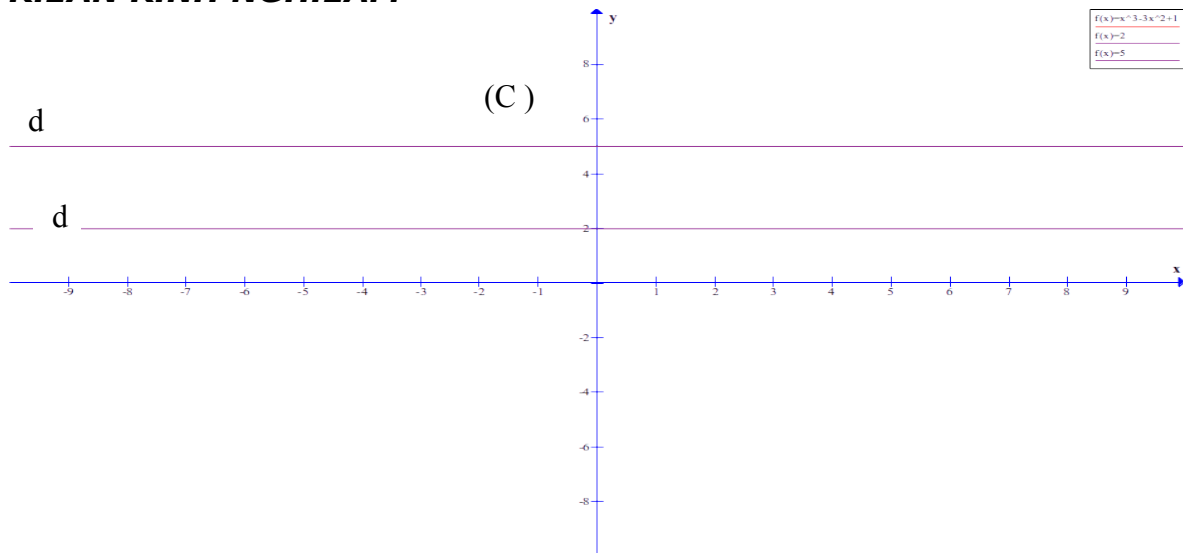


ĐAİNG 2 : $f(x) = g(m)$ (1) trong ñoù $g(m)$ là biểu thức theo m
Ñæt $g(m) = m'$, lờu yù ñieàu kiện của m' . Ta xem (1) là phương
trình hoành ñoạ giao ñieồm của (C) : $y = f(x)$ và ñöông thẳng
 $d : y = m'$

d là ñöông thẳng cắt trục Ox và ñi qua ñieồm có toạ ñoạ
(0; m'). Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao ñieồm
của (C) và d. Döia vào ñoà thờ của (C) và d ta tìm ñöïc số
nghiệm của phương trình (1).

Ví dụ 6 : Cho ñoà thờ (C) : $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Dựng (C) biến lượn theo
m số nghiệm của phương trình : $x^3 - 3x^2 - m^2$
 $- 2m - 2 = 0$ (1)

Giải :



$$(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 1 = m^2 + 2m + 3 = (m + 1)^2 + 2$$

$$\text{Năët } m' = (m + 1)^2 + 2 \geq 2, \forall m \in \mathbb{R}$$

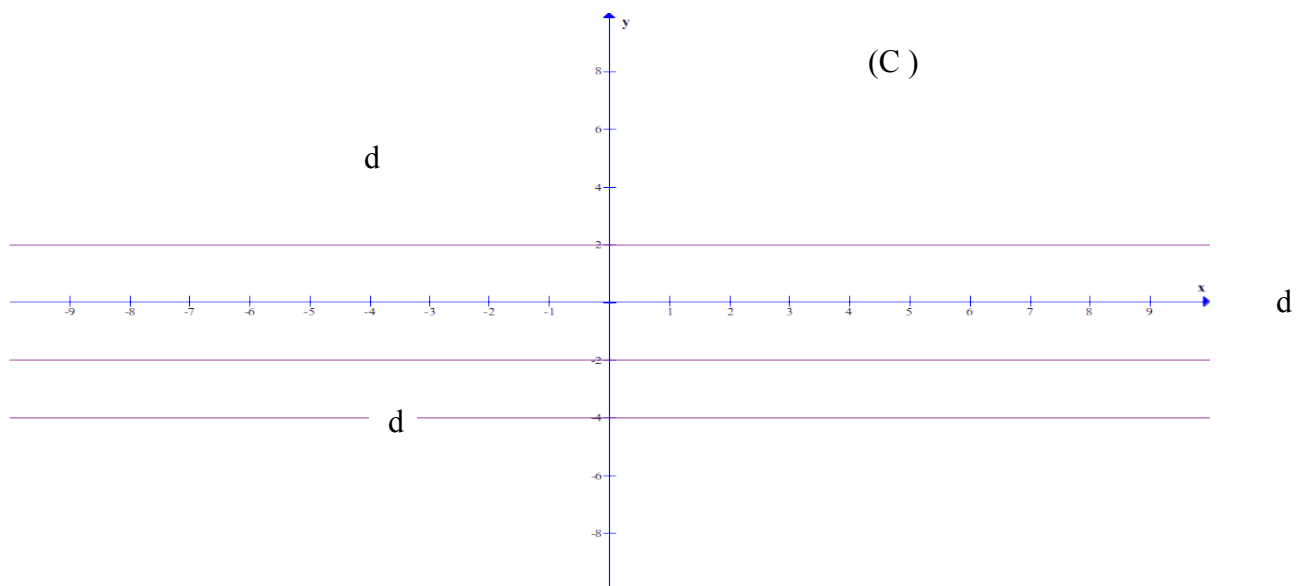
Ta xem (1) là phương trình hoành độ giao điểm của (C) : $y = x^3 - 3x^2 + 1$ và d : $y = m'$

Đưa vào đồ thị (C) và d ta có $m' \geq 2, \forall m \in \mathbb{R}$ thì (C)

và d có 1 giao điểm nên pt (1) có 1 nghiệm

Ví dụ 17 : Cho đồ thị (C) : $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Đường (C) biến
lưuán theo m số nguyên của phương trình : $x^3 - 3x^2 + 1 = m + \frac{1}{m}$ (2)

Giaûi :



$$\text{Năët } m' = m + \frac{1}{m}, \text{ nhiều kiện : } |m'| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m' \geq 2 \\ m' \leq -2 \end{cases}$$

Ta xem (2) laø phöông trình hoøanh ñoà giao ñieäm cuûa (C) : $y = x^3 - 3x^2 + 1$
vaø d : $y = m'$

Döïa vaøo ñoà thò (C) vaø d ta coù :

$+ m' \geq 2 \Leftrightarrow m > 0$ thì d caét (C) tại một ñieäm neân pt (2) coù một nghieäm

$+ -3 < m' \leq -2 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m' + 3m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$
thì d caét (C) tại ba ñieäm neân pt (2) coù ba nghieäm

$+ m' = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$ thì d vaø (C) coù hai giao ñieäm neân pt (2) coù hai

nghieäm

$+ m' < -3 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m' + 3m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ d caét (C) tại một ñieäm neân pt (2) coù một nghieäm

DAÏNG 3 : $f(x) = f(m)$ (1) trong ñoù $f(m)$ laø bieäu thöùc theo m
Ñaët $f(m) = m'$, döïa vaøo baûng bieán thieän cuûa $f(x)$ ta suy ra
baûng bieán thieän cuûa $f(m)$

Ta xem (1) laø phöông trình hoøanh giao ñieäm cuûa (C) : $y = f(x)$
vaø ñöôøng thaúng

d : $y = m'$

d laø ñöôøng thaúng cuøng phöông Ox vaø ñi qua ñieäm coù toïa ñoà
(0; m'). Soá nghieäm cuûa phöông trình (1) chính laø soá giao ñieäm
cuûa (C) vaø d. Döïa vaøo ñoà thò cuûa (C) vaø d ta tìm ñöôïc soá
nghieäm cuûa phöông trình (1).

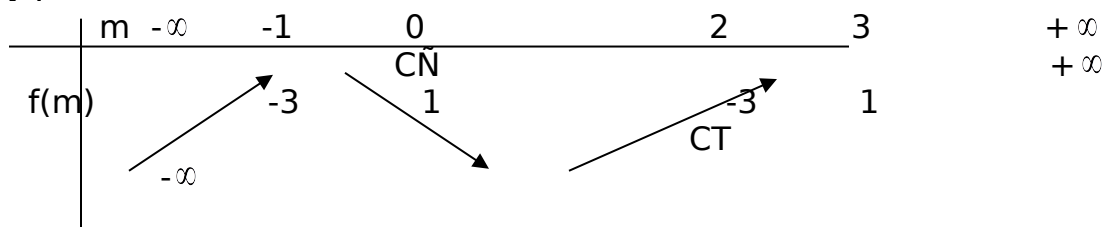
Ví dụ 8 : Cho ñoà thò (C) : $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Duøng (C) bieän
luaän theo m soá nghieäm cuûa phöông trình : $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0$
(1)

Giaûi :

$x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0$ (1) $\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 1 = m^3 - 3m^2 + 1$

Ñaët $m' = m^3 - 3m^2 + 1$, döïa vaøo baûng bieán thieän cuûa $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, ta
coù baûng bieán thieän cuûa $f(m)$:

+ **BBT :**



Ta xem (1) laø phöông trình hoøanh ñoà giao ñieäm cuûa (C) : $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
vaø ñöôøng thaúng

d : $y = m'$ d laø ñöôøng thaúng cuøng phöông Ox vaø ñi qua ñieäm coù toïa ñoà
(0; m')

