

CD11: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC, TÌM GTLN, GTNN

Dạng 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất
Dạng 2.1: Bất đẳng thức về chứng minh tổng phân số tự nhiên
Dạng 2.2: Bất đẳng thức về chứng minh tổng lũy thừa
Dạng 2.3: Bất đẳng thức về chứng minh tích của một dãy
Dạng 3: Bất đẳng thức dạng chữ

Dạng 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Lạng Giang 2022 - 2023)

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \sqrt{x} + (x - 2y + 1)^2 + 10$ với $x \geq 0$ là:
A. 10 **B.** 11 **C.** 1 **D.** - 10

Lời giải

Chọn A

$$\sqrt{x} \geq 0, \forall x \geq 0; (x - 2y + 1)^2 \geq 0, \forall x, y$$

Ta có:

$$\Rightarrow \sqrt{x} + (x - 2y + 1)^2 \geq 0, \forall x \geq 0, \forall y$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{x} + (x - 2y + 1)^2 + 10 \geq 10, \forall x \geq 0, \forall y$$

Giá trị nhỏ nhất của C bằng 10 khi:

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ (x - 2y + 1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C bằng 10 khi $x = 0; y = \frac{1}{2}$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Lục Nam - Bắc Giang 2021 - 2022)

Cho số $x \in \mathbb{Z}$ để $B = \frac{2018 - x}{2017 - x}$ có giá trị lớn nhất. Giá trị lớn nhất của B là :
A. 1 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

$$B = \frac{2018 - x}{2017 - x} = \frac{2017 - x + 1}{2017 - x} = 1 + \frac{1}{2017 - x}$$

Ta có:

Suy ra B đạt giá trị lớn nhất khi $2017 - x$ là số dương nhỏ nhất.

Mà x là số nguyên $\Rightarrow 2017 - x = 1 \Rightarrow x = 2016$.

Khi đó $B = 1 + 1 = 2$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Thủy - Phú Thọ 2021 - 2022)

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |y - 2| + |y - 5|$ là

- A. 2 B. 3 C. 5 D. 7

Lời giải

Chọn B

Ta có: $A = |y - 2| + |y - 5| = |y - 2| + |5 - y|$

Áp dụng BĐT giá trị tuyệt đối: $|a| + |b| \geq |a + b|$. Dấu '=' xảy ra khi $a \cdot b \geq 0$.

Ta có $|y - 2| + |5 - y| \geq |y - 2 + 5 - y| = 3$. Dấu '=' xảy ra khi $(y - 2)(5 - y) \geq 0 \Rightarrow 2 \leq y \leq 5$
 $\Rightarrow A \geq 3$

Vậy A có giá trị nhỏ nhất bằng 3 khi $2 \leq y \leq 5$

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Thủy - Phú Thọ 2021 - 2022)

Với x nguyên, giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{2022 - x}{2 - x}$ là

- A. 2021 B. 2020 C. 2019 D. 2018

Lời giải

Chọn A

Ta có: $A = \frac{2022 - x}{2 - x} = 1 + \frac{2020}{2 - x}$, $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2 - x \in \mathbb{Z}$

Để A có giá trị lớn nhất thì $2 - x$ là số nguyên dương nhỏ nhất, hay $2 - x = 1 \Rightarrow x = 1$.

Vậy GTLN của A là 2021 khi $x = 1$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, huyện Nam Trà My, huyện Thăng Bình, trường Đào Duy Từ 2018 - 2019; huyện Lâm Thao 2016 - 2017)

Cho $(a - b)^2 + 6ab = 36$. Giá trị lớn nhất của $x = a \cdot b$ là:

- A. 6 B. -6 C. 7 D. 5

Lời giải

Chọn A

Ta có $(a - b)^2 + 6ab = 36$

Suy ra: $6ab = 36 - (a - b)^2 \leq 36$

Suy ra $ab \leq \frac{36}{6} \Rightarrow ab \leq 6$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = \pm\sqrt{6}$

Vậy x đạt giá trị lớn nhất bằng 6 khi $a = b = \pm\sqrt{6}$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Than Uyên - Lai Châu 2022 - 2023)

$$A = \frac{2024}{4 - |2022x - 1|}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

Lời giải

Với mọi x ta có: $|2022x - 1| \geq 0 \Rightarrow 4 - |2022x - 1| \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{4 - |2022x - 1|} \geq \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{1}{4 - |2022x - 1|} \cdot 2024 \geq \frac{1}{4} \cdot 2024 \Rightarrow \frac{2024}{4 - |2022x - 1|} \geq 506$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $2022x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2022}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 506 khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2022}$

Câu 2. (HSG 7 huyện Lương Tài - Bắc Ninh 2022 - 2023)

Cho x thỏa mãn: $|x - 2| + |x - 3| + |x - 4| + |x - 5| = 4$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của x , M là giá trị lớn nhất của x . Tính giá trị của $A = m + M$.

Lời giải

Áp dụng tính chất: $|a| \geq a$, dấu “=” xảy ra khi $a \geq 0$, ta được:

$|x - 2| \geq x - 2$ dấu “=” xảy ra khi $x - 2 \geq 0$

$|x - 3| \geq x - 3$ dấu “=” xảy ra khi $x - 3 \geq 0$

$|4 - x| \geq 4 - x$ dấu “=” xảy ra khi $4 - x \geq 0$

$|5 - x| \geq 5 - x$ dấu “=” xảy ra khi $5 - x \geq 0$

Suy ra: $|x - 2| + |x - 3| + |4 - x| + |5 - x| \geq x - 2 + x - 3 + 4 - x + 5 - x = 4$

Dấu “=” xảy ra khi:
$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \\ 5 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq x \leq 4$$

Suy ra 3 là giá trị nhỏ nhất của x , 4 là giá trị lớn nhất của x .

Suy ra: $A = m + M = 3 + 4 = 7$

Câu 3. (HSG 7 huyện Lương Tài - Bắc Ninh 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \dots + |x - 23|$

Lời giải

$$A = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \dots + |x - 23|$$

Ta có:

thì:

$$A = |x-1| + |x-2| + \dots + |11-x| + |x-12| + |13-x| + \dots + |23-x|$$

Áp dụng tính chất $|a| \geq a$, dấu “=” xảy ra khi $a \geq 0$, ta được:

$$|x-1| \geq x-1; |x-2| \geq x-2; \dots; |x-11| \geq x-11;$$

$$|x-12| \geq 0; |13-x| \geq 13-x; \dots; |23-x| \geq 23-x$$

$$\therefore A \geq x-1 + x-2 + \dots + x-11 + 0 + 13-x + \dots + 23-x$$

Suy ra:

$$= 23-1 + 22-2 + \dots + 13-11 + 0 = 22 + 20 + 18 + 16 + 14 + \dots + 2 = \frac{(22+2) \cdot 11}{2} = 132$$

Dấu “=” xảy ra khi $x=12$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 132 khi $x=12$.

Câu 4. (HSG 7 trường Bồ Lý 2015 - 2016; huyện Hoàng Hóa; trường Phạm Kính Ân 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

$$A = |x+1| + 5$$

a)

$$B = \frac{x^2 + 15}{x^2 + 3}$$

b)

Lời giải

a) Với mọi x , ta có: $|x+1| \geq 0 \Rightarrow A = |x+1| + 5 \geq 5$, dấu “=” xảy ra khi $x = -1$

Vậy $\text{Min} A = 5 \Leftrightarrow x = -1$.

$$\text{b) Ta có: } B = \frac{x^2 + 15}{x^2 + 3} = \frac{(x^2 + 3) + 12}{x^2 + 3} = 1 + \frac{12}{x^2 + 3}$$

Với mọi x , ta có:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{12}{x^2 + 3} \leq \frac{12}{3} \Rightarrow \frac{12}{x^2 + 3} \leq 4 \Rightarrow 1 + \frac{12}{x^2 + 3} \leq 5$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x=0$.

Vậy GVLN của B là 5 khi $x=0$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2016 - 2017; huyện Bồ Trạch, huyện Vị Thanh 2017 - 2018; huyện Hà Đông 2022 - 2023)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn: $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của c .

Lời giải

Vì: $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ nên $0 \leq a+b+1+c+2 \leq c+2+c+2+c+2$.

Suy ra: $0 \leq 4 \leq 3c+6$ (vì $a+b+c=1$).

$$\text{Hay } 3c \geq -2 \Rightarrow c \geq -\frac{2}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của c là $-\frac{2}{3}$ khi đó $a+b = \frac{5}{3}$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Bình Xuyên - Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho x là số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |2x - 1| + |2x - 2| + \dots + |2x - 10|$

Lời giải

Ta có: $A = |2x - 1| + |2x - 2| + \dots + |2x - 10|$

$$A = (|2x - 1| + |2x - 10|) + (|2x - 2| + |2x - 9|) \dots + (|2x - 5| + |2x - 6|)$$

$$A = (|2x - 1| + |10 - 2x|) + (|2x - 2| + |9 - 2x|) \dots + (|2x - 5| + |6 - 2x|)$$

$$A \geq |2x - 1 + 10 - 2x| + |2x - 2 + 9 - 2x| + |2x - 5 + 6 - 2x| = 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25$$

$$\begin{cases} (2x-1)(10-2x) \geq 0 \\ (2x-2)(9-2x) \geq 0 \\ \dots \\ (2x-5)(6-2x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5} \leq x \leq 5 \\ 1 \leq x \leq \frac{9}{2} \\ \dots \\ \frac{5}{2} \leq x \leq 3 \Rightarrow \frac{5}{2} \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Dấu = xảy ra khi:

Câu 7. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2022 - 2023)

Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 2023ca - ab - bc$

Lời giải

Ta có: $P = 2023ca - ab - bc = 2023ca - b(a+c)$

Có: $(x - y)^2 \geq 0 \quad \forall x, y \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \quad \forall x, y$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$. (*)

$$b(a+c) \leq \frac{b^2 + (a+c)^2}{2}$$

+ Áp dụng bất đẳng thức (*), ta có:

$$-b(a+c) \geq -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - ac = \frac{-2}{2} - ac = -1 - ac$$

Suy ra:

$$\text{Do đó: } P \geq 2023ca - 1 - ac = 2022ac - 1$$

+ Lại có: $|ac| = |a| \cdot |c| \leq \frac{a^2 + c^2}{2} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = \frac{2}{2} = 1$, suy ra $-1 \leq ac \leq 1$.

Do đó: $P \geq 2022ac - 1 \geq 2022 \cdot (-1) - 1 = -2023$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} b = a + c \\ |a| = |c| \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -c \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -a \\ a^2 + 0^2 + a^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = 0 \\ c = -a \\ a^2 = \frac{1}{6} \\ b = 2a \\ c = a \end{cases}$$

Vậy $P_{\min} = -2023$ khi:

$$(a; b; c) \in \left\{ (1; 0; -1), (-1; 0; 1), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{-2}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Diễn Châu 2022 - 2023)

Tìm số nguyên x để biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất, tìm giá trị lớn nhất đó: $P = \frac{x+1}{2x-2}$

Lời giải

$$P = \frac{x+1}{2x-2} = \frac{(x-1)+2}{2(x-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x-1}$$

Ta có:

Để $P_{\max} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1}$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow x-1$ đạt giá trị nhỏ nhất và $x-1 > 0$.

Mà x nguyên nên $x=2$.

Vậy $P_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2-1} = \frac{3}{2}$ khi $x=2$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

$$D = \frac{2022}{2023 - |x - 2024|} \text{ với } x \in \mathbb{Z}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

Lời giải

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2023 - |x - 2024| \in \mathbb{Z}$

Để D đạt giá trị nhỏ nhất thì $2023 - |x - 2024|$ lớn nhất và âm.

$$\Rightarrow 2023 - |x - 2024| = -1 \Rightarrow |x - 2024| = 2024$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 4048$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức D là -2022 khi $x=0$ hoặc $x=4048$.

Câu 10. (HSG 7 huyện Thái Hòa - Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = |x+1| + |x-1| + \sqrt{x^2+4}$

Lời giải

Ta có: $|x+1|+|x-1|=|x+1|+|1-x|\geq|x+1-x+1|=2$ với mọi x và $\sqrt{x^2+4}\geq 2$ với mọi x .

Suy ra: $Q\geq 4$ với mọi x .

Dấu bằng xảy ra khi $(x+1)(1-x)>0$ và $x^2=0$ hay $x=0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $Q=3$ khi $x=0$.

Câu 11. (HSG 7 huyện Đông Hưng, huyện Hưng Hà, trường Lê Quý Đôn - Hà Tĩnh, TP Ninh Bình 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F=|x-2022|+|x-2023|$

Lời giải

$$F=|x-2022|+|x-2023|=|x-2022|+|2023-x|$$

Vì $|x-2022|\geq x-2022$ dấu “=” xảy ra khi $x-2022\geq 0\Rightarrow x\geq 2022$

và $|2023-x|\geq 2023-x$ dấu “=” xảy ra khi $2023-x\geq 0\Rightarrow x\leq 2023$

Suy ra: $F=|x-2022|+|2023-x|\geq x-2022+2023-x=1$

Dấu “=” xảy ra khi: $\begin{cases} x\geq 2022 \\ x\leq 2023 \end{cases}\Rightarrow 2022\leq x\leq 2023$

Vậy $\text{Min}F=1$ khi $2022\leq x\leq 2023$.