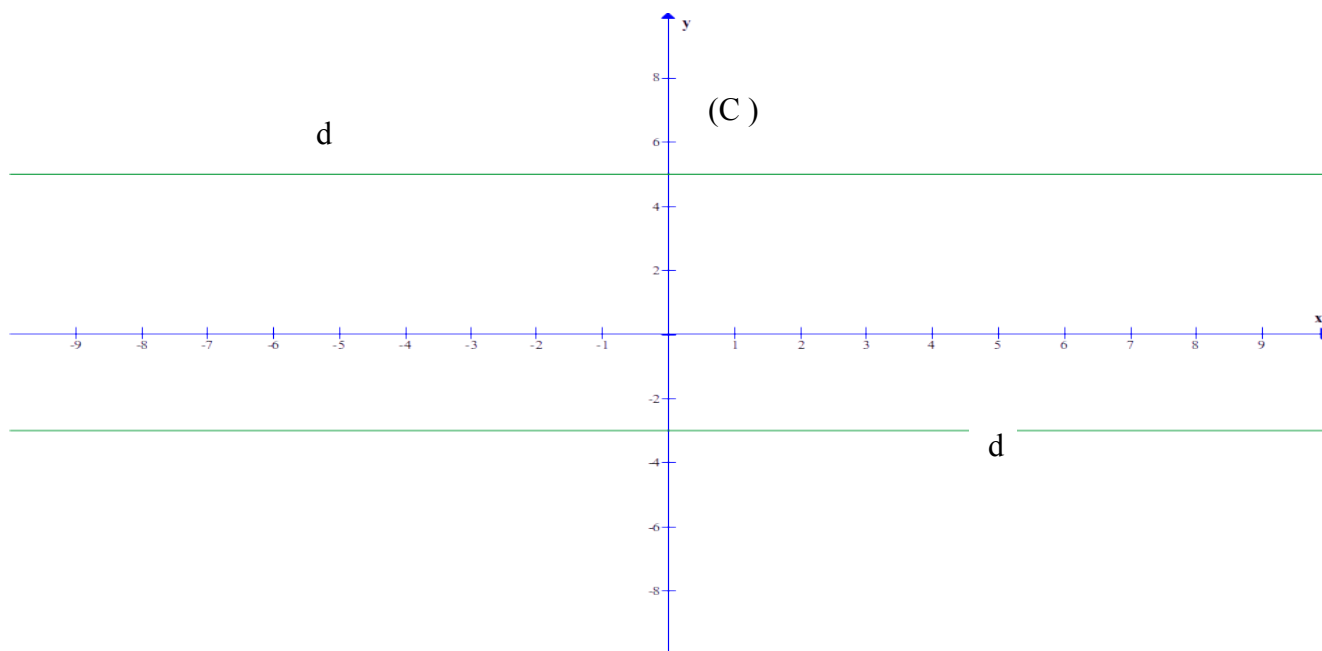
Döïa vaøo ñoà thò cuûa (C) vaø d ta coù :

a/ $\begin{cases} m' < -3 \\ m' > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$ thì d caét (C) tại một ñieäm neân pt (1) coù một
nghieäm

b/ $\begin{cases} m' = -3 \\ m' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \\ m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$ thì d và (C) có hai giao điểm nên pt (1) có hai nghiệm

nhằm

c/ $-3 < m' < 1 \Leftrightarrow m \in (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 3)$ thì d cắt (C) tại ba điểm nên pt (1) có ba nghiệm



Ví dụ 9: Cho hàm số $y = (x + 1)^2 (2 - x)$
a/ Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số
b/ Dùng (C) biện luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$(x + 1)^2 (2 - x) = (m + 1)^2 (2 - m)$$

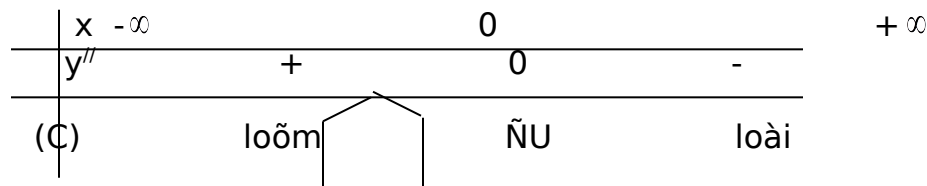
Giải: $y = (x + 1)^2 (2 - x) = -x^3 + 3x + 2$

+ D = R

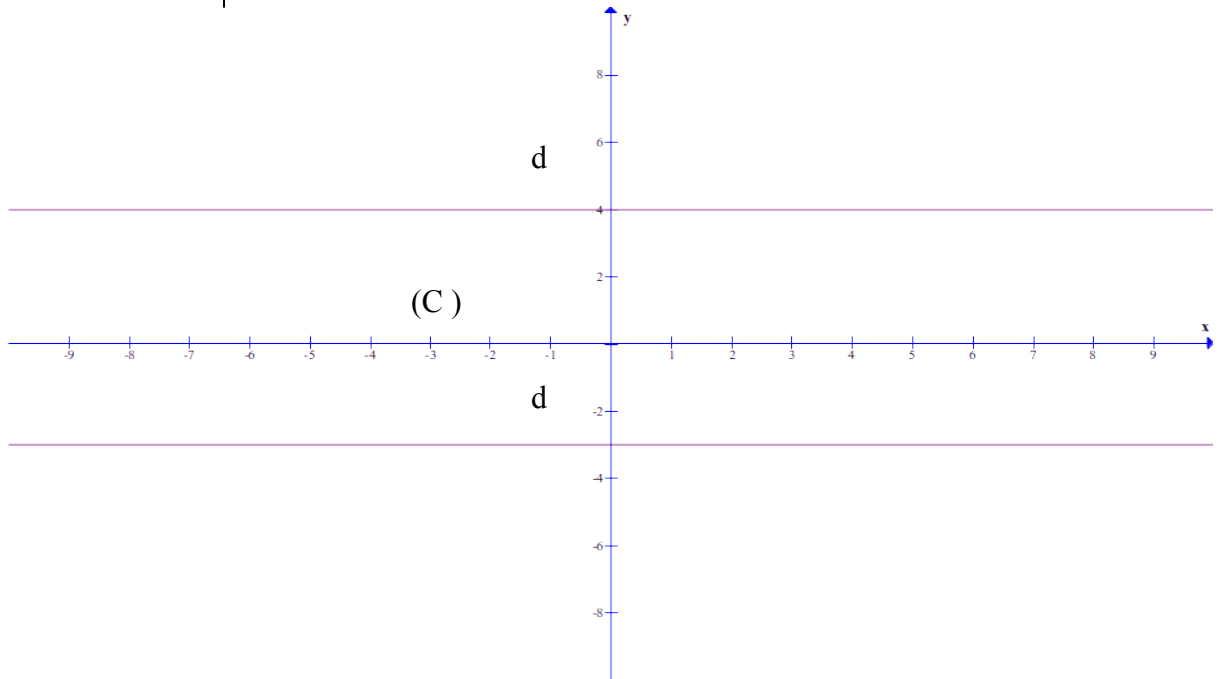
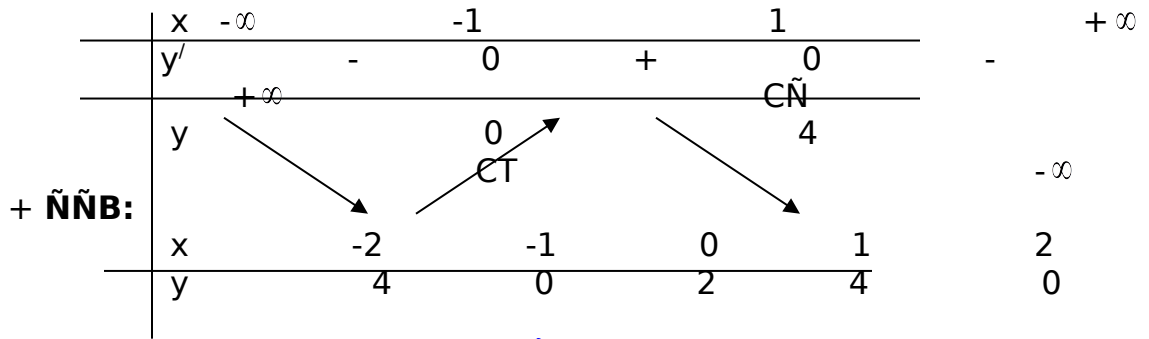
$$+ y' = -3x^2 + 3; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$+ y'' = -6x, y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2$$

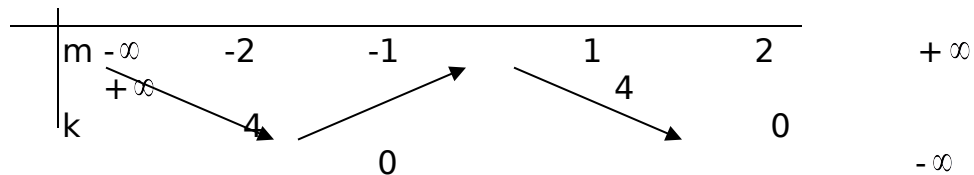
BXD :



+ **BBT :**



b/ Ñaët $k = (m + 1)^2 (2 - m)$
döia vào bảng biến thiên của $f(x) = -x^3 + 3x + 2$, ta có bảng
biến thiên của
 $k = (m + 1)^2 (2 - m)$



Caên có vào ñà thò ta có :

a/ (1) có ñùng một ñgieäm $\Leftrightarrow \begin{cases} k < 0 \\ k > 4 \end{cases} \Leftrightarrow |m| > 2$

b/ (1) có hai ñgieäm $\Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \\ m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$

c/ (1) có ba ñgieäm $\Leftrightarrow 0 < k < 4 \Leftrightarrow m \in (-2; 2) \setminus \{-1, 1\}$

D

S

1

(1) laø phöông trình hoanh ñoà giao ñieäm cuûa (C) : $y = f(x)$ vaø d :
 $y = kx + m$

Khi m thay ñoài nhöõng ñoøng thaúng d luôn cuøng phöông vöøi
 ñoøng thaúng $y = kx$

Cho d tieáp xuùc vöøi (C) , ta tìm ñoïc caùc tieáp tuyeán cuûa (C)
 vaø d , döïa vaøo caùc tieáp tuyeán naøy ta chia caùc tröông hieäp
 ñeä bieän luaän .

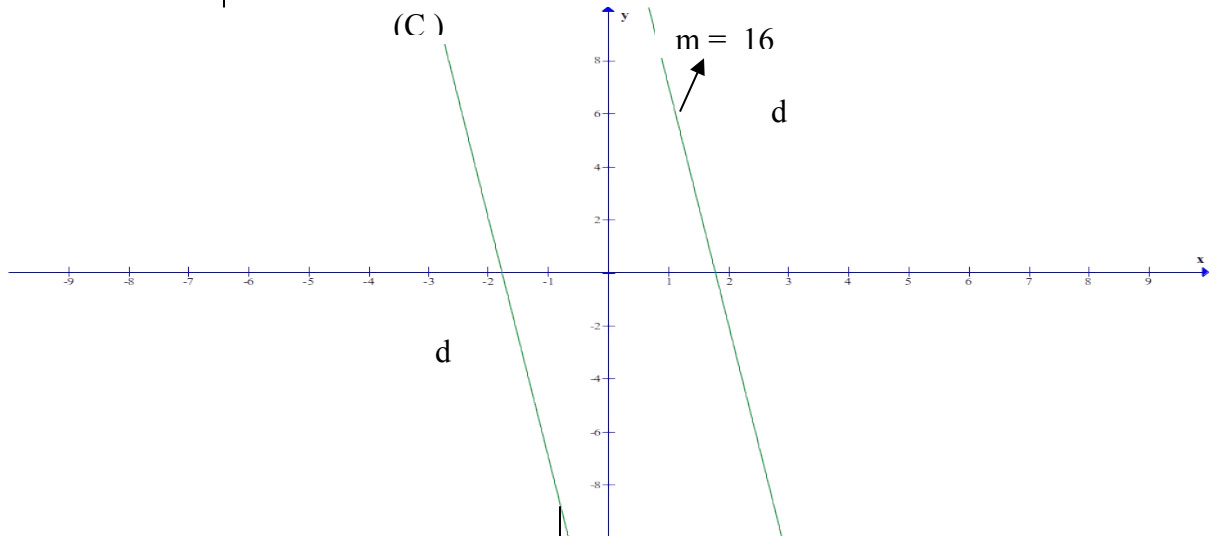
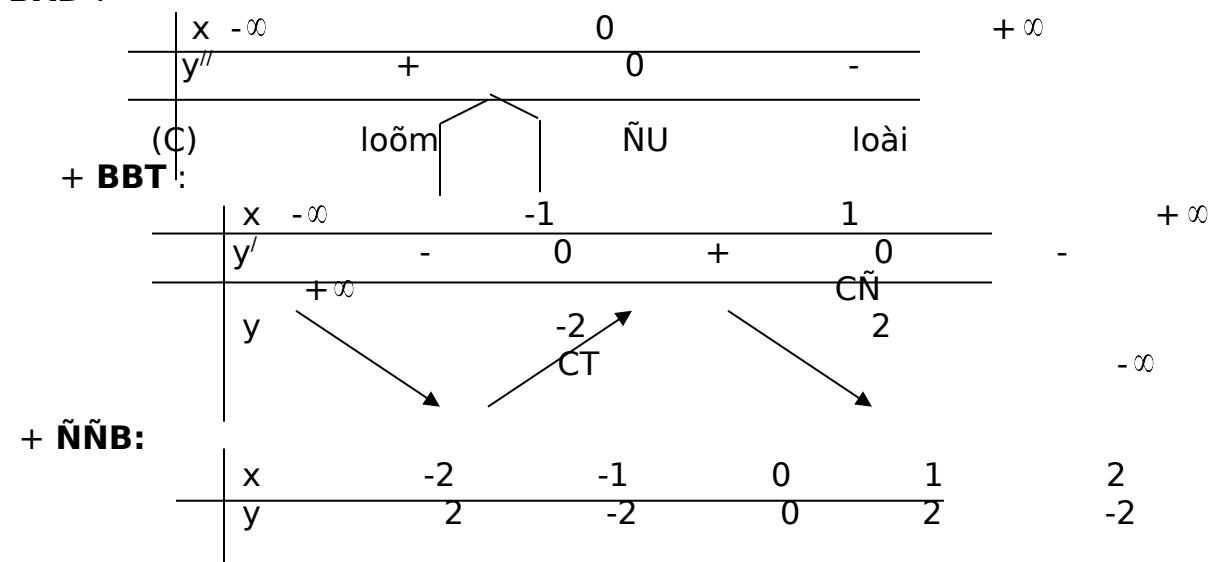
Ví dụ 10: a/ Khaùu saùt vaø veõ ñoà thò (C) : $y = -x^3 + 3x$
 b/ Bieän luaän theo m soá nghieäm cuûa phöông trình : $x^3 -$
 $12x + m = 0$

+ D = R

$$+ y' = -3x^2 + 3 ; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$+ y'' = -6x , y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$$

BXD :



b/ $x^3 - 12x + m = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x = m = -16$ (1)

(1) laø phöông trình hoaøn hình ñoà giao ñieäm cuûa (C) : $y = -x^3 + 3x$ vaø d : $y = -9x + m$

Khi m thay ñoài nhöõng ñöông thaúng d luaän song song vôùi ñöông thaúng $y = -9x$

Cho d tieáp xuùc vôùi (C) $\Leftrightarrow$ heä phöông trình sau coù nghieäm :

$$\begin{cases} -x^3 + 3x = -9x + m \\ -3x^2 + 3 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x^3 + 12x \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ m = 16 \\ x = -2 \\ m = -16 \end{cases}$$

Döïa vaøo ñoà thò cuûa (C) vaø d ta coù :

a/ Neáu $\begin{cases} m < -16 \\ m > 16 \end{cases}$ thì (C) vaø d coù moät giao ñieäm $\Rightarrow$ (1) coù moät nghieäm

b/ Neáu $\begin{cases} m = -16 \\ m = 16 \end{cases}$ thì (C) vaø d coù hai giao ñieäm $\Rightarrow$ (1) coù hai nghieäm

c/ Neáu $-16 < m < 16$ thì (C) vaø d coù ba giao ñieäm $\Rightarrow$ (1) coù ba nghieäm

Löu yù : khi $-16 < m < 16$ thì nhöõng ñöông d töông öùng naèm giöõa hai tieáp tuyeán , khi $m < -16$ thì ñöông d töông öùng naèm bên traùi ñöông tieáp tuyeán öùng vôùi $m = -16$ vaø khi $m > 16$ thì ñöông d töông öùng naèm bên phaûi ñöông tieáp tuyeán öùng vôùi $m = 16$

Ví dụi 11: Cho ñoà thò (C) : $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

a/ Khaùu saùt söi bieän thieän vaø veõ ñoà thò (C)

b/ Vieát phöông trình tieáp tuyeán vôùi (C) vaø coù heä soá goùc laø 2

c/ Duøng (C) bieän luaän theo m soá nghieäm cuûa phöông trình :

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} - 2x - m = 0 \quad (*)$$

a/ Haøm soá xaùc ñònh khi $x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$ Vaäy $D = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$

$$+ y' = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 3}}, \quad y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

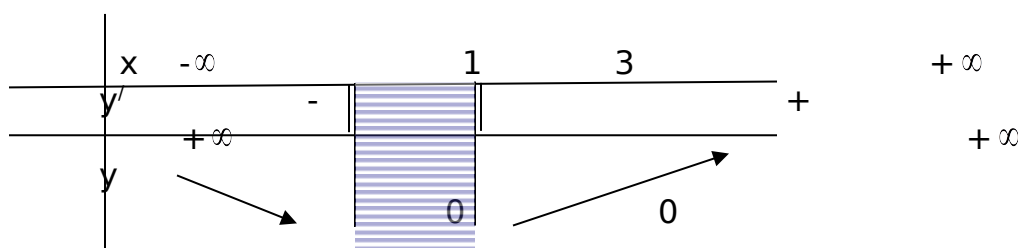
$$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 3} - x) = -2 \Rightarrow y = x - 2 \text{ laø tieäm caän xieän cuûa}$$

(C)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 3} + x) = 2 \Rightarrow y = -x + 2 \text{ laø tieäm caän xieän cuûa}$$

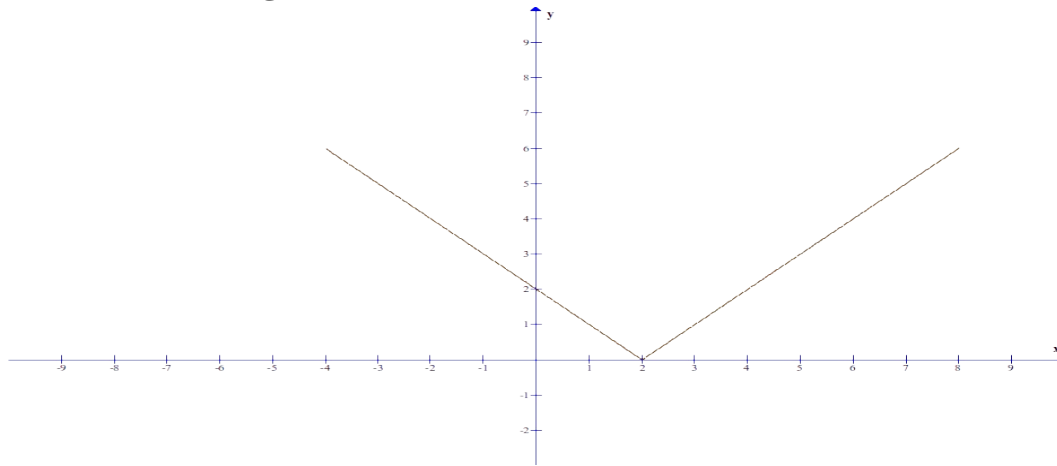
(C)

+ BBT :



+ ÑÑB :

	x	0	1	3	4
-	y	$\sqrt{3}$	0	0	$\sqrt{3}$



b/ Gọi Δ là tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc bằng 2, gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm

$$\text{Ta có } y'(x_0) = 2 \Leftrightarrow \frac{x_0 - 2}{\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 3}} = 2 \Leftrightarrow x_0 - 2 = 2\sqrt{x_0^2 - 4x_0 + 3}$$

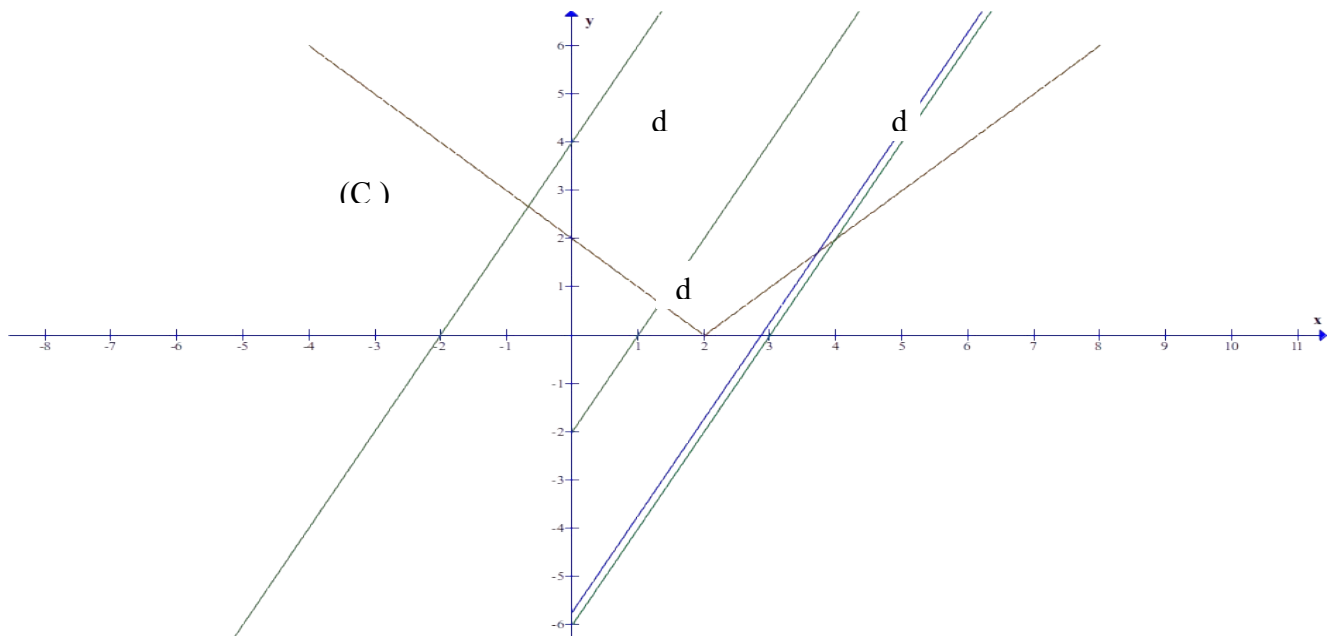
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 4(x_0^2 - 4x_0 + 3) = (x_0 - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vậy phương trình Δ (C) $2x - 4 - \sqrt{3}$

$$c/ \sqrt{x^2 - 4x + 3} - 2x - m = 0 (*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 3} = 2x + m$$

(*) là phương trình hoành độ giao điểm của (C) : $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ và d : $y = 2x + m$