Câu 12. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=|x-2021|+|x-2022|+|x-2023|$

Lời giải

Ta có: $A=|x-2021|+|x-2022|+|x-2023|=(|x-2021|+|2023-x|)+|x-2022|$

Do $|x-2021|+|2023-x|\geq|x-2021+2023-x|=2$ và $|x-2022|\geq 0$ với mọi x nên $A\geq 2$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} (x-2021)(2023-x)\geq 0 \\ x-2022=0 \end{cases}\Rightarrow x=2022$

Vậy $\text{Min}A=2$ khi $x=2022$.

Câu 13. (HSG 7 huyện Lập Thạch - Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho biểu thức $A=\frac{2026-x}{x-2023}$. Tìm x nguyên để A có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có: $A=\frac{2026-x}{x-2023}=\frac{2003-x+3}{x-2023}=-1+\frac{3}{x-2023}$

A nhỏ nhất khi $\frac{3}{x-2023}$ nhỏ nhất.

$\frac{3}{x-2023}$ nhỏ nhất khi $x-2023$ là số âm lớn nhất.

Mà x nguyên suy ra $x-2023 = -1 \Leftrightarrow x = 2022$.

Vậy A có GTNN là -4 khi $x = 2022$.

Câu 14. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |2x-4| + |2x-6| + |2x-8|$

Lời giải

Ta có: $A = |2x-4| + |8-2x| + |2x-6|$

Ta có: $|2x-6| \geq 0$ (1)

$$|2x-4| + |8-2x| \geq |2x-4+8-2x| = 4 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $A = |2x-4| + |2x-6| + |2x-8| \geq 4$

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} 2x-6=0 \\ (2x-4)(8-2x) \geq 0 \end{cases}$ hay $x=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x-4| + |2x-6| + |2x-8|$ bằng 4 khi $x=3$.

Câu 15. (HSG 7 Ninh Bình 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{27-2x}{12-x}$ (với x là số nguyên).

Lời giải

Ta có: $Q = \frac{27-2x}{12-x} = 2 + \frac{3}{12-x}$

Suy ra Q lớn nhất khi $\frac{3}{12-x}$ lớn nhất.

$\frac{3}{12-x}$ lớn nhất khi $12-x$ là số dương nhỏ nhất.

Mà x nguyên nên $12-x=1$. Hay $x=11$.

Với $x=11$ thì $Q = \frac{27-2 \cdot 11}{12-11} = 5$.

Suy ra Q có giá trị lớn nhất là 5 khi $x=11$.

Câu 16. (HSG 7 trường Giao Tân 2016 - 2017; trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019; huyện Tương Dương 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = (2x-5y)^2 - (15y-6x)^2 - |xy-90|$

Lời giải

Ta có: $P = (2x-5y)^2 - (15y-6x)^2 - |xy-90|$

$$\begin{aligned} &= (2x - 5y)^2 - (6x - 15y)^2 - |xy - 90| \\ &= (2x - 5y)^2 - 9 \cdot (2x - 5y)^2 - |xy - 90| \\ &= - \left[8 \cdot (2x - 5y)^2 + |xy - 90| \right] \end{aligned}$$

Ta có: $8 \cdot (2x - 5y)^2 \geq 0$ với mọi giá trị của x, y ;
 $|xy - 90| \geq 0$ với mọi giá trị của x, y .

Do đó $8 \cdot (2x - 5y)^2 + |xy - 90| \geq 0$ với mọi giá trị của x, y .

Nên $- \left[8 \cdot (2x - 5y)^2 + |xy - 90| \right] \leq 0$ với mọi giá trị của x, y .

Hay $P \leq 0$ với mọi giá trị của x, y .

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(2x - 5y)^2 = 0$ và $|xy - 90| = 0$.

+ Với $|xy - 90| = 0$ thì $xy - 90 = 0$ (1).

+ Với $(2x - 5y)^2 = 0$ thì $2x - 5y = 0$. Do đó $2x = 5y \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{2}$.

Đặt $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = k$, khi đó $x = 5k, y = 2k$, thay $x = 5k, y = 2k$ vào (1) ta được:

$5k \cdot 2k - 90 = 0 \Rightarrow k^2 = 9$. Suy ra $k = 3$ hoặc $k = -3$.

Nếu $k = 3$ thì $x = 4; y = 6$;

Nếu $k = -3$ thì $x = -4; y = -6$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là 0 khi và chỉ khi $x = 4; y = 6$ hoặc $x = -4; y = -6$.

Câu 17. (HSG 7 trường Lang Chánh 2022 - 2023)

Cho các số không âm x, y, z thoả mãn: $x + 3z = 2022$ và $x + 2y = 2023$. Tính giá trị lớn

nhất của biểu thức: $A = x + y + z + \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $x + 3z = 2022$ (1) và $x + 2y = 2023$ (2)

Từ (1) $\Rightarrow x = 2022 - 3z$

Trừ từng vế của (2) cho (1), ta được: $2y - 3z = 1 \Rightarrow y = \frac{1 + 3z}{2}$

Khi đó: $A = x + y + z + \frac{1}{2} = (2022 - 3z) + \frac{1 + 3z}{2} + z + \frac{1}{2}$

$$= 2022 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 3z + \frac{3}{2}z + z = 2023 - \frac{1}{2}z$$

Vì $z \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}z \leq 0 \Rightarrow 2023 - \frac{1}{2}z \leq 2023 \Rightarrow A \leq 2023$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 2022 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy: GTLN của A bằng 2023 $\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 2022 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

Câu 18. (HSG 7 TP Bắc Giang 2022 - 2023)

$$C = \frac{|x - 2022| + 2023}{|x - 2022| + 2024}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Lời giải

$$C = \frac{(|x - 2022| + 2024) - 1}{|x - 2022| + 2024} = 1 - \frac{1}{|x - 2022| + 2024}$$

Ta có

Ta thấy C đạt giá trị nhỏ nhất khi $\frac{1}{|x - 2022| + 2024}$ đạt giá trị lớn nhất $\Rightarrow |x - 2022| + 2024$ đạt giá trị nhỏ nhất (vì $1 > 0$).

Mặt khác $|x - 2022| \geq 0, \forall x \Rightarrow |x - 2022| + 2024 \geq 2024, \forall x$

$$C \geq 1 - \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024}$$

Do đó

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x - 2022 = 0$. Suy ra $x = 2022$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{2023}{2024}$.

Câu 19. (HSG 7 trường Hiệp Hòa 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = |3x - 4| + |5x - 7| - x + 2025$.

Lời giải

$$3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

Ta có:

$$5x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{5}$$

Ta có bảng xét dấu sau:

		$\frac{4}{3}$		$\frac{7}{5}$	
$3x - 4$	-	0	+		+
$5x - 7$	-		-	0	+

TH1: với $x \leq \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} |3x - 4| = 4 - 3x \\ |5x - 7| = 7 - 5x \end{cases}$

Khi đó $A = 4 - 3x + 7 - 5x - x + 2025 = 2036 - 9x \geq 2036 - 9 \cdot \frac{4}{3} = 2024$ (1)

TH2: với $\frac{4}{3} < x < \frac{7}{5} \Rightarrow \begin{cases} |3x - 4| = 3x - 4 \\ |5x - 7| = 5x - 7 \end{cases}$

Khi đó $A = 3x - 4 + 7 - 5x - x + 2025 = -3x + 2028 \geq -3 \cdot \frac{7}{5} + 2028 = \frac{10119}{5}$ (2)

TH3: Với $x \geq \frac{7}{5} \Rightarrow \begin{cases} |3x - 5| = 3x - 5 \\ |5x - 7| = 5x - 7 \end{cases}$

Khi đó $A = 3x - 4 + 5x - 7 - x + 2025 = 7x - 2014 \geq 7 \cdot \frac{7}{5} - 2014 = \frac{10119}{5}$ (3)

Từ (1); (2) và (3) suy ra $A \geq \frac{10119}{5} \forall x$. Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{7}{5}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{10119}{5}$ khi $x = \frac{7}{5}$.

Câu 20. (HSG 7 huyện Gia Viễn - Ninh Bình 2022 - 2023)

$$P = 6 \cdot \left| y - \frac{1}{8} \right| + x^2 - 4x + 7.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Lời giải

$$P = 6 \cdot \left| y - \frac{1}{8} \right| + x^2 - 4x + 7.$$

Ta có:

$$6 \cdot \left| y - \frac{1}{8} \right| \geq 0, \forall y$$

$$x^2 - 4x + 7 = x^2 - 2x - 2x + 4 + 3 = x(x - 2) - 2(x - 2) + 3 = (x - 2)^2 + 3 > 0, \forall x$$

$$\Rightarrow P \geq 3, \forall x, y. \text{ Dấu "}" xảy ra khi: } \begin{cases} 6 \cdot \left| y - \frac{1}{8} \right| = 0 \\ (x - 2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{8} \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 3 khi $\begin{cases} y = \frac{1}{8} \\ x = 2 \end{cases}$.

Câu 21. (HSG 7 huyện Hương Khê–Hà Tĩnh 2022 - 2023)

Cho biểu thức: $P = \frac{4049 - 2x}{x - 2023} (x \neq 2023)$. Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Lời giải

$$P = \frac{4049 - 2x}{x - 2023} = \frac{3 - 2(x - 2023)}{x - 2023} = \frac{3}{x - 2023} - 2 (x \neq 2023)$$

Biểu thức P đạt GTNN khi và chỉ khi $\frac{3}{x - 2023}$ có GTNN $\Rightarrow x - 2023$ là số âm lớn nhất (vì x nguyên) $\Rightarrow x - 2023 = -1 \Rightarrow x = 2022 (TM)$

Khi đó GTNN của P là -5 khi $x = 2022$.

Vậy GTNN của P là -5 khi $x = 2022$.

Câu 22. (HSG 7 huyện Thái Thụy - Thái Bình 2022 - 2023)

Cho biểu thức $E = \frac{a - 5}{a - 2}$ với a là số nguyên. Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của E ?

Lời giải

Điều kiện: $a \neq 2$

$$E = \frac{a - 5}{a - 2} = \frac{a - 2 - 3}{a - 2} = 1 - \frac{3}{a - 2};$$

E nhận giá trị nguyên khi $\frac{3}{a - 2}$ là số nguyên.

$$\Rightarrow 3 : a - 2 \Rightarrow a - 2 \in \{ \pm 1; \pm 3 \} \Rightarrow a \in \{ 3; 5; 1; -1 \}$$

Thử lại các trường hợp thì ta tính được giá trị nhỏ nhất của E bằng -2 khi $a = 3$

Vậy giá trị nguyên nhỏ nhất của E bằng -2 khi $a = 3$.

Câu 23. (HSG 7 huyện Sông Lô, trường Đôn Nghĩa–Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{14 - x}{4 - x}$ với x là số nguyên khác 4 .

Lời giải

Ta có:
$$P = \frac{14 - x}{4 - x} = 1 + \frac{10}{4 - x}$$

P đạt GTLN $\Leftrightarrow \frac{10}{4 - x}$ đạt GTLN

Nếu $4 - x > 0$ thì $\frac{10}{4 - x} > 0$

Nếu $4 - x < 0$ thì $\frac{10}{4 - x} < 0$

Để $\frac{10}{4 - x}$ đạt GTLN thì $4 - x$ là số nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow 4 - x = 1 \Rightarrow x = 3$ (TM)

Khi $x = 3$ thì $P = 11$.

Vậy P có GTLN bằng 11 khi $x = 3$

Câu 24. (HSG 7 trường Lý Nam Đế - Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm x nguyên để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất $B = \frac{2011}{2012 - |x - 2010|}$.

Lời giải

Ta có: $-|x - 2010| \leq 0$ với mọi $x \Rightarrow 2012 - |x - 2010| \leq 2012$ với mọi x .

$$2012 - |x - 2010| < 0 \Rightarrow |x - 2010| > 2012 \Rightarrow \begin{cases} x > 4022 \\ x < -2 \end{cases}$$

* Trường hợp 1:

Khi đó, $B < 0$. B nhỏ nhất khi và chỉ khi $-B = \frac{2011}{|x - 2010| - 2012}$ đạt giá trị dương lớn nhất khi và chỉ khi $|x - 2010| - 2012 = 1$

$$\Leftrightarrow |x - 2010| = 2013 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4023 \\ x = -3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Khi đó, B nhỏ nhất bằng -2011 .