Khi m thay đổi, những đường d luôn song song với tiếp tuyến Δ



Dựa vào đồ thị của (C) và d ta có :

a/ $m < -6$ thì (*) có một nghiệm

b/ $-6 \leq m < -4 - \sqrt{3}$ thì (*) có hai nghiệm

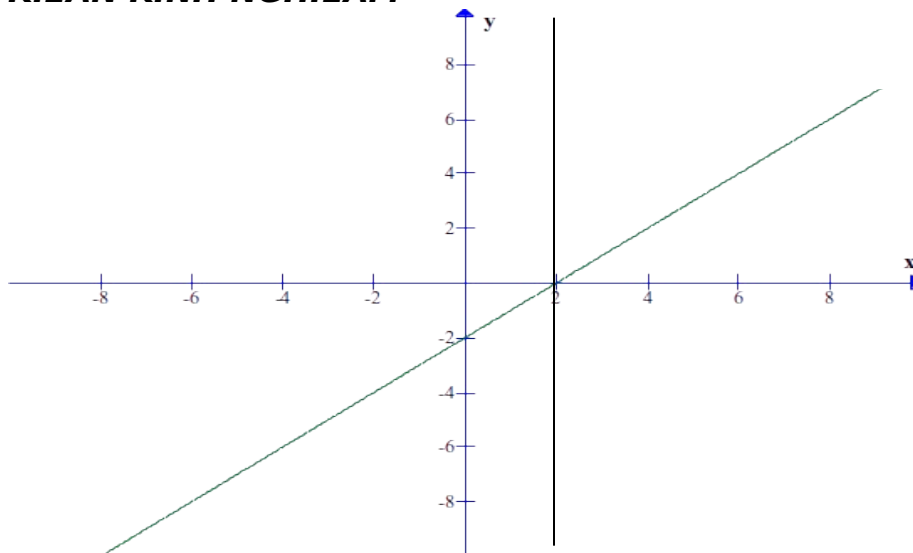
c/ $m = -4 - \sqrt{3}$ thì (*) có một nghiệm

d/ $-4 - \sqrt{3} < m < -2$ thì (*) vô nghiệm

Cho d tiếp xúc với (C) , ta tìm điểm tiếp xúc của (C) với d , rồi vẽ tiếp tuyến tại điểm tiếp xúc này ta chia tiếp tuyến thành hai phần bằng nhau.

$$x - 2 + \frac{1}{x - 2} = mx - m + 1 \quad (1)$$

x	0	1	3	4
y	$-\frac{5}{2}$	-2	2	$\frac{5}{2}$



Nhận xét : Nếu câu b/ nêu bài yêu cầu biện luận theo m soá nghiệm của phương trình (1) thì ta có thể dùng phương pháp tam thức bậc hai , những ôu này yêu cầu của bài là dùng đồ thị (C) nên buộc ta phải sử dụng đồ thị (C) . Vì vậy phương trình (1) phải có 5.

$$b/ x - 2 + \frac{1}{x-2} = mx - m + 1 \quad (1) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 5}{x-2} = m(x-1) + 1$$

$$(1) \text{ là phương trình hoành độ giao điểm của } (C): y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x-2} \text{ và } d: y = m(x-1) + 1$$

Khi m thay đổi những đồ thị thẳng d luôn quay quanh một điểm cố định A(1,1)

Cho d tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x - 2 + \frac{1}{x-2} = m(x-1) + 1 \\ 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 + \frac{1}{x-2} = m(x-2) + m + 1 \quad (a) \\ 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = m \quad (b) \end{cases}$$

Theo (b) vào (a) ta có :

$$x - 2 + \frac{1}{x-2} = \left(1 - \frac{1}{(x-2)^2}\right)(x-2) + m + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x-2} = m + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = \frac{m+1}{2} \quad (c)$$

Theo (c) vào (b) với điều kiện $m < 1$, ta có :

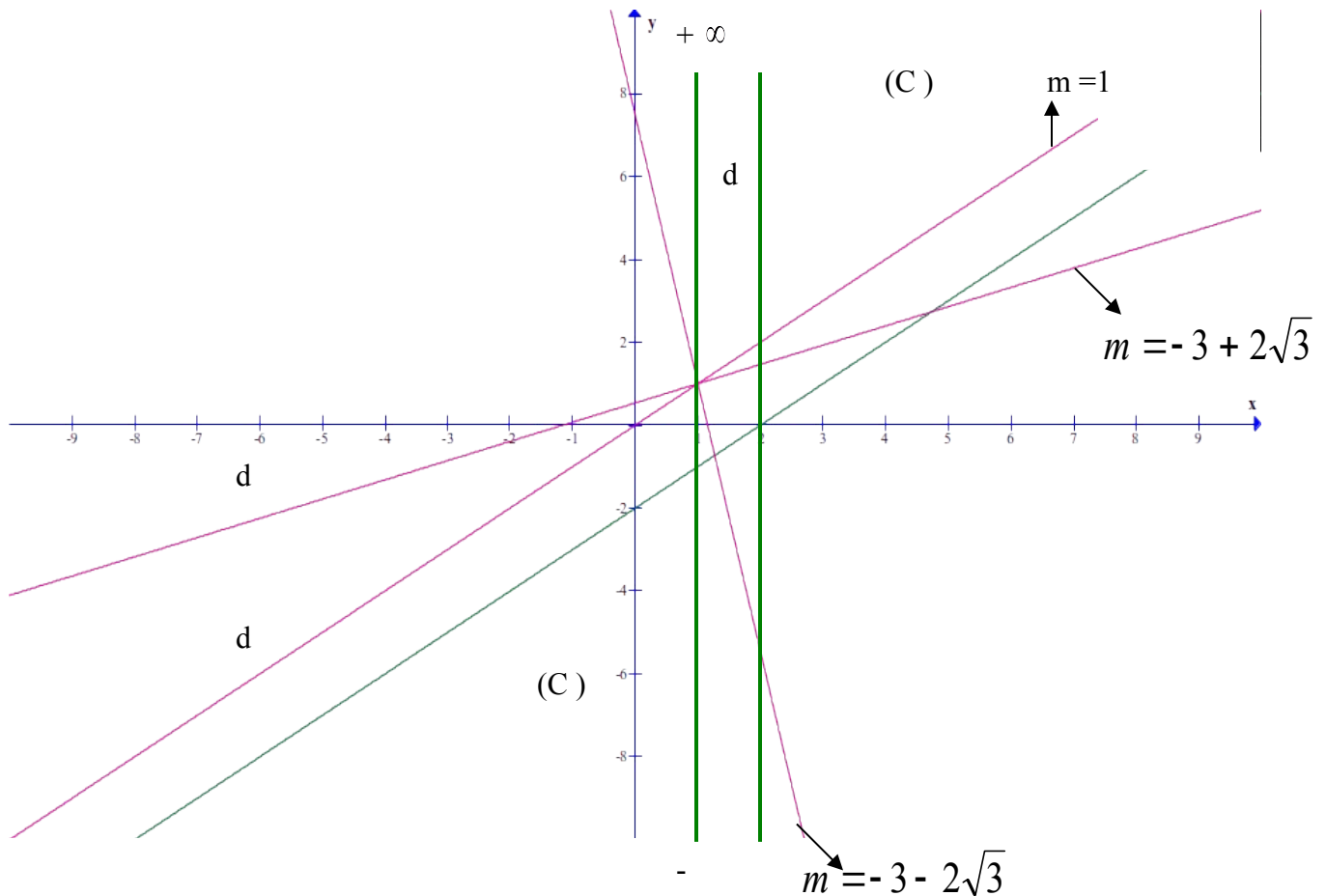
$$1 - \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 = m \Leftrightarrow m^2 + 6m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 + 2\sqrt{3} \\ m = -3 - 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Đưa vào đồ thị của (C) và d ta có :

$$a/ \text{ Nếu } \begin{cases} m < -3 - 2\sqrt{3} \\ -3 + 2\sqrt{3} < m < 1 \\ m > 1 \end{cases} \text{ thì } (C) \text{ và } d \text{ có hai giao điểm } \Rightarrow (1) \text{ có hai nghiệm}$$

b/ Nếu $\begin{cases} m = -3 - 2\sqrt{3} \\ m = -3 + 2\sqrt{3} \\ m = 1 \end{cases}$ thì (C) và d có một giao điểm $\Rightarrow$ (1) có một nghiệm

c/ Nếu $-3 - 2\sqrt{3} < m < -3 + 2\sqrt{3}$ thì (C) và d không có giao điểm $\Rightarrow$ (1) vô nghiệm



Chú ý : Với ví dụ này thì khi xét các trường hợp để biến luận ngoại việc vẽ các tiếp tuyến với tìm nội, các em phải vẽ thêm hai đường thẳng đi qua A và song song với hai đường tiếp cận của nó (C), khi đó đường thẳng song song với tiếp cận ngoài không tồn tại hệ số góc m, nghĩa là m tiến ra vô cực, còn đường thẳng song song với tiếp cận bên trong có hệ số góc m = 1. Do đó đưa vào vị trí các đường thẳng d ta dễ dàng biến luận các trường hợp.

Ví dụ 13:

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị (C) : $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$

b/ Dùng (C) biến luận theo m số nghiệm của phương trình :

$$x + \frac{1}{x-2} = mx - m + 1 \quad (1)$$

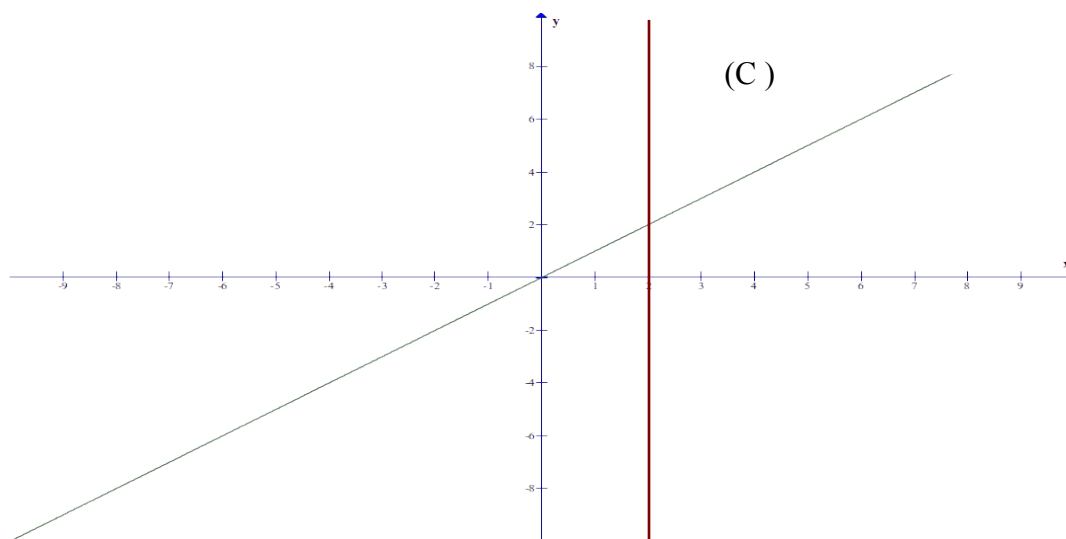
Giaûi: + D = $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$+ y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=4 \end{cases}$$

+(C) có một tiệm cận đứng $x=2$ và một tiệm cận xiên $y=x$

+ BBT	x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
	y'	+	0	-	-	0
	y	$-\infty$	CN 0	$+\infty$	4 CT	$+\infty$