* Trường hợp 2: $2012 - |x - 2010| > 0 \Rightarrow |x - 2010| < 2012 \Rightarrow -2 < x < 4022$

Khi đó, $0 < 2012 - |x - 2010| \leq 2012 \Rightarrow B \geq \frac{2011}{2012}$

Vậy $x = -3$ hoặc $x = 4023$. biểu thức $B = \frac{2011}{2012 - |x - 2010|}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -2011

Câu 25. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

$$D = \frac{2(x - 1)^2 + 2(y - 2)^2 + 100}{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 2}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

Lời giải

$$D = \frac{2(x - 1)^2 + 2(y - 2)^2 + 100}{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 2}$$

$$= \frac{2 \cdot [(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2] - 4 + 100}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2} = 2 + \frac{96}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 \geq 0 \\ (y-2)^2 \geq 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + 2 \geq 2 \end{cases}$$

Vì

$$\Rightarrow \frac{96}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2} \leq \frac{96}{2} = 48$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{96}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2} \leq 50 \Rightarrow D \leq 50$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ (y-2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Dấu bằng xảy ra khi

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức: D là 50 khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Câu 26. (HSG 7 huyện Hương Khê - Hà Tĩnh, trường Tân Tiến - Hưng Hà 2022 - 2023)

$$C = \frac{2|x-1|+3}{|x-1|+1}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

Lời giải

$$C = \frac{2|x-1|+3}{|x-1|+1} = \frac{2|x-1|+2+1}{|x-1|+1} = 2 + \frac{1}{|x-1|+1}$$

Ta có

$$\text{Vì } |x-1| \geq 0 \text{ với mọi } x.$$

$$\Rightarrow |x-1|+1 \geq 1 \text{ với mọi } x.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x-1|+1} \leq 1 \text{ với mọi } x.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x-1|+1} + 2 \leq 3 \text{ với mọi } x.$$

Vậy giá trị lớn nhất C là 3 khi và chỉ khi $x = 1$

Câu 27. (HSG 7 huyện Tam Dương - Vĩnh phúc 2016 - 2017; huyện Phủ Lý, trường THCS Lý Tự Trọng 2018 - 2019; huyện Hưng Hà, Vũng Tàu 2022 - 2023)

$$M = \frac{2016x - 2016}{3x + 2}$$

Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$M = \frac{2016x - 2016}{3x + 2} = \frac{672(3x + 2) - 2016 - 1344}{3x + 2} = 672 - \frac{3360}{3x + 2}$$

$$M \text{ nhỏ nhất} \Rightarrow \frac{3360}{3x+2} \text{ lớn nhất}$$

$$\text{Xét } 3x+2 < 0 \text{ thì } \frac{3360}{3x+2} < 0 \quad (1)$$

$$\text{Xét } 3x+2 > 0 \text{ thì } \frac{3360}{3x+2} > 0$$

$$\frac{3360}{3x+2} \text{ lớn nhất khi } 3x+2 \text{ nhỏ nhất}$$

Mà x nguyên, $3x+2$ dương và $3x+2$ chia 3 dư 2 nên $3x+2=2$ nên $x=0$

$$\text{Khi đó: } \frac{3360}{3x+2} = \frac{3360}{3 \cdot 0 + 2} = 1680 \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) thì $\frac{3360}{3x+2}$ có giá trị lớn nhất bằng 1680

Vậy $M_{\min} = -1008$ khi $x=0$.

Câu 28. (HSG 7 huyện Hoàng Hoá - Thanh Hoá 2017 - 2018; trường Nguyễn Tông Quai - Hưng Hà 2022 - 2023)

$$B = \frac{x^2 + y^2 + 3}{x^2 + y^2 + 2}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

Lời giải

$$\text{Ta có: } B = \frac{x^2 + y^2 + 3}{x^2 + y^2 + 2} = \frac{x^2 + y^2 + 2 + 1}{x^2 + y^2 + 2} = 1 + \frac{1}{x^2 + y^2 + 2}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} x^2 \geq 0 \\ y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + 2 \geq 2$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2$ nhỏ nhất bằng 2 khi $x=y=0$

$$B \text{ lớn nhất bằng } 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Khi đó

$$\text{Vậy } B_{\max} = \frac{3}{2} \text{ khi } x=y=0.$$

Câu 29. (HSG 7 trường Minh Khai - Hưng Hà 2022 - 2023)

$$C = \frac{|x-2017|+2018}{|x-2017|+2019}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

Lời giải

$$\text{Ta có: } C = \frac{|x-2017|+2018}{|x-2017|+2019} = \frac{(|x-2017|+2019)-1}{|x-2017|+2019} = 1 - \frac{1}{|x-2017|+2019}$$

Biểu thức C đạt giá trị nhỏ nhất khi $|x-2017|+2019$ có giá trị nhỏ nhất

Mà $|x - 2017| \geq 0$ nên $|x - 2017| + 2019 \geq 2019$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = 2017 \Rightarrow C = \frac{2018}{2019}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{2018}{2019}$ khi $x = 2017$.

Câu 30. (HSG 7 trường Cự Khê 2016 - 2017; trường Lưu Khánh Đàm - Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (x - 2)^2 + |y - x| + 3$.

Lời giải

Ta có $(x - 2)^2 \geq 0$ với mọi x và $|y - x| \geq 0$ với mọi $x, y \Rightarrow A \geq 3$ với mọi x, y .

Suy ra A nhỏ nhất bằng 3 khi $\begin{cases} (x - 2)^2 = 0 \\ |y - x| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy $A_{\min} = 3$ khi $x = y = 2$.

Câu 31. (HSG 7 trường Hồng Lĩnh - Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau $K = (3x - 2y)^2 - (4y - 6x)^2 - |x + y - 5|$.

Lời giải

Ta có: $K = (3x - 2y)^2 - (4y - 6x)^2 - |x + y - 5|$

$$= (3x - 2y)^2 - 4 \cdot (2y - 3x)^2 - |x + y - 5|$$

$$= (3x - 2y)^2 - 4 \cdot (3x - 2y)^2 - |x + y - 5|$$

$$= -3 \cdot (3x - 2y)^2 - |x + y - 5|$$

$$= - \left[3 \cdot (3x - 2y)^2 + |x + y - 5| \right]$$

Ta có $3 \cdot (3x - 2y)^2 \geq 0$ với mọi giá trị của x, y

$|x + y - 5| \geq 0$ với mọi giá trị của x, y

Do đó $\left[3 \cdot (3x - 2y)^2 + |x + y - 5| \right] \geq 0$ với mọi giá trị của x, y

Nên $- \left[3 \cdot (3x - 2y)^2 + |x + y - 5| \right] \leq 0$ với mọi giá trị của x, y

Hay $K \leq 0$ với mọi giá trị của x, y

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $3x - 2y = 0$ và $x + y - 5 = 0$ (1)

Với $3x - 2y = 0$ thì $3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3}$.

Đặt $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = k$. Khi đó $x = 2k$; $y = 3k$

Thay $x = 2k$ và $y = 3k$ vào (1) ta được $2k + 3k - 5 = 0 \Rightarrow 5k = 5 \Rightarrow k = 1$

Với $k = 1$ thì $x = 2$; $y = 3$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức K là 0 khi và chỉ khi $x = 2; y = 3$

Câu 32. (HSG 7 huyện Đất Mũi 2016 - 2017; huyện Hương Khê - Hà Tĩnh 2017 - 2018; huyện Rạch Giá - Kiên Giang 2018 - 2019; trường Hồng Lĩnh - Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho a, b, c, d là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$E = |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \leq d$. Áp dụng BĐT $|a| + |b| \geq |a + b|$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $ab \geq 0$ ta có:

$$|x - a| + |x - d| \geq |x - a| + |d - x| \geq |x - a + d - x| = d - a \quad (1)$$

$$|x - b| + |x - c| \geq |x - b| + |c - x| \geq |x - b + c - x| = c - b \quad (2)$$

Suy ra $E \geq c + d - a - b$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi dấu "=" ở (1) và (2) xảy ra

khi và chỉ khi $(x - a)(d - x) \geq 0$ và $(x - b)(c - x) \geq 0$

Suy ra $a \leq x \leq d$ và $b \leq x \leq c$

Do đó $\text{Min} E = c + d - a - b$ khi $b \leq x \leq c$

Câu 33. (HSG 7 trường Dân Chủ - Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = |x - 2| + (x - y)^2 + 3\sqrt{z^2 + 9} + 16$

Lời giải

Ta có: $C = |x - 2| + (x - y)^2 + 3\sqrt{z^2 + 9} + 16$

$$\forall |x - 2| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad (x - y)^2 \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}; \quad z^2 \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow z^2 + 9 \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sqrt{z^2 + 9} \geq 3 \quad \forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow 3\sqrt{z^2 + 9} \geq 9 \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |x - 2| + (x - y)^2 + 3\sqrt{z^2 + 9} + 16 \geq 25$$

$$\Rightarrow |x - 2| + (x - y)^2 + 3\sqrt{z^2 + 9} + 16 \geq 25 \quad \text{hay } C \geq 25$$

Vậy $C_{\min} = 25$ khi $x = y = 2$ và $z = 0$

Câu 34. (HSG 7 trường THCS Tân Ước 2013 - 2014; huyện Hương Khê (và Đề 326) 2016 - 2017; trường THCS Hồng Liên, huyện Phú Lý - Hà Nam, trường Hoàng Quyên, trường Lý Tự Trọng, trường Phong Đạt 2018 - 2019; trường Thái Hưng - Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x - 2| + |2x - 2013|$

Lời giải

Ta có: $A = |2x - 2| + |2x - 2013| = |2x - 2| + |2013 - 2x| \geq |2x - 2 + 2013 - 2x| = 2011$

Dấu "=" xảy ra khi $(2x - 2)(2013 - 2x) \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$

Vậy $A_{\min} = 2011$ khi $1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$.

Câu 35. (HSG 7 trường Trần Thủ Độ - Hưng Hà 2022 - 2023)

$$B = \frac{2|2x - 3| + 7}{|2x - 3| + 5}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của

Lời giải

$$B = \frac{2|2x - 3| + 7}{|2x - 3| + 5} = 2 - \frac{3}{|2x - 3| + 5}$$

Ta có

Vì $|2x - 3| \geq 0$ với mọi x .

$$\Rightarrow |2x - 3| + 5 \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{|2x - 3| + 5} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{-3}{|2x - 3| + 5} \geq \frac{-3}{5} \Rightarrow B \geq \frac{7}{5}$$

Dấu "=" xảy ra khi $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

Vậy $B_{\min} = \frac{7}{5}$ khi $x = \frac{3}{2}$.

Câu 36. (HSG 7 huyện Hoàng Hoá - Thanh Hoá 2017 - 2018; trường Lê Tư Thành - Hưng Hà, Mường La - Sơn La, huyện Sóc Sơn 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{7n - 8}{2n - 3}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{7n - 8}{2n - 3} = \frac{2(7n - 8)}{2(2n - 3)} = \frac{7(2n - 3) + 5}{2(2n - 3)} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2(2n - 3)}$$

Phân số đã cho có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{5}{2(2n - 3)}$ lớn nhất.

Suy ra $2(2n - 3)$ nhỏ nhất khác 0 .

Mà n là số tự nhiên nên $2(2n - 3) = 2 \Rightarrow 2n - 3 = 1 \Rightarrow 2n = 4 \Rightarrow n = 2$

Vậy giá trị lớn nhất của phân số đã cho bằng 6 khi $n = 2$.

Câu 37. (HSG 7 trường Diệp Nông - Hưng Hà 2022 - 2023)

$$P = \frac{3|x - 2| + 2020}{|x - 2| + 2}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

Lời giải

$$P = \frac{3|x-2|+2020}{|x-2|+2} = \frac{3(|x-2|+2) - 6 + 2020}{|x-2|+2} = 3 + \frac{2014}{|x-2|+2}$$

Ta có:

$$\text{Ta thấy: } |x-2| \geq 0 \quad \forall x \Rightarrow |x-2|+2 \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x-2|+2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2014}{|x-2|+2} \leq \frac{2014}{2} \Rightarrow 3 + \frac{2014}{|x-2|+2} \leq 3 + 1007 \Rightarrow P \leq 1010$$

Do đó P đạt giá trị lớn nhất là 1010 khi và chỉ khi $|x-2|=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$.

Vậy biểu thức P đạt giá trị lớn nhất bằng 1010 khi và chỉ khi $x=2$.

Câu 38. (HSG 7 huyện Hưng Hà - Thái Bình 2021 - 2022)

Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $B = \frac{2022-x}{2021-x}$ có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

$$\text{Ta có: } B = \frac{2022-x}{2021-x} = \frac{(2021-x)+1}{2021-x} = 1 + \frac{1}{2021-x}$$

Để B lớn nhất thì $\frac{1}{2021-x}$ lớn nhất

+ Nếu $2021-x < 0$ thì $\frac{1}{2021-x} < 0$

+ Nếu $2021-x > 0$ thì $\frac{1}{2021-x} > 0$

Vì x là số nguyên nên $2021-x$ là số nguyên dương

Để $\frac{1}{2021-x}$ lớn nhất thì $2021-x$ phải là số dương nhỏ nhất khi $2021-x=1 \Rightarrow x=2020$

Khi đó $B=1+1=2$

Vậy biểu thức B đạt giá trị lớn nhất bằng 2 khi $x=2020$.

Câu 39. (HSG 7 huyện Ý Yên - Nam Định 2021 - 2022)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = 4y - 2y^2 - 5 - |2x - 3y + 1|$.

Lời giải

$$\text{Xét } B = 4y - 2y^2 - 5$$

$$= (4y - 2y^2 - 2) - 3 = -2(y^2 - 2y + 1) - 3 = -2(y^2 - y - y + 1) - 3$$

$$= -2[(y^2 - y) - (y - 1)] - 3 = -2[y(y - 1) - 1 \cdot (y - 1)] - 3$$

$$= -2(y - 1)(y - 1) - 3 = -2(y - 1)^2 - 3$$

$$\text{Do đó } A = -2(y - 1)^2 - |2x - 3y + 1| - 3$$

Với mọi giá trị của x, y , ta có $(y-1)^2 \geq 0$ và $|2x-3y+1| \geq 0$
 $\Rightarrow -2(y-1)^2 - |2x-3y+1| \leq 0$
 $\Rightarrow A = -2(y-1)^2 - |2x-3y+1| - 3 \leq -3$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} (y-1)^2 = 0 \\ |2x-3y+1| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-1 = 0 \\ 2x-3y+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 2x-3.1+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là -3 , đạt được khi và chỉ khi $(x; y) = (1; 1)$

Câu 40. (HSG 7 huyện Lục Ngạn - Bắc Giang 2021 - 2022)

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |x-2019| + |x-2020| + |x-2021|$

Lời giải

Ta có: $P = |x-2019| + |x-2020| + |x-2021|$
 $= (|x-2019| + |2021-x|) + |x-2020|$

Ta có $|x-2019| + |2021-x| \geq |x-2019+2021-x| = 2$

Dấu bằng xảy ra khi $(x-2019)(2021-x) \geq 0 \Rightarrow 2019 \leq x \leq 2021$ (1)

Lại có $|x-2020| \geq 0$, dấu bằng xảy ra khi $x = 2020$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra biểu thức P có giá trị nhỏ nhất là 2, xảy ra khi $x = 2020$.

Câu 41. (HSG 7 huyện Lục Nam - Bắc Giang 2021 - 2022)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = (2x-5y)^2 - (15y-6x)^2 - |xy-40|$

Lời giải

Ta có $P = (2x-5y)^2 - (15y-6x)^2 - |xy-40|$

$= (2x-5y)^2 - (6x-15y)^2 - |xy-40|$

$= (2x-5y)^2 - 9.(2x-5y)^2 - |xy-40|$

$= - [8.(2x-5y)^2 + |xy-40|]$

Ta thấy $(2x-5y)^2 \geq 0$ với mọi x, y nên $8.(2x-5y)^2 \geq 0$ với mọi x, y
 $|xy-90| \geq 0$ với mọi x, y

Khi đó $8.(2x-5y)^2 + |xy-40| \geq 0$ với mọi x, y

Suy ra $- [8.(2x-5y)^2 + |xy-40|] \leq 0$ với mọi x, y

Hay $P \leq 0$ với mọi x, y

Dấu "=" xảy ra khi $(2x - 5y)^2 = 0$ và $|xy - 40| = 0$

+ Với $(2x - 5y)^2 = 0$ thì $2x = 5y \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{2}$

+ Với $|xy - 40| = 0$ thì $xy = 40$

Đặt $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = k$ ta được $x = 5k$ và $y = 2k$

Mà $xy = 40$ nên $5k \cdot 2k = 40$

Tìm được $k = 2$ hoặc $k = -2$

+ Nếu $k = 2$ thì $x = 10 ; y = 4$

+ Nếu $k = -2$ thì $x = -10 ; y = -4$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 0 khi và chỉ khi $x = 10 ; y = 4$ hoặc $x = -10 ; y = -4$.

Câu 42. (HSG 7 huyện Lục Nam - Bắc Giang 2021 - 2022)

Cho $x = 1 - y$, $x > 0$, $y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2 - x}{x} + \frac{b^2 + y}{y}$ (a và b là hằng số dương đã cho).

Lời giải

Theo bài ra ta có: $x = 1 - y \Rightarrow x + y = 1$

$$P = \frac{a^2 - x}{x} + \frac{b^2 + y}{y} = \frac{a^2}{x} - 1 + \frac{b^2}{y} + 1 = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}$$

và

$$= \frac{a^2(x+y)}{x} + \frac{b^2(x+y)}{y} \quad (\text{vì } x+y=1) = a^2 + \frac{a^2y}{x} + \frac{b^2x}{y} + b^2$$

Vì $a, b > 0$ và không đổi. Mà $\frac{a^2y}{x} \cdot \frac{b^2x}{y} = a^2b^2$ không đổi

$$\Rightarrow \frac{a^2y}{x} + \frac{b^2x}{y} \text{ nhỏ nhất khi } \frac{a^2y}{x} = \frac{b^2x}{y}$$

$$\Rightarrow a^2y^2 = b^2x^2 \Rightarrow ay = bx$$

$$\Rightarrow a(1-x) = bx \Rightarrow (a+b)x = a \Rightarrow x = \frac{a}{a+b}$$

$$\Rightarrow y = 1-x = 1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{a+b} : \frac{b}{a+b} = \frac{a}{b}$$

Thay vào P ta được: $P = a^2 + b^2 + a^2 \cdot \frac{b}{a} + b^2 \cdot \frac{a}{b}$

$$= a^2 + b^2 + ab + ab = a(a+b) + b(a+b) = (a+b)(a+b) = (a+b)^2$$

Vậy $P_{\min} = (a+b)^2$ khi $x = \frac{a}{a+b}$; $y = \frac{b}{a+b}$.

Câu 43. (HSG 7 Thị xã An Nhơn 2021 - 2022)

Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $B = \frac{22 - 3x}{4 - x}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có: $B = \frac{22 - 3x}{4 - x} = \frac{12 - 3x + 10}{4 - x} = 3 + \frac{10}{4 - x}$

Suy ra B đạt giá trị lớn nhất khi $4 - x$ là số dương nhỏ nhất.

Mà x là số nguyên $\Rightarrow 4 - x = 1 \Rightarrow x = 3$.

Khi đó $B = 3 + 10 = 13$

Vậy $B_{\max} = 13$ khi $x = 3$.

Câu 44. (HSG 7 huyện Mỹ Đức - Hà Nội 2021 - 2022)

Cho biểu thức: $Q = |x - 2020| + |x - 2021| + |x - 2022|$. Tìm x để biểu thức Q có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

Ta có: $Q = |x - 2020| + |x - 2021| + |x - 2022|$

Áp dụng BĐT giá trị tuyệt đối: $|a| + |b| \geq |a + b|$. Dấu '=' xảy ra khi $a, b \geq 0$.

Ta có $|x - 2020| + |2022 - x| \geq |x - 2020 + 2022 - x| = 2$ với mọi x (1)

$|x - 2021| \geq 0$ với mọi x (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A \geq 2$ với mọi x

Dấu '=' xảy ra: $\begin{cases} (x - 2020)(2022 - x) \geq 0 \\ x - 2021 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2021$

Vậy Q có giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 2021$.

Câu 45. (HSG 7 huyện Ứng Hòa - Hà Nội 2021 - 2022)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |2021 - x| + |2022 - x|$.

Lời giải

Ta có: $P = |2021 - x| + |2022 - x| = |x - 2021| + |2022 - x|$

Ta có $|x - 2021| + |2022 - x| \geq |x - 2021 + 2022 - x| = 1$

Dấu bằng xảy ra khi $(x - 2021)(2022 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 2021 \leq x \leq 2022$.

Vậy biểu thức P có giá trị nhỏ nhất là 1, xảy ra khi $2021 \leq x \leq 2022$.

Câu 46. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2014 - 2015; huyện Phù Cát - Bình Định 2017 - 2018; TP Vũng Tàu 2021 - 2022; huyện Krông Ana 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |x - 2| + |2x - 3| + |3x - 4|$

Lời giải

Ta có: $|x - 2| + |3x - 4| = |2 - x| + |3x - 4| \geq |2 - x + 3x - 4| = |2x - 2|$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow (2 - x)(3x - 4) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 3x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \geq x \\ 3x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \leq 0 \\ 3x - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \\ 3x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq \frac{4}{3} \end{cases}$$

Lại có: $|2x - 2| + |2x - 3| = |2x - 2| + |3 - 2x| \geq |2x - 2 + 3 - 2x| = |1| = 1$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow (3 - 2x)(2x - 2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x \geq 0 \\ 2x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq -3 \\ 2x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x \leq 0 \\ 2x - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \leq -3 \\ 2x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Do đó $\Rightarrow A = |x - 2| + |2x - 3| + |3x - 4| \geq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} \leq x \leq 2 \\ 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

Dấu “=” xảy ra

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 1 $\Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$

Câu 47. (HSG 7 thị xã Cửa Lò - Nghệ An 2021 - 2022)

Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn: $a + 3c = 2021$; $a + 2b = 2022$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = a + b + c$.

Lời giải

Ta có: $a + 3c = 2021 \Rightarrow a = 2021 - 3c$; $a + 2b = 2022 \Rightarrow a = 2022 - 2b$

Suy ra: $2021 - 3c = 2022 - 2b \Rightarrow 2b = 2022 - 2021 + 3c = 1 + 3c \Rightarrow b = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}c$

Như vậy: $P = a + b + c = 2021 - 3c + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}c + c = 2021\frac{1}{2} - \frac{1}{2}c \geq 2021\frac{1}{2}$ (vì $c \geq 0$).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow c = 0$. Khi đó $a + 3c = 2021 \Rightarrow a = 2021$; $a + 2b = 2022 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $2021\frac{1}{2}$ khi $a = 2021; b = \frac{1}{2}; c = 0$.

Câu 48. (HSG 7 huyện Vũ Thư - Thái Bình 2021 - 2022)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = 2022 + |3y - 1| + (2x - y + 3)^2$

Lời giải

Với mọi x, y ta có: $|3y - 1| \geq 0$ và $(2x - y + 3)^2 \geq 0$

$\Rightarrow |3y - 1| + (2x - y + 3)^2 \geq 0 \Rightarrow C \geq 2022$

Dấu bằng xảy ra khi $|3y - 1| = 0$ và $(2x - y + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow 3y - 1 = 0$ và $2x - y + 3 = 0$

$\Rightarrow y = \frac{1}{3}; x = \frac{-4}{3}$

Vậy $C_{\min} = 2022$ với $(x; y) = \left(\frac{-4}{3}; \frac{1}{3}\right)$

Câu 49. (HSG 7 thành phố Thái Bình 2021 - 2022)

Cho biểu thức: $A = \frac{7x - 8}{2x - 3}$ với $x \neq \frac{3}{2}$

1. Tính giá trị của biểu thức A biết $\left|x + \frac{1}{3}\right| - 2 = -1$

2. Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

1. Ta có: $\left|x + \frac{1}{3}\right| - 2 = -1 \Rightarrow \left|x + \frac{1}{3}\right| = 1$

Trường hợp 1: $x + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Trường hợp 2: $x + \frac{1}{3} = -1 \Rightarrow x = -1 - \frac{1}{3} = \frac{-4}{3}$

$\Rightarrow x = \frac{2}{3}$ hoặc $x = \frac{-4}{3}$

Với $x = \frac{2}{3}$ thỏa mãn điều kiện $x \neq \frac{3}{2}$ thay vào biểu thức A tính được

$$A = \frac{7 \cdot \frac{2}{3} - 8}{2 \cdot \frac{2}{3} - 3} = 2$$

$$A = \frac{7 \cdot \frac{-4}{3} - 8}{2 \cdot \frac{-4}{3} - 3} = \frac{52}{17}$$

Với $x = \frac{-4}{3}$ thỏa mãn điều kiện $x \neq \frac{3}{2}$ thay vào biểu thức A tính được

Vậy $A = 2$ tại $x = \frac{2}{3}$, $A = \frac{52}{17}$ tại $x = \frac{-4}{3}$

2. Ta có : $A = \frac{7x-8}{2x-3} = \frac{\frac{7}{2}(2x-3) - 8 + \frac{21}{2}}{2x-3} = \frac{7}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{2x-3} \quad (x \in \mathbb{Q})$

A lớn nhất khi $\frac{\frac{5}{2}}{2x-3}$ lớn nhất

$\frac{\frac{5}{2}}{2x-3}$ lớn nhất khi $(2x-3)$ là số nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow 2x-3=1 \Rightarrow x=2$ (Thỏa mãn)

Thay $x=2$ vào biểu thức $A = \frac{7}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{2x-3} = 6$

Vậy $x=2$ thì giá trị lớn nhất của biểu thức A bằng 6.

Câu 50. (HSG 7 huyện Bát Xát - Lào Cai 2021 - 2022)

$$M = \frac{2011}{2012 - 3|x - 2010|}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Lời giải

$$M = \frac{2011}{2012 - 3|x - 2010|}$$

Biểu thức M đạt giá trị nhỏ nhất khi $2012 - 3|x - 2010|$ có giá trị lớn nhất

Mà $-3|x - 2010| \leq 0$ với mọi $x \Rightarrow 2012 - 3|x - 2010| \leq 2012$ với mọi x

Dấu “=” xảy ra khi $x = 2010$

Suy ra $M \leq \frac{2011}{2012}$ với mọi x

$$M_{\min} = \frac{2011}{2012} \text{ khi } x = 2010$$

Vậy

Câu 51. (HSG 7 huyện Mường La - Sơn La 2021 - 2022)

$$A = \frac{|x - 2016| + 2017}{|x - 2016| + 2018}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

Lời giải

$$A = \frac{|x - 2016| + 2017}{|x - 2016| + 2018} = 1 - \frac{1}{|x - 2016| + 2018}$$

Ta có:

$$A \text{ có GTNN khi } \frac{1}{|x - 2016| + 2018} \text{ có GTLN}$$

Lại có: $|x - 2016| + 2018 \geq 2018$ (với $\forall x$). Dấu “=” xảy ra khi $x = 2016$

$$\text{Vậy } A \text{ có GTNN là } \frac{2017}{2018} \text{ khi } x = 2016$$

Câu 52. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2015 - 2016; huyện Bồ Trạch - Quảng Bình 2017 - 2018; Chư Sê - Gia Lai 2021 - 2022)

Cho $x + y = 1$ và $x > 0, y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}$ (a và b là các hằng số dương đã cho).