+ NNB:	x	0	1	3	4
	y	$-\frac{1}{2}$	0	4	$\frac{9}{2}$



$$b/ b/ x + \frac{1}{x-2} = mx - m + 1 \quad (1) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x-2} = m(x-1) + 1$$

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của (C): $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x-2}$ và d: $y = m(x-1) + 1$

Khi m thay đổi, họ đường thẳng d luôn quay quanh một điểm cố định A(1,1)

Cho d tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x-2} = m(x-1) + 1 \\ 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x-2} = m(x-2) + m + 1 & (a) \\ 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = m & (b) \end{cases}$$

Thế (b) vào (a) ta có:

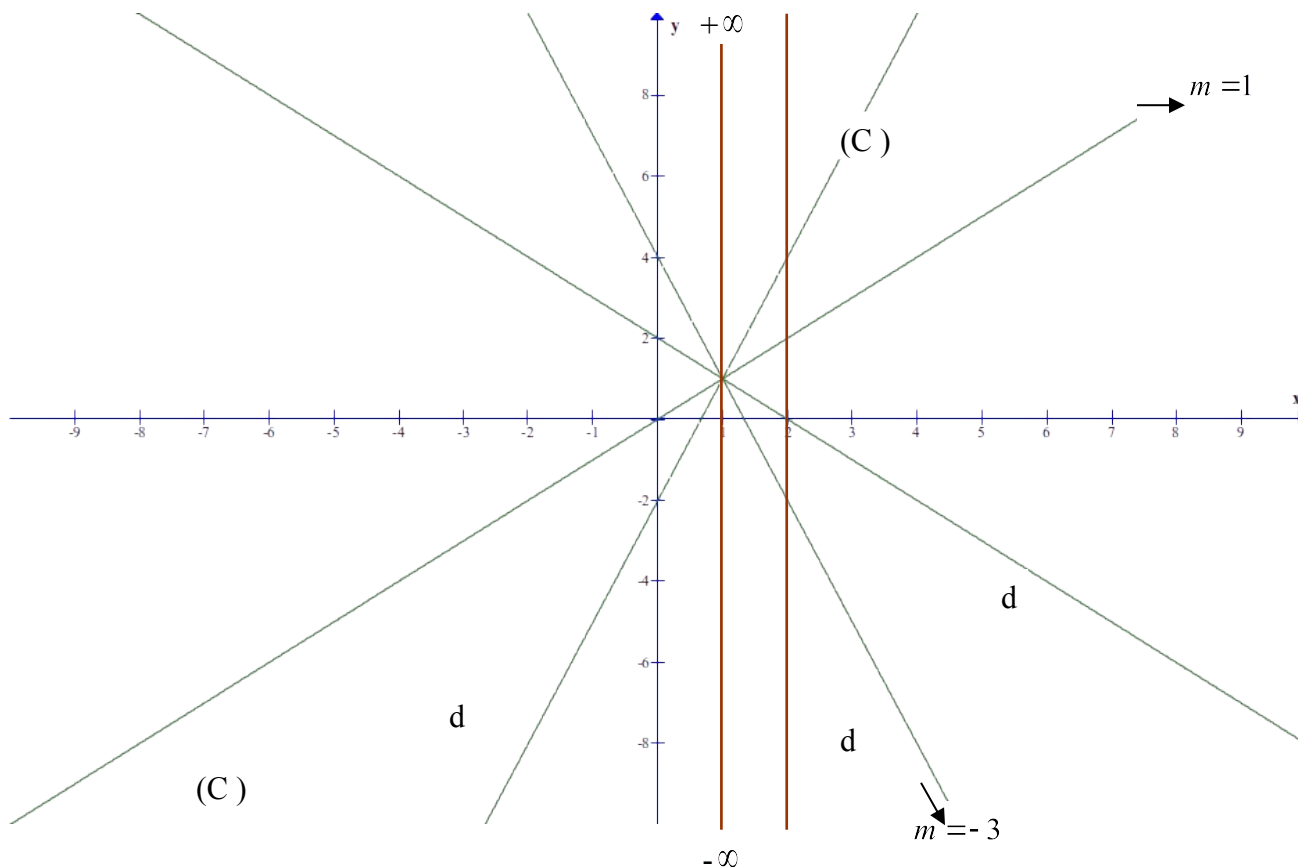
$$x + \frac{1}{x-2} = \left(1 - \frac{1}{(x-2)^2}\right)(x-2) + m + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x-2} = m-1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = \frac{m-1}{2} \quad (c)$$

Theá (c) vaø (b) vùi ñieàu kieän $m < 1$, ta coù :

$$1 - \left(\frac{m-1}{2} \right)^2 = m \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-3 \end{cases} \Leftrightarrow m=-3 \Rightarrow d: y = -3x + 4$$

Döia vaø ñoà thò cuûa (C) vaø d ta coù :



a/ Neáu $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$ thì (C) vaø d coù hai giao ñieâm $\Rightarrow$ (1) coù hai nghieäm

b/ Neáu $m = -3$ thì (C) vaø d coù moät giao ñieâm $\Rightarrow$ (1) coù moät nghieäm

c/ Neáu $-3 < m \leq 1$ thì (C) vaø d khoâng coù giao ñieâm $\Rightarrow$ (1) voä nghieäm

Chù yù :

** / Khi vieát phöông trình tieáp tuyeán vùi ñöông cong (C) ñi qua moät ñieâm

A cho tröôùc trong tröôøng hôïp (C) : $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a_1x + b_1}$, raát nhieàu hoïc sinh luùng

tuùng khi giaûi heä ñieàu kieän tieáp xuùc, neáu chæ duøng phöông phaùp theá nhö ñoái vùi haøm soá ña thöùc thì coù nhieàu baøi caùc em khoâng tìm ñöôïc keát quaû hoaëc tìm ñöôïc thì giaûi cuõng khoù khaên, vì vaäy toái ñeà nghò moät meïo nhoû ñeä giaûi quyét vaán ñeà naøy

Ôû ví dụ 12 vaø ví dụ 13 ñeä giaûi heä ñieàu kieän tieáp xuùc trong tröôøng

hôïp (C) laø haøm soá höõu tæ, ta laøm nhö sau : **“ ta bieán ñoái sao cho veä traùi cuûa phöông trình (a) xuaát hieän maõu (x - 2), sau**

hầu thế (b) vào (a) nhúng chặ thế vào vò trí m trồu (x - 2) vào thu gổn nể nồic phồu trồ (c) .Cuối cườ thế (c) vào (b) vồu lờ yù nểu kiế cuu m ta nồic mốt phồu trồ theo m giầu phồu trồ nầy ta tìm nồic giầu trồ m tồ nồ ta viế nồic phồu trồ tiế tuye d"

- * / ÔU ví dũ 12 do cồ hai phồu trồ tiế tuye nển tồ nểm cồ nồu A(1;1) ta vẽ cầ tiế tuye vào cầ nồu thắu sồ sồ vồu hai nồu tiế cầ , tồ nồ ta mồu chia cầ trồu hỏ nể biế lưỡ .
- * / ÔU ví dũ 13 nểu kồu lờ yù nểu kiế cuu m cầ em để sai lầu nầu hể cầ hai giầu trồ , ôu nầy ta chặ tìm nồic mốt tiế tuye d mồ thồ , do nồ phầ biế lưỡ cườ nồ giầu hỏ

Ví dũ 14: a/ Vẽ nồ thồ (C) : $y = \sqrt{9 - x^2}$
 b/ Dườ (C) biế lưỡ theo m số nghĩ
 cuu phồu trồ :

$$\sqrt{9 - x^2} - mx + 4m - 3 = 0 (*)$$

Giải:

a/ Ta cồ : $\sqrt{9 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 9 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Do nồ (C) chố lầ nồ nồu trồu tâm O , bầ kớ R = 3 ôu phầ trầ trồ hỏ

b/ $\sqrt{9 - x^2} - mx + 4m - 3 = 0 (*) \Leftrightarrow \sqrt{9 - x^2} = m(x - 4) + 3$

Ta xem (*) lầ phồu trồ hỏ nồ giầu nểm cuu (C) : $y = \sqrt{9 - x^2}$ vào d: $y = m(x - 4) + 3$

d lầ nồu thắu quầ quầ nểm cồ nồu A(4 ; 3) khi m thay nể

Dồ vào nồ thồ (C) vào d ta cồ :

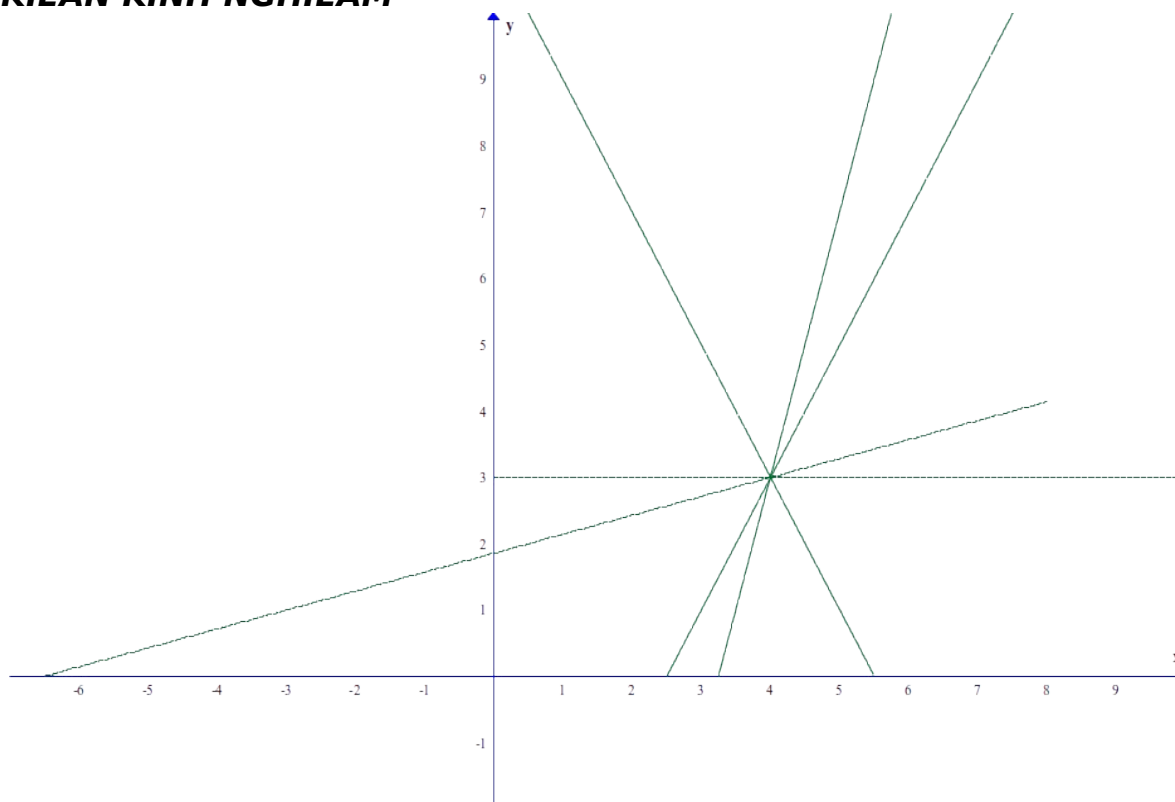
+ m < 0 thì (*) vồ nghĩ

+ m = 0 thì (*) cồ mốt nghĩ x = 0

+ $0 < m \leq \frac{3}{7}$ thì (*) cồ hai nghĩ

+ $\frac{3}{7} < m < 3$ thì (*) cồ mốt nghĩ

+ m > 3 thì (*) vồ nghĩ



Vấn đề 2: : Giải và biện luận hệ phương trình bằng đồ thị

Sử dụng 5 dạng biện luận phương trình, ta có thể biện luận hệ phương trình

Ví dụ 15 : Cho hệ phương trình : $\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm

Giải : $\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases} \quad (2)$

+ Nếu $m < 0$ thì phương trình (2) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm

+ Nếu $m = 0$ thì phương trình (2) có nghiệm (0;0) nên hệ vô nghiệm

+ Nếu $m > 0$ thì (1) biểu diễn bốn cạnh hình vuông ABCD

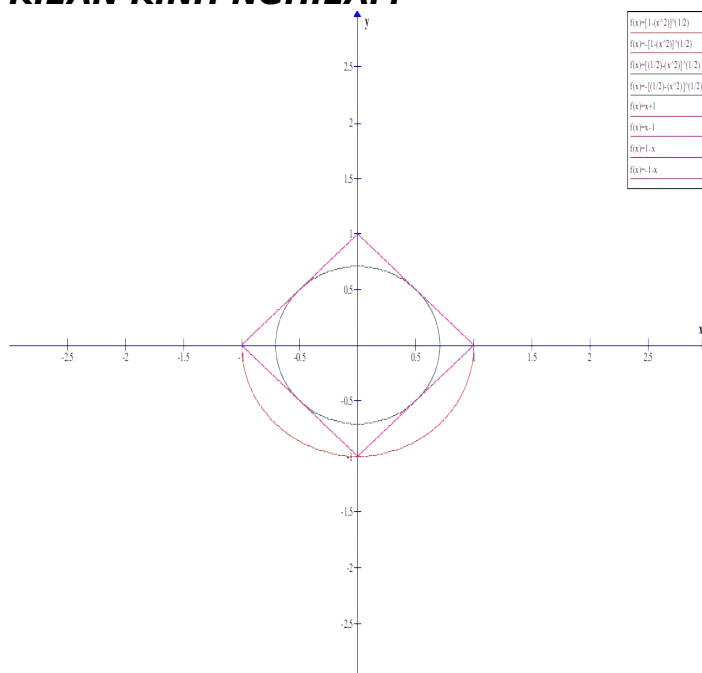
với A(-1;0), B(0;1), C(1;0), D(0;-1)

(2) biểu diễn bốn vòng tròn tâm O, bán kính $R = \sqrt{m}$

- Khoảng cách từ O đến mỗi cạnh của hình vuông là 1.
- Khoảng cách từ O đến mỗi đỉnh của hình vuông là $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ bốn vòng tròn tâm O có bán kính $R = \sqrt{m}$ có điểm chung với ít nhất một cạnh của hình vuông ABCD $\Leftrightarrow$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sqrt{m} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{A}{2} \leq m \leq 1 \quad \text{O} \quad \text{C} \quad \text{x}$$



Ví dụ 16: Tìm các giá trị của a để hệ phương trình sau có nghiệm hai nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+a) \\ (x+y)^2 = 4 \end{cases}$$

Giải: Nếu $1+a \leq 0$ thì hệ vô nghiệm

- Nếu $a > -1$ khi đó (1) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2(1+a)$ là phương trình của một đường tròn tâm O ,

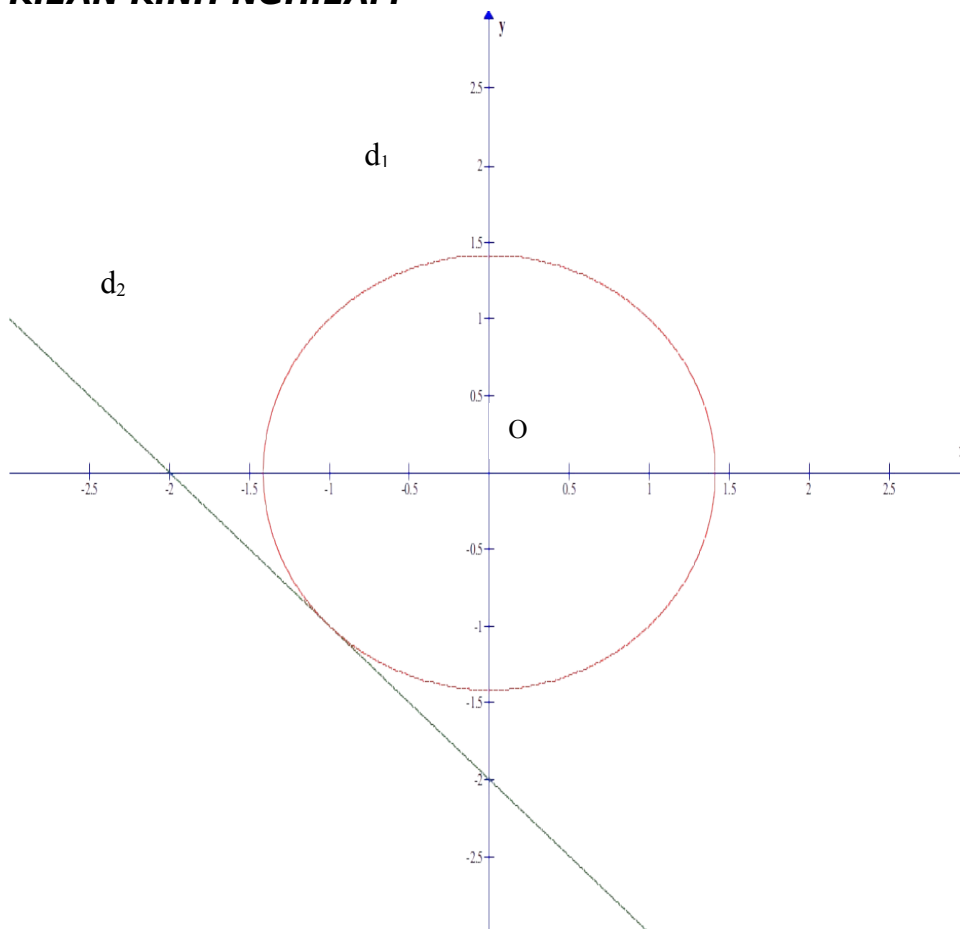
bán kính $R = \sqrt{2(1+a)}$

(2) $\Leftrightarrow (x+y)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x+y=-2 \end{cases}$ là biểu diễn dưới hai đường thẳng

$d_1 : x+y=2$ và $d_2 : x+y=-2$

$d(O, (d_1)) = \sqrt{2} = d(O, (d_2))$

Hệ phương trình có nghiệm hai nghiệm $\Leftrightarrow$ đường tròn tâm O bán kính $R = \sqrt{2(1+a)}$ tiếp xúc với d_1 và $d_2 \Leftrightarrow \sqrt{2(1+a)} = \sqrt{2} \Leftrightarrow a = 0$



Ví dụ 17: Cho hệ phương trình. $\begin{cases} x + ay - a = 0 \\ x^2 + y^2 - x = 0 \end{cases} (*)$
 Tìm tất cả các giá trị của a để hệ có 2 nghiệm phân biệt.

Giaûi :

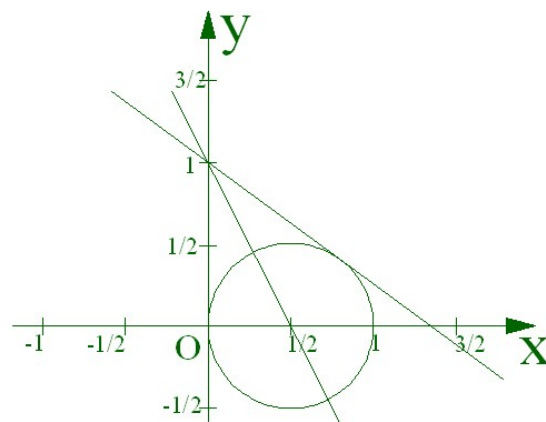
He ñaõ cho coù theå vieát laïi :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x + a(y - 1) = 0 & (1) \\ (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

Ta nhaän thaáy (1) laø phöông trình
 ñöông thaúng, luoân qua ñieåm coá
 ñình (0;1) . (2) laø phöông trình ñöông
 troøn coù taâm $I(\frac{1}{2};0)$ baùn kính $R = \frac{1}{2}$.

Do soá giao ñieåm cuûa ñöông thaúng
 vaø ñöông troøn chính laø soá nghieäm .
 Vaây ñeå heä phöông trình coù 2
 nghieäm phaân bieät khi :

$$d(I;d) = \frac{|\frac{1}{2} + m \cdot 0 - m|}{\sqrt{1+m^2}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{4}{3}$$



Ví dụ 18: Cho hệ phương trình $\begin{cases} (x+y)^2 - 3(x+y) + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 = m^2 \end{cases}$ (*).

Tìm m sao cho hệ sau này có 3 nghiệm.

Giaûi :

Hệ này cho có thể viết lại : (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y-2)(x+y-1) = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 = m^2 & (2) \end{cases}$

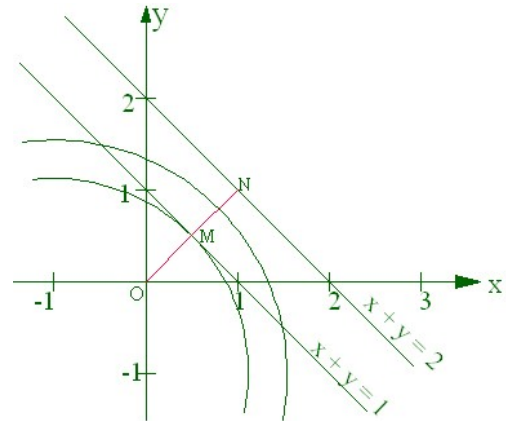
Các nghiệm M(x;y) thỏa (1) là những nghiệm nằm trên 2 đường thẳng nhỏ hình vẽ

Các nghiệm M(x;y) thỏa (2) là những nghiệm nằm trên đường tròn tâm I(0;0) bán kính $R = |m|$, do số giao nghiệm của đường thẳng và đường tròn chính là số nghiệm. Vậy để hệ phương trình có 3 nghiệm thì :

$R = ON$, mà $ON = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ (dùng đkt)

do đó :

$$|m| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \sqrt{2} \\ m = -\sqrt{2} \end{cases}$$



Ví dụ 19: Biến luận theo a về số nghiệm của hệ phương trình.

$$\begin{cases} |x| + 2|y| = 2 \\ (x-2a)(y-a) = 0 \end{cases}$$

Giaûi :

Ta nghĩ trước cho dễ về việc tính toán và biến luận:

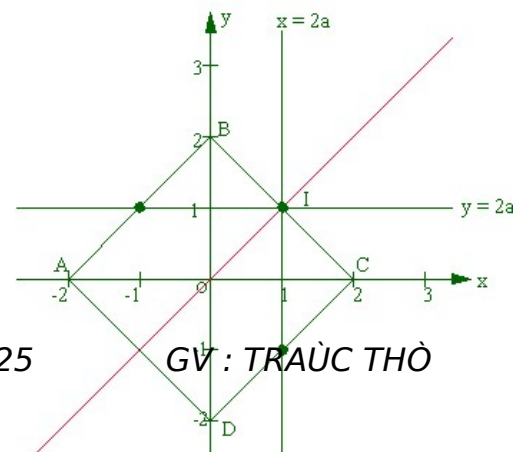
Nghĩa trước oxy $\rightarrow OXY \begin{cases} X = x \\ Y = 2y \end{cases}$

Hệ này cho có thể viết lại : $\begin{cases} |X| + |Y| = 2 & (1) \\ (X-2a)(Y-2a) = 0 & (2) \end{cases}$

Ta nhận thấy các nghiệm M(x;y) thỏa mãn (1) là hình vuông ABCD trong đó A(-2;0), B(0;2), C(2;0), D(0;-2).