Lời giải

$$P = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} = \frac{a^2 \cdot 1}{x} + \frac{b^2 \cdot 1}{y} = \frac{a^2 \cdot (x + y)}{x} + \frac{b^2 \cdot (x + y)}{y}$$

Ta có:

$$= a^2 + \frac{a^2 y}{x} + b^2 + \frac{b^2 x}{y} = \left(\frac{a^2 y}{x} + \frac{b^2 x}{y} \right) + a^2 + b^2$$

$$\frac{a^2 y}{x}, \frac{b^2 x}{y}$$

Các số dương $\frac{a^2 y}{x}, \frac{b^2 x}{y}$ có tích không đổi nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi

$$\frac{a^2 y}{x} = \frac{b^2 x}{y} \Rightarrow a^2 y^2 = b^2 x^2 \Rightarrow ay = bx \Rightarrow a(1 - x) = bx \Rightarrow x = \frac{a}{a + b}$$

$$\text{Suy ra } y = \frac{b}{a + b}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $P = (a + b)^2$ khi $x = \frac{a}{a + b}; y = \frac{b}{a + b}$.

Câu 53. (HSG 7 huyện Lý Nhân - Hà Nam 2021 - 2022)

Tìm số nguyên y để biểu thức $D = |y - 4| + |y - 10|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$\text{Ta có } |a| = |-a| \text{ và } |a| + |b| \geq |a + b|$$

Dấu “=” xảy ra khi a, b cùng dấu hoặc ít nhất một số bằng 0.

$$\text{Áp dụng } D = |y - 4| + |y - 10| = |y - 4| + |-y + 10| \geq |y - 4 + 10 - y| \geq 6$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } (y - 4)(10 - y) \geq 0 \Leftrightarrow 4 \leq y \leq 10$$

Vì y nguyên nên $y \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Câu 54. (HSG 7 huyện Quảng Trạch - Quảng Bình 2021 - 2022)

Tìm một số có ba chữ số sao cho tỷ số giữa số đó với tổng các chữ số của nó có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi số có ba chữ số cần tìm là \overline{abc} (a, b, c là các chữ số, $0 < a \leq 9; 0 \leq b; c \leq 9$).

Ta có
$$k = \frac{\overline{abc}}{a+b+c} = \frac{100a+10b+c}{a+b+c} = 1 + \frac{99a+9b}{a+b+c}$$

Với a, b xác định thì k bé nhất khi c là số lớn nhất $\Rightarrow c = 9$.

Khi đó
$$k = 1 + \frac{99a+9b}{a+b+9} = 1 + \frac{9(a+b+9)+90a-81}{a+b+9} = 10 + \frac{90a-81}{a+b+9}$$

Với a xác định thì k bé nhất khi b là số lớn nhất $\Rightarrow b = 9$.

Khi đó:
$$k = 10 + \frac{90a-81}{a+18} = 10 + 9 \cdot \frac{10a-9}{a+18} = 10 + 9 \cdot \frac{10(a+18)-189}{a+18} = 100 - \frac{9 \cdot 189}{a+18}$$

$$\Rightarrow k = 100 - \frac{9 \cdot 189}{a+18}$$
 bé nhất khi a bé nhất $\Rightarrow a = 1$.

$$k = \frac{199}{19}$$

Vậy số cần tìm là 199 và

Câu 55. (HSG 7 huyện Quảng Trạch - Quảng Bình 2021 - 2022)

Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ta có:
$$A = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}$$

Lời giải

Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ta có:
$$A = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$$

$$\Rightarrow 2A = \frac{2}{3^3} + \frac{2}{4^3} + \frac{2}{5^3} + \dots + \frac{2}{n^3}$$

Ta có:
$$\frac{2}{3^3} < \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4}$$

$$\frac{2}{4^3} < \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5}$$

$$\frac{2}{5^3} < \frac{2}{4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{4 \cdot 5} - \frac{1}{5 \cdot 6}$$

.....

$$\frac{2}{n^3} < \frac{2}{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)} = \frac{1}{(n-1) \cdot n} - \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

$$\Rightarrow 2A = \frac{2}{3^3} + \frac{2}{4^3} + \frac{2}{5^3} + \dots + \frac{2}{n^3} < \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5} - \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} - \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

$$\Rightarrow 2A < \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{n \cdot (n+1)} \Rightarrow A < \frac{1}{12} - \frac{1}{2n \cdot (n+1)} \Rightarrow A < \frac{1}{12}$$

Vậy $A = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}$ (với $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$).

Câu 56. (HSG 7 huyện Đức Thọ - Hà Tĩnh 2021 - 2022)

Tìm số tự nhiên n để phân số $B = \frac{10n - 3}{4n - 10}$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Đặt $B = \frac{10n - 3}{4n - 10} = \frac{2,5(4n - 10) + 22}{4n - 10} = 2,5 + \frac{22}{4n - 10}$

B có GTLN $\Rightarrow \frac{22}{4n - 10}$ có GTLN $\Rightarrow \frac{22}{4n - 10}$ có GTLN $\Rightarrow 4n - 10 = 2 \Rightarrow n = 3$ ($\forall n \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow 4n - 10 \in \mathbb{N}$ và $4n - 10$ là số tự nhiên chẵn)

Vậy B có GTLN bằng $13,5$ khi $n = 3$

Câu 57. (HSG 7 huyện Tam Nông - Phú Thọ 2021 - 2022; huyện Lâm Thao 2022 - 2023)

$$P = \frac{|x - 2022| - |x - 2023| + |x - 2024| + 2022}{|x - 2022| + |x - 2023| + |x - 2024|}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

Lời giải

$$P = \frac{|x - 2022| + |x - 2023| + |x - 2024| + 2022 - 2|x - 2023|}{|x - 2022| + |x - 2023| + |x - 2024|}$$

Ta có:

$$P = 1 + \frac{2022 - 2|x - 2023|}{|x - 2022| + |x - 2023| + |x - 2024|}$$

Vì: $|x - 2023| \geq 0 \Rightarrow 2022 - 2|x - 2023| \leq 2022$

$$|x - 2022| + |x - 2023| + |x - 2024| = |x - 2022| + |2024 - x| + |x - 2023|$$

$$\geq |x - 2022 + 2024 - x| + |x - 2023| = 2 + |x - 2023| \geq 2$$

Suy ra: $\frac{1}{|x - 2022| + |x - 2023| + |x - 2024|} \leq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{2022 - 2|x - 2023|}{|x - 2022| + |x - 2023| + |x - 2024|} \leq \frac{2022}{2}$$

$$\Rightarrow P = 1 + \frac{2022 - 2|x - 2023|}{|x - 2022| + |x - 2023| + |x - 2024|} \leq 1 + \frac{2022}{2} = 1012$$

Đấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} x - 2023 = 0 \\ (x - 2022)(2024 - x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2023 \\ 2022 \leq x \leq 2024 \end{cases} \Rightarrow x = 2023$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 1012$ khi $x = 2023$.

Câu 58. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa - Thanh Hóa 2021 - 2022)

Cho x, y, z là ba số thực tùy ý thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$.
 Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x^2 + y^4 + z^6$.

Lời giải

Trong ba số x, y, z có ít nhất hai số cùng dấu.

Giả sử $x \geq 0, y \geq 0$ hoặc $x \leq 0, y \leq 0$

* Nếu $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow z = -x - y \leq 0$

Mà $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$

Do đó: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 0$

Khi đó: $P = x^2 + y^4 + z^6 \leq |x| + |y| + |z|$

Mà $|x| + |y| + |z| = x + y - z$ (vì $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 0$)

Do đó $P = x^2 + y^4 + z^6 \leq x + y - z$

Mà $x + y = -z$ (vì $x + y + z = 0$)

Do đó $P = x^2 + y^4 + z^6 \leq -2z$

Mặt khác: $-1 \leq z \leq 0$

$\Rightarrow P = x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$

Dấu “=” xảy ra khi
$$\begin{cases} x^2 = x \\ y^4 = y \\ z = -1 \\ x + y + z = 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{0; 1\} \\ y \in \{0; 1\} \\ z = -1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y; z) = \{(0; 1; -1), (1; 0; -1)\}$$

* Nếu $x \leq 0, y \leq 0 \Rightarrow z = -x - y \geq 0$

Mà $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$

Do đó: $-1 \leq x \leq 0, -1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 1$

Khi đó $P = x^2 + y^4 + z^6 \leq |x| + |y| + |z|$

Mà $|x| + |y| + |z| = (-x) + (-y) + z$ (vì $-1 \leq x \leq 0, -1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 1$)

Do đó $P = x^2 + y^4 + z^6 \leq (-x) + (-y) + z$

Mà $-x - y = z$ (vì $x + y + z = 0$)

$\Rightarrow P = x^2 + y^4 + z^6 \leq 2z$

Mặt khác: $0 \leq z \leq 1 \Rightarrow P = x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$

$$\begin{cases} x^2 = x \\ y^4 = y \\ z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ -1 \leq x \leq 0 \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$$

Dấu “=” xảy ra khi không có giá trị nào của x, y, z thỏa mãn.

Tương tự với trường hợp x và y cùng dấu hoặc y và z cùng dấu ta cũng có:

$$(x; y; z) = \{(0; -1; 1), (1; -1; 0), (-1; 0; 1), (-1; 1; 0)\}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là 2 khi

$$(x; y; z) = \{(0; 1; -1), (1; 0; -1), (0; -1; 1), (1; -1; 0), (-1; 0; 1), (-1; 1; 0)\}$$

Câu 59. (HSG 7 thị xã Kinh Môn - Hải Dương 2021 - 2022)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |2x - y| - 3|2y - 4x| - 2x^2 + 8x + 2014$

Lời giải

$$\begin{aligned} T &= |2x - y| - 3|2y - 4x| - 2x^2 + 8x + 2014 \\ &= |2x - y| - 6|2x - y| - 2(x^2 - 4x + 4) + 8 + 2014 \\ &= -5|2x - y| - 2(x - 2)^2 + 2022 \end{aligned}$$

Ta có $|2x - y| \geq 0, \forall x, y; (x - 2)^2 \geq 0, \forall x$

Suy ra $-5|2x - y| \leq 0, \forall x, y; -2(x - 2)^2 \leq 0, \forall x$

$$-5|2x - y| - 2(x - 2)^2 + 2022 \leq 2022, \forall x, y$$

Suy ra $T \leq 2022, \forall x, y$

Dấu “=” xảy ra $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 2 \end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức T là 2022 khi $x = 2, y = 4$

Câu 60. (HSG 7 huyện Tiên Hải - Thái Bình 2021 - 2022)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{40 - 3x}{13 - x}$ với x là số nguyên khác 13 .

Lời giải

Ta có $P = \frac{40 - 3x}{13 - x} = 3 + \frac{1}{13 - x}$ với $x \neq 0$

Suy ra P lớn nhất khi $\frac{1}{13 - x}$ lớn nhất

* Nếu $x > 13$ thì $13 - x < 0 \Rightarrow \frac{1}{13 - x} < 0$

* Nếu $x < 13$ thì $13 - x > 0 \Rightarrow \frac{1}{13 - x} > 0$

Từ hai trường hợp trên suy ra $\frac{1}{13 - x}$ lớn nhất khi $x < 13$

Vì phân số $\frac{1}{13 - x}$ có tử và mẫu là các số nguyên dương, tử không đổi nên phân số có giá trị lớn nhất khi mẫu là số nguyên dương nhỏ nhất.

Hay $13 - x = 1 \Leftrightarrow x = 12$ (thỏa mãn $x < 13$)

Suy ra P có giá trị lớn nhất là 4 khi $x = 12$

Câu 61. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019)

Cho $A = |2x^4 + 3x^2 + 1| - |-2x^4 - x^2 - 1|$. Chứng tỏ rằng giá trị biểu thức A luôn không âm với mọi giá trị của x .