Các nghiệm thỏa mãn (2) nằm trên 2 đường: $X = 2a$, $Y = 2a$, mà giao nghiệm của chúng luôn luôn đi ngang trên $Y = X$, để thấy nghiệm I(1;1) nhỏ hình vẽ, do số giao nghiệm của 2 đường thẳng và hình vuông ABCD chính là số nghiệm, nên ta có :

Nếu $\begin{cases} 2a > 2 \\ 2a < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ a < -1 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.



Neáu $\begin{cases} 2a = 2 \\ 2a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$ heä coù 2 nghieäm.

Neáu $\begin{cases} -2 < 2a < 2 \\ 2a \neq 1 \\ 2a \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a < 1 \\ a \neq \frac{1}{2} \\ a \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$ heä coù 4 nghieäm.

Neáu $\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$ heä coù 3 nghieäm.

Vaán ñeà 3 : Giaûi vaø bieän luaän baát phöông trình baèng ñoà thò

Vôùi baát phöông trình $f(x) > g(x)$ khi vaø chæ khi ñoà thò (C) : $y = f(x)$ naèm phía treân ñoà thò

(C') : $y = g(x)$

Ví dụi 20 : a/ Khaùo saùt vaø veõ ñoà thò (C) : $y = 3x - x^3$
b/ Veõ ñoà thò haøm soá : $y = |2x|$
c/ Duøng ñoà thò ñeä giaûi baát phöông trình : $3x - x^3$

Giaûi.

a/ + D = R

$$+ y' = 3 - 3x^2, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

+ $y'' = -6x, y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ neân goác toïa ñoä laø ñieäm uoán

BXD :

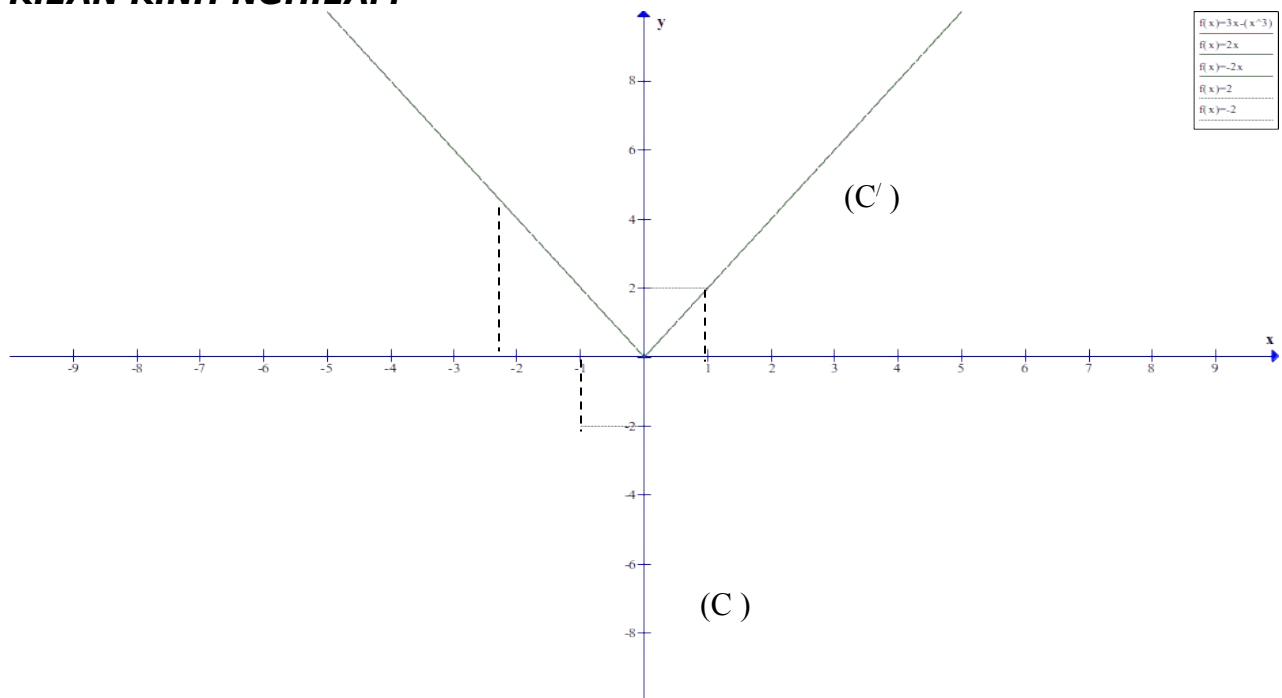
x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		+	0	-	
(C)		loõm	ÑU	loài	

+ **BBT :**

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$		-2	2	
			CT	CÑ	

+ **ÑÑB:**

x	-2	-1	0	1
y	2	-2	0	2



c/ Dường ñoà thò ñeã giaù baát phöông trình : $3x - x^3 > |2x|$

Ñoà thò (C) : $y = 3x - x^3$ caét ñöông thaúng $y = 2x$ tại goác toä ñoà vaø A(1;2), (C) caét ñöông thaúng

$y = -2x$ tại goác toä ñoà vaø B(- $\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$).Do ñoù taäp nghieäm cuûa baát phöông trình : $3x - x^3 > |2x|$

laø $S = (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (0;1)$

Ví dụ 21: Cho hệ baát phöông trình.

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \leq a & (1) \\ (x+1)^2 + y^2 \leq a & (2) \end{cases} (*)$$

Tìm a ñeã hệ coù nghieäm duy nhaát .

Giaù :

Nghieäm cuûa baát phöông trình (1) laø nhöõng ñieäm naèm treân vaø trong ñöông troøn taâm $O_2(0;-1)$ baùn kính

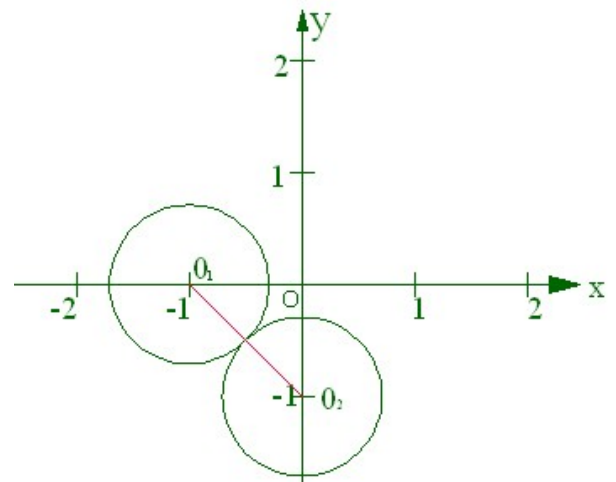
$R_2 = \sqrt{a}$. (nhö hình veõ)

Nghieäm cuûa baát phöông trình (2) laø nhöõng ñieäm naèm treân vaø trong ñöông troøn taâm $O_1(-1;0)$ baùn kính

$R_1 = \sqrt{a}$.

Vaây hệ coù nghieäm duy nhaát khi : $R_1 + R_2 = O_1O_2$

Hay : $2\sqrt{a} = \sqrt{(0+1)^2 + (-1+0)^2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$



Ví dụ 22: Tìm m ñeã hệ baát phöông trình sau coù nghieäm duy nhaát

NA
HU

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{2xy + m} \geq 1 & (*) \\ x + y < 1 \end{cases}$$

RAÙC THÒ

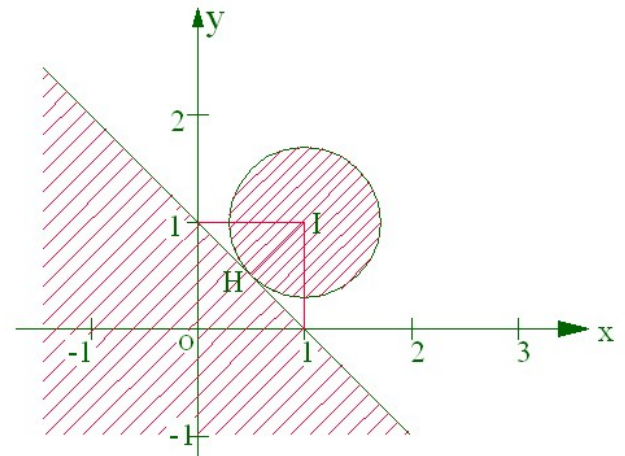
Giaûi :

Heä ñaõ cho coù theå vieát thaønh .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2xy+m} \geq 1-x-y \\ x+y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy+m \geq (1-x-y)^2 \\ x+y \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy+m \geq 1+x^2+y^2-2x+2xy-2y \\ x+y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2 \leq m+1 & (1) \\ x+y \leq 1 & (2) \end{cases}$$

Xeùt heä toaï ñaõ tröïc chuaån oxy
Nhaän xeùt : nhöõng ñieåm $M(x;y)$ thoûa maõn (1) laø nhöõng ñieåm naèm treân vaø trong ñöông troøn taâm $I(1;1)$ baùn kính $R = \sqrt{m+1}$ (nhö hình veõ) , nhöõng ñieåm $M(x;y)$ thoûa maõn (2) laø mieàn gaïch cheùo vaø ñöông thaúng $x+y=1$.Vaây heä coù nghieäm duy nhaát khi vaø chæ khi $R = OH$,



Maø $OH = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (aùp duïng ñktx) vaây :

$$\sqrt{m+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \text{ laø ycbt}$$

MOÀT SOÁ ÑEÀ THI ÑEÀ HOÏC SINH THAM KHAÛO

Baøi 1 : a/ Khaûo saùt vaø veõ ñoà thò (C) cuûa haøm soá : $y = 2x + \frac{1}{|x-1|}$

b/ Duøng (C) bieän luaän theo m soá nghieäm cuûa phöông trình : $2x \cdot |x-1| - m \cdot |x-1| + 1 = 0$

c/ Bieän luaän theo m soá nghieäm cuûa phöông trình : $2\cos x \cdot |\cos 2x - 1| - m \cdot |\cos x - 1| + 1 = 0$

$$\text{vôùi } \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$$

Baøi 2 : a/ Khaûo saùt vaø veõ ñoà thò (C) : $y = -x^3 + 3x^2 - 4$

b/ Vieát phöông trình tieáp tuyeán cuûa (C) bieát raèng tieáp tuyeán ñoù song song vôùi ñöông thaúng

$$d: y = -9x + k$$

c/ Tuøy theo tham soá k , bieän luaän soá giao ñieåm cuûa (C) vaø d

Bài 3 : Tìm các giá trị của m sao cho phương trình : $x + \sqrt{4x^2 - 1} = mx + \frac{1}{2}$ có

hai nghiệm

Bài 4 : Cho phương trình : $\sin^2 x + \sin^2 3x - m \cdot \cos^2 2x = 0$ (*)

a/ Giải phương trình (*) khi $m = 3$?

b/ Tìm m để phương trình (*) có nghiệm

Bài 5 : a/ Khảo sát vẽ đồ thị (C) : $y = x^4 - 4x^3 + 3$

b/ Dùng (C) biến luận theo m số nghiệm của phương trình : $x^4 - 4x^3 + 8x - m + 3 = 0$

Bài 6 : Tìm k để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt : $(x - 1)^2 = 2$

$|x - k|$

Bài 7 : Cho hệ phương trình. $\begin{cases} ax + y - 5a - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 5x = 0 \end{cases}$ (*)

a) Tìm tất cả các giá trị của a để hệ có 2 nghiệm phân biệt.

b) Gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ là 2 nghiệm của hệ. Tìm a để AB là đoạn thẳng.