Lời giải

Vì $2x^4 \geq 0, 3x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x^4 + 3x^2 + 1 > 0$

Từ đó $|-2x^4 - x^2 - 1| = 2x^4 + x^2 + 1$

$\Rightarrow A = 2x^4 + 3x^2 + 1 - 2x^4 - x^2 - 1 = 2x^2 \geq 0$ với mọi x

Vậy giá trị của A luôn không âm với mọi x

Câu 62. (HSG 7 huyện Tân Bình - TP Hồ Chí Minh, trường Nguyễn Trung Trực, trường Nguyễn Trãi 2018 - 2019)

Tìm số tự nhiên x để phân số $\frac{7x - 8}{2x - 3}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

$A = \frac{7x - 8}{2x - 3} = \frac{2(7x - 8)}{2(2x - 3)} = \frac{7(2x - 3) + 5}{2(2x - 3)} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2(2x - 3)}$

Đặt

$B = \frac{5}{2(2x - 3)}$

Đặt $B = \frac{5}{2(2x - 3)}$ thì A lớn nhất khi và chỉ khi B lớn nhất

Với $x \in \mathbb{N}$, B đạt giá trị lớn nhất khi $2x - 3$ là số tự nhiên nhỏ nhất khác 0 $\Leftrightarrow 2x - 3 = 1$
 $\Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

GTLN của A là $A = 6 \Leftrightarrow x = 2$

Câu 63. (HSG 7 trường Bảo Phương, trường Thanh Thùy 2018 - 2019)

Tìm số nguyên x để M đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất đó $M = \frac{x - 14}{4 - x}$

Lời giải

$$M = \frac{x-14}{4-x} = \frac{-10-(4-x)}{4-x} = \frac{-10}{4-x} - 1$$

M nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{-10}{4-x}$ nhỏ nhất

Xét $x < 4$ thì $\frac{-10}{4-x} < 0$;

$x > 4$ thì $\frac{-10}{4-x} > 0$

Ta chỉ xét $x < 4$ thì $\frac{-10}{4-x}$ nhỏ nhất $\Rightarrow \frac{10}{4-x}$ lớn nhất

$\Rightarrow 4-x=1$ (vì mẫu nguyên dương nhỏ nhất)

Vậy $x=3$ khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức M là -11

Câu 64. (HSG 7 trường Trần Thiện, trường Thanh Mai 2018 - 2019)

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |x-2008| + |x-2009| + |y-2010| + |x-2011| + 2011$

Lời giải

Áp dụng tính chất $|a| = |-a|$ và $|a| + |b| \geq |a+b|$, dấu "=" xảy ra khi $ab \geq 0$ và $|a| \geq 0 \Leftrightarrow a = 0$

Ta có: $|x-2008| + |x-2011| = |x-2008| + |2011-x| \geq |x-2008+2011-x| = 3$

Dấu "=" xảy ra khi $(x-2008)(2011-x) \geq 0 \Leftrightarrow 2008 \leq x \leq 2011$

Ta có: $|x-2009| \geq 0$, với mọi x . Dấu "=" xảy ra khi $x=2009$

Ta có: $|y-2010| \geq 0$, với mọi y . Dấu "=" xảy ra khi $y=2010$

Do đó: $A \geq 3 + 2011 = 2014$. Đẳng thức xảy ra khi $x=2009$; $y=2010$

Vậy $A_{\min} = 2014 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2009 \\ y=2010 \end{cases}$

Câu 65. (HSG 7 trường Hồng Dương 2017 - 2018; trường Điện Hồng 2018 - 2019)

Với giá trị nào của x thì biểu thức: $P = -x^2 - 8x + 5$ có giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

Ta có: $P = -x^2 - 8x + 5 = -x^2 - 8x - 16 + 21 = -(x^2 + 8x + 16) + 21 = -(x+4)^2 + 21$

Do $-(x+4)^2 \leq 0$ với mọi $x \Rightarrow -(x+4)^2 + 21 \leq 21$ với mọi x

Do đó biểu thức P đạt giá trị lớn nhất là 21 khi $x = -4$

Câu 66. (HSG 7 trường Phương Trung, trường Bình Hân 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |x-2001| + |x-1|$

Lời giải

$$A = |x - 2001| + |x - 1| = |x - 2001| + |1 - x| \geq |x - 2001 + 1 - x| = 2000$$

Vậy biểu thức đạt GTNN là $2000 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2001$

Câu 67. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2016 - 2017; Đ164 huyện 2018 - 2019)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = |x| - |x - 2|$

Lời giải

Xét các trường hợp:

Trường hợp 1: $x \geq 2 \Rightarrow A = x - (x - 2) = 2$

Trường hợp 2: $0 \leq x < 2 \Rightarrow A = x + x - 2 = 2x - 2 < 2$

Trường hợp 3: $x < 0 \Rightarrow A = -x + x - 2 = -2 < 2$

Do đó với mọi giá trị của x thì $A \leq 2$

Vậy giá trị lớn nhất của $A = 2 \Leftrightarrow x \geq 2$

Câu 68. (HSG 7 huyện Thái Thụy - Thái Bình 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = |x - 2017| + |x - 2018| + |x - 2019|$

Lời giải

$$Q = |x - 2017| + |x - 2018| + |x - 2019|$$

$$Q = (|x - 2017| + |x - 2019|) + |x - 2018| \quad , \text{ vì } |x - 2019| = |2019 - x|$$

$$\Rightarrow Q = (|x - 2017| + |2019 - x|) + |x - 2018|$$

$$\text{Mà } |x - 2017| + |2019 - x| \geq |x - 2017 + 2019 - x| = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} Q = (|x - 2017| + |2019 - x|) \geq 2 + |x - 2018| \\ |x - 2018| \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Q \geq 2$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} (x - 2017)(2019 - x) \geq 0 \\ x - 2018 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2017 \leq x \leq 2019 \\ x = 2018 \end{cases} \Rightarrow x = 2018$$

Vậy Q đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 2018$

Câu 69. (HSG 7 huyện Thường Tín - Hà Nội 2018 - 2019)

Tìm GTLN của: $A = \frac{|x - 2019| + 2020}{|x - 2019| + 2021}$

Lời giải

$$A = \frac{|x - 2019| + 2020}{|x - 2019| + 2021} = \frac{|x - 2019| + 2021 - 1}{|x - 2019| + 2021}$$

$$A = 1 - \frac{1}{|x - 2019| + 2021}$$

$$\text{Vì } |x - 2019| + 2021 \geq 2021 \text{ với mọi } x \Rightarrow \frac{1}{|x - 2019| + 2021} \leq \frac{1}{2021}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2019$

$$\text{Do đó } A = 1 - \frac{1}{|x - 2019| + 2021} \geq 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021}$$

$$\text{GTNN của } A = \frac{2020}{2021} \Leftrightarrow x = 2019$$

Câu 70. (HSG 7 trường Mỹ Hưng 2016 - 2017; trường Hùng Thụ 2017 - 2018; trường Cù Chính Lan 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = |x - 2013| + |x - 2014| + |x - 2015|$

Lời giải

$$A = |x - 2013| + |x - 2014| + |x - 2015|$$

$$A = (|x - 2013| + |x - 2015|) + |x - 2014|$$

$$\text{Vì } |x - 2015| = |2015 - x|$$

$$\Rightarrow A = (|x - 2013| + |2015 - x|) + |x - 2014|$$

$$\text{Mà } |x - 2013| + |2015 - x| \geq |x - 2013 + 2015 - x| = 2$$

Do đó:

$$\left. \begin{array}{l} A = (|x - 2013| + |2015 - x|) + |x - 2014| \geq 2 + |x - 2014| \\ |x - 2014| \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A \geq 2$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2013)(2015 - x) \geq 0 \\ x - 2014 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2014 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là $2 \Leftrightarrow x = 2014$

Câu 71. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2016 - 2017; trường Nhơn Trí 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức $g(x) = 16x^4 - 72x^2 + 90$

Lời giải

$$g(x) = 16x^4 - 72x^2 + 90 = (4x^2)^2 - 2 \cdot 4x^2 \cdot 9 + 9^2 + 9 = (4x^2 - 9)^2 + 9$$

Với mọi giá trị của x ta có: $(4x^2 - 9)^2 \geq 0 \Rightarrow g(x) = (4x^2 - 9)^2 + 9 \geq 9$

$$g(x)_{\min} = 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{2}$$

Câu 72. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2016 - 2017; huyện Tân An, trường Phan Đình Phùng 2017 - 2018; huyện Hoài Nhơn - Bình Định, trường Đào Duy Từ, huyện Nam Trà My, huyện Thăng Bình 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của A , biết: $A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000|$

Lời giải

Ta có $|7x - 5y| \geq 0$; $|2z - 3x| \geq 0$ và $|xy + yz + zx - 2000| \geq 0 \Rightarrow A \geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi
$$\begin{cases} 7x = 5y \\ 2z = 3x \\ xy + yz + zx = 2000 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{7} \\ \frac{x}{2} = \frac{z}{3} \\ xy + yz + zx = 2000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = \frac{y}{14} \\ \frac{x}{10} = \frac{z}{15} \\ xy + yz + zx = 2000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = \frac{y}{14} = \frac{z}{15} \\ xy + yz + zx = 2000 \end{cases}$$

Đặt $\frac{x}{10} = \frac{y}{14} = \frac{z}{15} = k$, khi đó $x = 10k; y = 14k; z = 15k$

Suy ra $xy + yz + zx = 2000$

$$\Rightarrow 10k \cdot 14k + 14k \cdot 15k + 15k \cdot 10k = 2000$$

$$\Rightarrow 140k^2 + 210k^2 + 150k^2 = 2000$$

$$\Rightarrow 500k^2 = 2000$$

$$\Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = 2 \text{ hoặc } k = -2$$

Dùng phương pháp thế, từ đó tìm được:
$$\begin{cases} x = 20, y = 28, z = 30 \\ x = -20, y = -28, z = -30 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 0 . Dấu "=" xảy ra khi $(x; y; z) = (20; 28; 30)$ hoặc $(x; y; z) = (-20; -28; -30)$

Câu 73. (HSG 7 trường Quang Trung 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau khi x thay đổi: $B = |x - 2| + |3 - x|$

Lời giải

Ta xét các trường hợp: $x < 2$, $2 \leq x \leq 3$, $x > 3$.

Nếu $x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0$, $3 - x > 0$

Do đó: $|x - 2| = -(x - 2)$; $|3 - x| = 3 - x \Rightarrow B = -(x - 2) + 3 - x = -2x + 5$

Vì $x < 2 \Rightarrow -x > -2$. Do đó $B = -2x + 5 > (-2) \cdot 2 + 5 \Rightarrow B > 1 \Rightarrow B$ nhỏ nhất $= 2$

Nếu $2 \leq x \leq 3 \Rightarrow x - 2 \geq 0$, $3 - x \geq 0 \Rightarrow B = x - 2 + 3 - x = 1 \Rightarrow B = 1$

Nếu $x > 3 \Rightarrow x - 2 > 0$, $3 - x < 0 \Rightarrow B = x - 2 - (3 - x) = 2x - 5$

$$\text{Vì } x > 3 \Rightarrow B = 2x - 5 > 2 \cdot 3 - 5 \Rightarrow B > 1 \Rightarrow B = 2$$

Từ 3 trường hợp trên ta được giá trị nhỏ nhất của biểu thức B là 1 khi $2 \leq x \leq 3$

Câu 74. (HSG 7 huyện Hiệp Đức, trường Thanh Thùy 2018 - 2019)

$$C = \frac{|x - 2017| + 2018}{|x - 2017| + 2019}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Lời giải

$$C = \frac{|x - 2017| + 2018}{|x - 2017| + 2019} = \frac{(|x - 2017| + 2019) - 1}{|x - 2017| + 2019} = 1 - \frac{1}{|x - 2017| + 2019}$$

Biểu thức C đạt giá trị nhỏ nhất khi $|x - 2017| + 2019$ có giá trị nhỏ nhất

$$\text{Mà } |x - 2017| \geq 0 \text{ nên } |x - 2017| + 2019 \geq 2019$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x = 2017 \Rightarrow C = \frac{2018}{2019}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{2018}{2019}$ khi $x = 2017$

Câu 75. (HSG 7 huyện Tân Lạc - Hòa Bình 2015 - 2016; huyện Nam Sách - Hải Dương 2017 - 2018; huyện Phú Ninh 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x|$

Lời giải

$$\text{Vì } |2015 - x| \geq 0 \text{ nên } A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x| \geq |2014 - x| + |2016 - x|$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2015$ (1)

$$\text{Ta có: } |2014 - x| + |2016 - x| = |x - 2014| + |2016 - x| \geq |x - 2014 + 2016 - x| = 2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x - 2014)(2016 - x) \geq 0$, suy ra $2014 \leq x \leq 2016$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2015$

Vậy A nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 2015$.

Câu 76. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2018 - 2019)

Cho biểu thức $M = \frac{5 - x}{x - 2}$. Tìm x nguyên để M có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$\text{Ta có: } M = \frac{5 - x}{x - 2} = \frac{3 - (x - 2)}{x - 2} = \frac{3}{x - 2} - 1 \quad (x \neq 2)$$

$$M \text{ nhỏ nhất} \Rightarrow \frac{3}{x - 2} \text{ nhỏ nhất} \Rightarrow x - 2 \text{ lớn nhất và } x - 2 < 0$$

$$\Rightarrow x \text{ lớn nhất và } x < 2 \Rightarrow x = 1 \quad (x \in \mathbb{Z})$$

Khi đó GTNN của M là $M = \frac{3}{1-2} - 1 = -4 \Leftrightarrow x = 1$

Câu 77. (HSG 7 huyện Lộc Hà 2018 - 2019; huyện Yên Lập 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x + 2| + |2x - 2013|$ với x là số nguyên.

Lời giải

Ta có: $A = |2x + 2| + |2x - 2013| = |2x + 2| + |2013 - 2x| \geq |2x + 2 + 2013 - 2x| = 2015$

Dấu "=" xảy ra khi $(2x + 2)(2013 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$

Vậy $Max A = 2015$ khi $x = -1$

Câu 78. (HSG 7 huyện Việt Yên 2018 - 2019)

Cho 4 số không âm a, b, c, d thỏa mãn $a + b + c + d = 1$. Gọi S là tổng các giá trị tuyệt đối của hiệu từng cặp số có được từ 4 số này. S có thể đạt được giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

Giả sử $a \geq b \geq c \geq d$ khi đó:

$$S = |a - b| + |a - c| + |a - d| + |b - c| + |b - d| + |c - d|$$

$$S = (a - b) + (a - c) + (a - d) + (b - c) + (b - d) + (c - d)$$

$$S = (3a + b) - (c + 3d)$$

Do $c + 3d \geq 0 \Rightarrow S \leq 3a + b; S = 3a + b$ khi $c = d = 0$, lúc đó $a + b = 1$

Do $a \leq 1$ ta có: $S = 2a + (a + b) = 2a + 1 \leq 2 \cdot 1 + 1$ hay $S \leq 3$

Vậy S có thể đạt được giá trị lớn nhất bằng 3.