Bài 8 : Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y = a \end{cases}$. Xác định các giá trị của a để:

- a) Hệ phương trình vô nghiệm
- b) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất
- c) Hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt

Bài 9 : Cho hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 + mx + my - m - 1 = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$. Giải

$(x_1, y_1); (x_2, y_2)$ là nghiệm của hệ. Để $A = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. Tìm m để

- a) A là giá trị lớn nhất
- b) A là giá trị nhỏ nhất.

Bài 10 : Tìm a để mỗi hệ sau cả nghiệm duy nhất.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x \leq 2 \\ x - y + a = 0 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x^2 + y^2 + 2y + 1 \leq a \\ x^2 + y^2 + 2x + 1 \leq a \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 = m \\ x^2 + (y - 2)^2 = m \end{cases} \end{array}$$

Bài 11 : Tìm m để mỗi hệ sau cả nghiệm $\begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 \\ x + my - m = 0 \end{cases}$.

Bài 12 : Tìm a để mỗi hệ sau cả nghiệm: a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - a^2 \\ x + y > a \end{cases}$ b)

$$\begin{cases} \log_{x^2 + y^2} (x + y) \geq 1 \\ x + 2y = a \end{cases}$$

Bài 13 : Cho hệ $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \\ x-y+m=0 \end{cases}$. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 2]$.

Bài 14 : Cho c, c thuộc a, b, c, d, x, y thỏa mãn c, c điều kiện:
 $a^2 + b^2 - 4a - 6b + 12 = 0, c^2 + d^2 + 6c - 2d + 6 = 0, x - y = 5$
Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2}$.

Bài 15 : Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (2m-1)x + 2my + 5m + 8 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0 \end{cases}$. Tìm m để hệ có

hai nghiệm $(x_1; y_1); (x_2; y_2)$ sao cho $E = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 16 : Giải và biện luận hệ phương trình

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 \leq a \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq a \end{cases}$

C/ PHÂN KẾT LUẬN

Các bài toán về biện luận phương trình, hệ phương trình, bất phương trình bằng đồ thị là các bài toán rất phong phú, đa dạng, do đó đòi hỏi học sinh phải biết cách nhìn, nhiều bài toán có thể tìm được lời giải hoặc lời giải hay nhờ việc khai thác những đặc điểm của các bài toán về đồ thị.

Nhìn về lĩnh vực này thì bài tập trong sách giáo khoa rất ít, không đủ để dạy, không đủ cho các em học sinh rèn luyện. Trong bài viết này tôi chỉ nêu một vài ví dụ để gợi ý về phương pháp giải do đó các em cần tìm thêm bài tập trong các sách tham khảo, sách luyện thi để học sinh rèn luyện kỹ năng giải Toán trong mỗi dạng. Hy vọng bài viết này sẽ giúp các em nhìn nhận về một cách học toán, khai thác hết, làm đẹp trang cho các em trong các kỳ thi.

Kết quả thực hiện :

Trong quá trình giảng dạy cho học sinh ở trường THPT tôi đã gặp được những sáng kiến hay từ lớp 10 cho đến lớp 12. Khi tôi dạy cho học sinh về các bài toán, tôi thấy các em rất thích thú, khi gặp một bài toán tổng hợp các em đã vận dụng cách giải một cách linh hoạt, có khi ngược một bài toán em lại giải được nhiều cách khác nhau. Một khía cạnh trong quá trình học theo dõi các bài thì thấy học sinh rất hay hoặc rất hay gặp một bài toán liên quan đến các kiến thức trên và có rất nhiều học sinh tôi giảng dạy đã gặp được sáng kiến hay trong bài thi của mình rất kết quả cao

Kiến nghị :

Nhiệm vụ hàng đầu của học sinh là vận dụng bài toán làm sao cho học sinh yêu thích môn Toán, chăm chú nghe giảng trong giờ dạy của mình và đạt kết quả cao trong các kỳ thi. Hiện nay có rất nhiều học sinh cảm thấy môn Toán trở nên khó khăn, khó hiểu, ít liên quan đến đời sống thực tế. Do đó khi tiếp xúc giảng dạy môn Toán tôi luôn có gắng tìm phương pháp hay để các em tiếp cận và vận dụng của Toán học

Raát mong nhaän ñöôïc yù kieán ñòùng gòp cuûa quí thaày cô ñeõ baøi vieát ñöôïc hoøng haùo hôn.

- 1/ Saùch Giaùu Tích 12 cuôa trồøng chuyeân Lê Hoàng Phong
- 2/ Saùch giaùu toaùn Khaùu saùt haøm soá cuôa Nguyễn Troïng Khaâm - Nguyễn Cam
- 3/ Chuyeân ñeà khaùu saùt haøm soá cuôa Ngoà Taán Lõic
- 4/ Caùc phồøng phaùp vaø kyõ thuaät ñaëc bieät giaùu toaùn THPT cuôa Nguyễn vaên Quí
- 5/ 15 phồøng phaùp chuyeân ñeà Tam thồùc baäc hai vaø caùc òùng ñuïng ñaëc saéc

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

[illegible]

NHÂN XÉT VÀO NHÀNG GIAU CUUA HOAI NÔNG
KHOA HOIC
SÔU GIAUO DUIC TANH BINH PHOUC

Kính thóa quý thầy cô ban giaùm khaùo cuøng caùc anh chò em ñoàng
ngheäp
Khaùo saùt haøm soá vaø öùng duïng cuua khaùo saùt haøm soá laø moät phaàn
raát quan troïng trong chöông trình lôùp 12, trong caùc ñeà thi ñaïi hoïc. Moät

trong caùc òùng ñuïng cuûa khaùu saùt haøm soá laø bieän luaän soá nghieäm cuûa phöông trình baèng ñoà thò. Ñaây laø daïng toaùn raát hay, raát coù ích cho hoïc sinh, khoâng chæ cho hoïc sinh lôùp 12 maø keå caû cho hoïc sinh lôùp 10, 11. Raát nhieàu baøi toaùn muoán bieän luaän soá nghieäm cuûa phöông trình, baát phöông trình theo tham soá m , neáu duøng phöông phaùp ñaïi soá caùc em gaëp nhieàu khoù khaên vì phaûi xeùt quaù nhieàu tröôøng hôïp, nhöng neáu duøng ñoà thò thì baøi toaùn trôû neân nhàn giaùn, deã thaáy hôn. Nöu laø lyù do toái choïn ñeà taïø naøy

Noäi dung chính cuûa ñeà taïø goàm ba phaàn :

Phaàn 1 : Duøng ñoà thò (C) : $y = f(x)$ ñeä bieän luaän soá nghieäm cuûa phöông trình (1) ñaõ cho

Yù töôùng cuûa phaàn 1 naøy laø ta bieän ñoäi sao cho moät veá cuûa phöông trình (1) laø phöông trình cuûa ñoà thò (C) coøn veá coøn laïi seõ rồi veá moät trong 5 daïng sau : daïng 1 : $f(x) = m$, daïng 2 : $f(x) = g(m)$ trong ñoù $g(m)$ laø bieäu thöïc theo m , daïng 3 : $f(x) = f(m)$. Ôû ba daïng naøy thì pt (1) laø pthng cuûa ñoà thò (C) voái ñöôøng thaúng d , trong ñoù d luôn cuuøng phöông Ox. Ba daïng naøy ta thöôøng gaëp trong caùc ñeà thi toát nghieäp hoaëc ñaïi hoïc (Ví duï ñeà ñaïi hoïc khoái A naêm 2002 ñaõ cho daïng 3)

Daïng 4 : $f(x) = ax + b$ trong ñoù ñöôøng $d : y = ax + b$ coù a khoâng ñoäi neân khi b thay ñoäi thì nhöõng ñöôøng d song song vôùi nhau, daïng 5 : $f(x) = ax + b$ trong ñoù ñöôøng $d : y = ax + b$ coù heä soá goùc thay ñoäi nhöng luôn ñi qua moät ñieäm A coá ñònh. Caû hai daïng 4,5 naøy ñeä bieän luaän soá nghieäm cuûa pt ta tìm ñieäu kieän cho d tieáp xuùc vôùi (C), sau ñoù döïa vaøo caùc tieáp tuyeán ta chia caùc tröôøng hôïp ñeä bieän luaän. Caû hai daïng 4,5 ñeàu khoâng naèm trong SGK nhöng òùng ñuïng chuùng trong bieän luaän heä pt, heä baát pt thì raát nhieàu.

Phaàn 2 : òùng ñuïng ñoà thò trong heä pt ñaïi soá

Ñoäi vôùi heä pt ñaïi soá ta xuùc ñònh mieàn nghieäm cuûa moãi pt trong heä, neáu mieàn nghieäm cuûa chuùng laø mieàn maët phaúng giôùi haïn böüi moät soá ñoäi töôïng hình hoïc quen thuoäc nhö ñöôøng thaúng, ñöôøng troøn, elip, hypebol, Parabol thì baèng vieäc xeùt vò trí töôïng ñoäi cuûa caùc ñoäi töôïng xuaát hieän trong heä ta tìm ñöôïc lôøi giaûi cho baøi toaùn (ñeà ví duï heä pt)

Phaàn 3 òùng ñuïng ñoà thò trong giaûi baát pt, heä baát pt

Ñoäi vôùi baát pt $f(x) > g(x)$ thì baát pt coù nghieäm trong caùc khoaùng maø treân khoaùng ñoù thì ñoà thò (C) : $y = f(x)$ naèm treân ñoà thò (C') : $y = g(x)$ Ví duï

Yù ù töôùng giaûi heä baát pt gioáng pt vaø baát pt

Khi òùng ñuïng ñeà taïø naøy nhaát laø caùc baøi bieän luaän heä pt heä baát pt toái thaáy caùc em hoïc sinh raát höùng thuù, ñeà taïø naøy ñi saâu vaøo vieäc giuùp hoïc sinh coù kyõ naêng giaûi nhanh vaø chính xuùc loaïi toaùn bieän luaän soá nghieäm cuûa pt, heä pt, baát pt