Câu 79. (HSG 7 (đề 333) 2016 - 2017; trường Sương Bình 2017 - 2018; trường Thanh Cao 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |x - 2006| + |2007 - x|$

Lời giải

Có $A = |x - 2006| + |2007 - x| \geq |x - 2006 + 2007 - x|$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (x - 2006)(2007 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 2006 \leq x \leq 2007$

Vậy $A_{\min} = 1 \Leftrightarrow 2006 \leq x \leq 2007$

Câu 80. (HSG 7 trường Xuân Dương 2013 - 2014; trường Trà My 2018 - 2019)

Tìm giá trị nguyên lớn nhất của biểu thức $M = \frac{15 - x}{5 - x}$

Lời giải

$M = \frac{15 - x}{5 - x} = 1 + \frac{10}{5 - x}$ lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{10}{5 - x}$ lớn nhất

$$+) x > 5 \text{ thì } \frac{10}{5-x} < 0 \quad (1)$$

+) $x < 5$ thì $\frac{10}{5-x} > 0$ mà $\frac{10}{5-x}$ có tử không đổi nên phương trình có giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất mà $5-x$ là số nguyên dương nhỏ nhất khi $5-x=1 \Rightarrow x=4$

$$\text{Khi đó } \frac{10}{5-x} = 10 \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) thấy $\frac{10}{5-x}$ lớn nhất bằng 10.

Vậy GTLN của $M=11$ khi và chỉ khi $x=4$

Câu 81. (HSG 7 huyện Tam Dương - Vĩnh phúc 2016 - 2017; huyện Phủ Lý, trường Lý Tự Trọng 2018 - 2019)

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $2x=3y=5z$ và $|x-2y|=5$. Tìm giá trị lớn nhất của $3x-2z$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{x}{3} = \frac{2y}{4} = \frac{x-2y}{-1}, 3y=5z$$

Nếu $x-2y=5 \Rightarrow x=-15, y=-10, z=-6$. Khi đó $3x-2z=-45+12=-33$

Nếu $x-2y=-5 \Rightarrow x=15, y=10, z=6$. Khi đó $3x-2z=45-12=33$

Vậy giá trị lớn nhất của $3x-2z$ là 33.

Câu 82. (HSG 7 trường Hưng Vũ 2018 - 2019)

$$C = \frac{-4}{(2x-3)^2+5}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

Lời giải

$$C \text{ nhỏ nhất} \Rightarrow (2x-3)^2+5 \text{ lớn nhất}$$

$$\text{Mà mẫu số } (2x-3)^2+5 \geq 5 (\forall x \in \mathbb{Q})$$

$$\text{Vậy } C_{\min} = \frac{-4}{5} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Câu 83. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất của các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = |x+5|+5$$

$$\text{b) } B = \frac{x^2+17}{x^2+7}$$

Lời giải

$$a) A = |x + 5| + 5$$

Ta có: $|x + 5| \geq 0 \Rightarrow A \geq 5$. Dấu "=" xảy ra khi $x = -5$

Vậy $MinA = 5 \Leftrightarrow x = -5$.

$$b) B = \frac{x^2 + 17}{x^2 + 7} = \frac{(x^2 + 7) + 10}{x^2 + 7} = 1 + \frac{10}{x^2 + 7}$$

Ta có: $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 7 \geq 7 \Rightarrow \frac{10}{x^2 + 7} \leq \frac{10}{7} \Rightarrow 1 + \frac{10}{x^2 + 7} \leq 1 + \frac{10}{7} \Rightarrow B \leq \frac{17}{7}$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$

$$MaxB = \frac{17}{7} \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy

Câu 84. (HSG 7 trường Bích Hòa 2017 - 2018)

$$A = \frac{|x| + 1996}{-1997}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

Lời giải

$A < 0$ với mọi x nên A đạt giá trị lớn nhất khi $|A|$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$|A| = \left| \frac{|x| + 1996}{-1997} \right| = \frac{|x| + 1996}{1997}$$

$|x| \geq 0 \forall x$ nên $|x| + 1996 \geq 1996$, vậy $|A|$ nhỏ nhất bằng $\frac{1996}{1997} \Leftrightarrow x = 0$

$$A = \frac{1996}{-1997} \Leftrightarrow x = 0$$

Suy ra GTLN của

Câu 85. (HSG 7 trường Kim An, trường Phú Trường 2017 - 2018)

$$A = \frac{x + 2}{|x|}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: với x là số nguyên.

Lời giải

Xét các trường hợp:

$$+) x \leq -2 \Rightarrow A \leq 0$$

$$+) x = -1 \Rightarrow A = 1$$

$$+) x \geq 1 \Rightarrow A = \frac{x + 2}{x} = 1 + \frac{2}{x} \Rightarrow A \text{ lớn nhất} \Rightarrow \frac{2}{x} \text{ lớn nhất}$$

Vì x là số nguyên dương, nên $\frac{2}{x}$ lớn nhất $\Rightarrow x$ nhỏ nhất, tức là $x = 1$, khi đó $A = 3$

Vậy giá trị lớn nhất của $A = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Câu 86. (HSG 7 huyện Việt Yên 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |2013 - x| + |2014 - x|$

Lời giải

Áp dụng BĐT $|a| + |b| \geq |a + b|$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ab \geq 0$

Ta có: $P = |2013 - x| + |2014 - x| = |x - 2013| + |2014 - x|$

$$P \geq |x - 2013 + 2014 - x| = |1| = 1$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x - 2013)(2014 - x) \geq 0$, hay $2013 \leq x \leq 2014$

Vậy $MinP = 1$ khi $2013 \leq x \leq 2014$.

Câu 87. (HSG 7 huyện Thạch Thành - Thanh Hoá 2017 - 2018)

Cho các số a, b, c không âm thỏa mãn: $a + 3c = 2016; a + 2b = 2017$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a + b + c$.

Lời giải

Ta có: $a + 3c = 2016$ (1) và $a + 2b = 2017$ (2)

Từ (1) $\Rightarrow a = 2016 - 3c$

Trừ theo vế của (2) và (1), ta được $2b - 3c = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1 + 3c}{2}$. Khi đó:

$$\begin{aligned} P = a + b + c &= (2016 - 3c) + \frac{1 + 3c}{2} + c \\ &= \left(2016 + \frac{1}{2}\right) + \frac{-6c + 3c + 2c}{2} = 2016 \frac{1}{2} - \frac{c}{2} \end{aligned}$$

Vì a, b, c không âm nên $P = 2016 \frac{1}{2} - \frac{c}{2} \leq 2016 \frac{1}{2}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} c = 0 \\ a + 3c = 2016 \\ a + 2b = 2017. \end{cases} \text{ hay } a = 2016, b = \frac{1}{2}, c = 0$$

Vậy $MaxP = 2016 \frac{1}{2}$ khi $a = 2016, b = \frac{1}{2}, c = 0$.

Câu 88. (HSG 7 huyện Hoàng Hoá - Thanh Hoá 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = |2012 - x| + |2013 - x|$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức: $|A| + |B| \geq |A + B|$. Dấu "=" xảy ra khi $AB \geq 0$ (*)

Ta có: $M = |2012 - x| + |2013 - x| = |2012 - x| + |x - 2013|$

$$\geq |2012 - x + x - 2013| = |-1| = 1$$

Dấu “=” xảy ra khi $(2012 - x)(x - 2013) \geq 0 \Rightarrow 2012 \leq x \leq 2013$

Vậy $MinM = 1 \Leftrightarrow 2012 \leq x \leq 2013$

Câu 89. (HSG 7 huyện Mô Cày 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + \sqrt{x} + 1$

Lời giải

ĐKXD: $x \geq 0$

Ta có: $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x + \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow P = x + \sqrt{x} + 1 \geq 1$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$ (thỏa mãn ĐKXD). Vậy $P_{\min} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Câu 90. (HSG 7 huyện Sông Lô 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x - 2015| + |x - 2016| + |x - 2017|$

Lời giải

$P = |x - 2015| + |2016 - x| + |x - 2017| = (|x - 2015| + |2017 - x|) + |x - 2016|$

Ta có: $|x - 2015| + |2017 - x| \geq |x - 2015 + 2017 - x| = 2$

Dấu “=” xảy ra khi $2015 \leq x \leq 2017$ (1)

Lại có $|x - 2016| \geq 0$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 2016$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\min P = 2 \Leftrightarrow x = 2016$

Câu 91. (HSG 7 huyện Sông Lô 2017 - 2018)

Cho bốn số nguyên dương khác nhau thỏa mãn tổng của hai số bất kỳ chia hết cho 2 và tổng của ba số bất kỳ chia hết cho 3 . Tính giá trị nhỏ nhất của tổng bốn số này

Lời giải

Nhận xét: Vì trong bốn số nguyên dương khác nhau luôn thỏa mãn tổng của hai số bất kỳ chia hết cho 2 và tổng của ba số bất kỳ chia hết cho 3 nên bốn số phải cùng số dư khi chia cho 2 và 3 . Để có tổng nhỏ nhất, mỗi trong hai số dư này là 1

Từ đó ta có các số $1, 7, 13, 19$. Tổng của chúng là $1 + 7 + 13 + 19 = 40$.

Câu 92. (HSG 7 huyện Tam Dương - Vĩnh phúc 2017 - 2018)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{27 - 2x}{12 - x}$ (với $x \in \mathbb{Z}$)

Lời giải

Ta có: $Q = \frac{27 - 2x}{12 - x} = 2 + \frac{3}{12 - x}$, suy ra Q lớn nhất khi $\frac{3}{12 - x}$ lớn nhất

* Nếu $x > 12$ thì $12 - x < 0 \Rightarrow \frac{3}{12 - x} < 0$

* Nếu $x < 12$ thì $12 - x > 0 \Rightarrow \frac{3}{12 - x} > 0$

Từ hai trường hợp trên suy ra $\frac{3}{12 - x}$ lớn nhất khi $12 - x > 0$

Vì phân số $\frac{3}{12 - x}$ có tử và mẫu là các số nguyên dương, tử không đổi nên phân số có giá trị lớn nhất khi mẫu là số nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow 12 - x = 1 \Rightarrow x = 11$

Suy ra A có giá trị lớn nhất là 5 khi $x = 11$.

Câu 93. (HSG 7 trường Nguyễn Du 2016 - 2017; trường Ngô Gia Tự, huyện Phù Cát 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = |x - 2| + |x - 8|$

Lời giải

Ta có: $B = |x - 2| + |x - 8| = |x - 2| + |8 - x| \geq |x - 2 + 8 - x| = 6$

Dấu "=" xảy ra khi $(x - 2)(8 - x) \geq 0 \Rightarrow 2 \leq x \leq 8$

Vậy $B_{\min} = 6$ khi $2 \leq x \leq 8$.

Câu 94. (HSG 7 huyện Khoái Châu 2014 - 2015; huyện Mù Cang Chải 2016 - 2017)

$$C = \frac{2(x - 1)^2 + 1}{(x - 1)^2 + 2}$$

Cho biểu thức: $C = \frac{2(x - 1)^2 + 1}{(x - 1)^2 + 2}$. Với giá trị nào của x thì biểu thức C có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải

$$C = \frac{2(x - 1)^2 + 1}{(x - 1)^2 + 2} = \frac{2[(x - 1)^2 + 2] - 3}{(x - 1)^2 + 2} = 2 - \frac{3}{(x - 1)^2 + 2}$$

Ta có:

Suy ra C nhỏ nhất khi $\frac{3}{(x - 1)^2 + 2}$ lớn nhất.

Vì $(x - 1)^2 + 2 \geq 2$ nên $\frac{3}{(x - 1)^2 + 2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 2 - \frac{3}{(x - 1)^2 + 2} \geq 2 - \frac{3}{2}$ hay $C \geq \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của C bằng $\frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $x = 1$.

Câu 95. (HSG 7 đề 351 2014 - 2015; huyện Việt Yên 2016 - 2017)

Cho $F = \frac{42 - x}{x - 15}$. Tìm số nguyên x để F đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải

a) Ta thấy $F = \frac{42 - x}{x - 15} = -1 + \frac{27}{x - 15}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\frac{27}{x - 15}$ nhỏ nhất

Xét $x - 15 > 0$ thì $\frac{27}{x - 15} > 0$

Xét $x - 15 < 0$ thì $\frac{27}{x - 15} < 0$

Vậy $\frac{27}{x - 15}$ nhỏ nhất khi $x - 15 < 0$

Phân số $\frac{27}{x - 15}$ có tử dương mẫu âm

Khi đó $\frac{27}{x - 15}$ nhỏ nhất khi $x - 15$ là số nguyên âm lớn nhất $\Rightarrow x - 15 = -1 \Rightarrow x = 14$

Vậy khi $x = 14$ thì F đạt giá trị nhỏ nhất bằng -28

Câu 96. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2016 - 2017)

Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của các biểu thức $A = |x + 5| + 5$

Lời giải

Ta có: $|x + 5| \geq 0$ nên $A = |x + 5| + 5 \geq 5$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = -5$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 5 , đạt được khi $x = -5$.

Câu 97. (HSG 7 tỉnh Bắc Giang 2012 - 2013)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x - 2012| + |x - 2013|$ với x là số tự nhiên.

Lời giải

$$P = |x - 2012| + |x - 2013|$$

Nếu $x = 2012$ hoặc $x = 2013$ thì $P = 1$

Nếu $x > 2013$ thì $x - 2012 > 1 > 0 \Rightarrow |x - 2012| = x - 2012 > 1$

Nên $P = |x - 2012| + |x - 2013| > 1 + |x - 2013| > 1$

Nếu $x < 2012$ thì $x - 2013 < -1 < 0 \Rightarrow |x - 2013| = 2013 - x$

Mà $x - 2013 < -1 \Rightarrow 2013 - x > 1 \Rightarrow |x - 2013| = 2013 - x > 1$

Nên $P = |x - 2012| + |x - 2013| > |x - 2012| + 1 > 1$

Do đó giá trị nhỏ nhất của P bằng 1 , đạt được khi $x = 2012$ hoặc $x = 2013$.

Câu 98. (HSG 7 huyện Việt Yên 2013 - 2014; thị xã Bình Long 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x - 2| + |2x - 2003|$ với x là số nguyên.

Lời giải

Ta có: $A = |2x - 2| + |2x - 2003| = |2x - 2| + |2003 - 2x| \geq |2x - 2 + 2003 - 2x| = 2001$

$$(2x - 2)(2003 - 2x) \geq 0 \Rightarrow 2 \leq 2x \leq 2003 \Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{2003}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

Mà x là số nguyên nên $1 \leq x \leq 1001; x \in \mathbf{Z}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2001 , đạt được với các giá trị nguyên của x thỏa mãn $1 \leq x \leq 1001$.

Câu 99. (HSG 7 huyện Thanh Oai 2014 - 2015)

Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $B = \frac{8-x}{x-3}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có
$$B = \frac{8-x}{x-3} = \frac{5-(x-3)}{x-3} = \frac{5}{x-3} - 1$$

Để B đạt giá trị nhỏ nhất cần $\frac{5}{x-3}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Xét $x > 3 \Rightarrow x - 3 > 0$ thì $\frac{5}{x-3} > 0$

Xét $x < 3 \Rightarrow x - 3 < 0 \Rightarrow \frac{5}{x-3} < 0$

Vậy $\frac{5}{x-3}$ nhỏ nhất khi $x - 3 < 0$

Phân số $\frac{5}{x-3}$ (với x là số nguyên) có tử dương ($5 > 0$) và mẫu âm ($x - 3 < 0$)

Nên $\frac{5}{x-3}$ nhỏ nhất khi $(x-3)$ là số nguyên âm lớn nhất $\Rightarrow x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2$

Khi đó
$$B = \frac{5}{-1} - 1 = -6$$

Vậy với $x = 2$ thì B đạt giá trị nhỏ nhất là -6 .

Câu 100. (HSG 7 trường Cao Dương 2016 - 2017; huyện Bát Xát 2022 - 2023)

$$A = \frac{4}{(2x-3)^2+5}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

Lời giải

Với $4 > 0$, để $A = \frac{4}{(2x-3)^2+5}$ có giá trị lớn nhất cần $(2x-3)^2+5$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$(2x-3)^2+5 \geq 5 \Rightarrow \frac{4}{(2x-3)^2+5} \leq \frac{4}{5}$$

Mà

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{3}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của A là $\frac{4}{5}$, đạt được khi $x = \frac{3}{2}$.

Câu 101. (HSG 7 huyện Bảo Thắng 2022 - 2023)

Cho biểu thức $A = -16 - |3x - 18| - |y - 11|$. Tìm x, y để A đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

Ta có: $A = -16 - |3x - 18| - |y - 11|$

$$\text{Vì } \begin{cases} |3x - 18| \geq 0 \\ |y - 11| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow -|3x - 18| - |y - 11| \leq 0$$

$$A = -16 - |3x - 18| - |y - 11| \leq -16$$

Giá trị lớn nhất của A là -16 khi và chỉ khi

$$\Rightarrow -|3x - 18| - |y - 11| = 0 \Rightarrow \begin{cases} |3x - 18| = 0 \\ |y - 11| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 18 \\ y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{18}{3} \\ y = 11 \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của A là -16 khi và chỉ khi $\begin{cases} x = \frac{18}{3} \\ y = 11 \end{cases}$.

Câu 102. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)

Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 6109$ và $0 \leq z \leq y + 4 \leq x + 19$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x - 2$.

Lời giải

Ta có $0 \leq z \leq y + 4 \leq x + 19$ nên $z \leq x + 19$ và $y \leq x + 15$

Suy ra $x + y + z \leq x + x + 15 + x + 19$

$$\Rightarrow 6109 \leq 3x + 34 \Rightarrow 3x \geq 5985 \Rightarrow x \geq 1995$$

Do đó $P = x - 2 \geq 1995 - 2 = 1993$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 1995$, $y = 1995 + 15 = 2010$, $z = 1995 + 19 = 2014$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = x - 2$ là 1993 khi $x = 1995$, $y = 2010$, $z = 2014$

Câu 103. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2022 - 2023)

$$A = \frac{|x - 2020| + |x - 2021| + 2022}{|x - 2020| + |x - 2021| + 2023}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

Lời giải

$$A = \frac{|x-2020|+|x-2021|+2022}{|x-2020|+|x-2021|+2023} = \frac{|x-2020|+|x-2021|+2023-1}{|x-2020|+|x-2021|+2023}$$

Ta có

$$= 1 - \frac{1}{|x-2020|+|x-2021|+2023}$$

Khi đó A nhỏ nhất khi $\frac{1}{|x-2020|+|x-2021|+2023}$ lớn nhất
 $\Rightarrow |x-2020|+|x-2021|+2023$ nhỏ nhất

Ta có: $|x-2020|+|x-2021|+2023 = |x-2020|+|2021-x|+2023$
 $\geq |x-2020+2021-x|+2023 \geq 2024$

Dấu “=” xảy ra $(x-2020)(x-2021) \geq 0 \Leftrightarrow 2020 \leq x \leq 2021$

Vậy $Min A = 1 - \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024} \Leftrightarrow 2020 \leq x \leq 2021$

Câu 104. (HSG 7 trường Nguyệt Ân - TP Vinh 2022 - 2023)

Cho x, y là các số nguyên dương thỏa mãn: $\frac{x+2y}{x+y} = \frac{2023}{2022}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của x .

Lời giải

Ta có: $\frac{x+2y}{x+y} = \frac{2023}{2022} \Rightarrow 1 + \frac{y}{x+y} = 1 + \frac{1}{2022} \Rightarrow \frac{y}{x+y} = \frac{1}{2022}$
 $\Rightarrow 2022y = x+y \Rightarrow x = 2021y$

Vì y là số nguyên dương nên $2021y \geq 2021 \Rightarrow x \geq 2021$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $y = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của x bằng 2021, đạt tại $y = 1$

Câu 105. (HSG 7 huyện Vũ Thư 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $D = \sqrt{(2x+1)^2 + 4} + 3|4y^2 - 1| + 5$

Lời giải

$$(2x+1)^2 \geq 0 \forall x \Rightarrow (2x+1)^2 + 4 \geq 4 \forall x \Rightarrow \sqrt{(2x+1)^2 + 4} \geq \sqrt{4} = 2 \forall x$$

$$|4y^2 - 1| \geq 0 \forall y \Rightarrow 3|4y^2 - 1| \geq 0 \forall y$$

$$\Rightarrow \sqrt{(2x+1)^2 + 4} + |4y^2 - 1| + 5 \geq 2 + 0 + 5 = 7 \forall x, y$$

$$\Rightarrow D \geq 7 \Rightarrow D_{\min} = 7$$

$$x = \frac{-1}{2} \quad 4y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi

Vậy $D_{\min} = 7$ tại $x = \frac{-1}{2}, y = \pm \frac{1}{2}$.

Câu 106. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

$$A = \frac{2(x-1)^2 + 4(2x+y-1)^2 + 19}{(x-1)^2 + 2(2x+y-1)^2 + 4}$$

Tính giá trị lớn nhất của biểu thức

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{2(x-1)^2 + 4(2x+y-1)^2 + 19}{(x-1)^2 + 2(2x+y-1)^2 + 4} = \frac{2 \left[(x-1)^2 + 2(2x+y-1)^2 + 4 \right] + 11}{(x-1)^2 + 2(2x+y-1)^2 + 4} \\ &= 2 + \frac{11}{(x-1)^2 + 2(2x+y-1)^2 + 4} \end{aligned}$$

Vì $(x-1)^2 \geq 0; 2(2x+y-1)^2 \geq 0 \Rightarrow (x-1)^2 + 2(2x+y-1)^2 + 4 \geq 4$

$$\Rightarrow \frac{11}{(x-1)^2 + 2(2x+y-1)^2 + 4} \leq \frac{11}{4}$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{11}{(x-1)^2 + 2(2x+y-1)^2 + 4} \leq \frac{19}{4} \Rightarrow A \leq \frac{19}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Dấu bằng xảy ra

$$A = \frac{19}{4} \Leftrightarrow (x; y) = (1; -1)$$

Vậy Max

Câu 107. (HSG 7 huyện Nho Quan - Ninh Bình 2022 - 2023)

$$P = |x-2021| + |x-2023| + |x-2025|.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Lời giải

Ta có: $|x-2021| + |x-2025| = |x-2021| + |2025-x| \geq |x-2021+2025-x| = 4$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $2021 \leq x \leq 2025$. (1)

Mặt khác: $|x-2023| \geq 0$, dấu “=” xảy ra khi $x = 2023$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $P = |x-2021| + |x-2023| + |x-2025| \geq 4$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} 2021 \leq x \leq 2025 \\ x = 2023 \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4 khi $x = 2023$.

Câu 107. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa - Thanh Hóa 2022 - 2023)

Với a và b là các số thực, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3a^2 + b^2 + 3ab + 3a + 2b + 3$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= 3a^2 + b^2 + 3ab + 3a + 2b + 3 \\ &= a^2 + (a^2 + b^2 + 1 + 2ab + 2a + 2b) + a(a+b+1) + 2 \\ &= a^2 + (a+b+1)^2 + a(a+b+1) + 2 \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a+b+1)^2 + a(a+b+1) + \frac{3a^2}{4} + 2 \\ &= \left(\frac{3}{2}a+b+1\right)^2 + \frac{3a^2}{4} + 2 \end{aligned}$$

Do đó $P \geq 2$ vì $\left(\frac{3}{2}a+b+1\right)^2 \geq 0$ và $\frac{3a^2}{4} > 0$

Vậy GTNN của P là 2 khi $a=0; b=-1$

Câu 108. (HSG 7 huyện Kim Thành 2022 - 2023)

Cho a, b, c là các số tự nhiên khác 0 thỏa mãn: $\frac{95}{24} < \frac{a+1}{a} + \frac{b+1}{b} + \frac{c+1}{c} < 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = a + b + c + 2011$.

Lời giải

P nhỏ nhất khi a, b, c nhỏ nhất và thỏa mãn điều kiện bài toán.

$$\frac{95}{24} < \frac{a+1}{a} + \frac{b+1}{b} + \frac{c+1}{c} < 4$$

$$\frac{95}{24} < 1 + \frac{1}{a} + 1 + \frac{1}{b} + 1 + \frac{1}{c} < 4$$

$$\frac{23}{24} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1 \quad (*)$$

a, b, c có vai trò như nhau, giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$.

$$\frac{23}{24} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{3}{c} \Rightarrow \frac{23}{24} < \frac{3}{c} \Rightarrow c < 3 \frac{3}{23}$$

Từ $(*) \Rightarrow \frac{1}{c} < 1 \Rightarrow c > 1$

Do đó $1 < c < 3 \frac{3}{23}$ mà c là số tự nhiên $\Rightarrow c = 2; c = 3$.

TH1: Nếu $c = 2$ thì $\frac{11}{24} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$.

$$\frac{11}{24} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{2}{b} \Rightarrow \frac{11}{24} < \frac{2}{b} \Rightarrow b < 4 \frac{4}{11}$$

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{2} \Rightarrow b > 2 \Rightarrow 4 \frac{4}{11} > b > 2$$

Do b là số tự nhiên nên $b = 3; b = 4$.

Với $b = 3$ thì $\frac{1}{8} < \frac{1}{a} < \frac{1}{6} \Rightarrow 8 > a > 6$

Do a là số tự nhiên nên $a = 7$.

Ta được $a = 7; b = 3; c = 2$ thỏa mãn (*) và $a \geq b \geq c$

Với $b = 4$ thì $\frac{5}{24} < \frac{1}{a} < \frac{1}{4} \Rightarrow 4 \frac{4}{5} > a > 4$

Do a là số tự nhiên nên không có giá trị thỏa mãn.

TH2: Nếu $c = 3$ thì $\frac{5}{8} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{2}{3}$.

$$\frac{1}{b} < \frac{2}{3} \Rightarrow b > 1 \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{8} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{2}{b} \Rightarrow \frac{5}{8} < \frac{2}{b} \Rightarrow b < 3 \frac{1}{5} \Rightarrow 3 \frac{1}{5} > b > 1 \frac{1}{2}$$

Do b là số tự nhiên nên $b = 2; b = 3$.

* Nếu $b = 2$ thì $\frac{1}{8} < \frac{1}{a} < \frac{1}{6} \Rightarrow 8 > a > 6$ mà a là số tự nhiên nên $a = 7$.

Ta được $a = 7; b = 2; c = 3$ (không thỏa mãn $a \geq b \geq c$)

* Nếu $b = 3$ thì $\frac{7}{24} < \frac{1}{a} < \frac{1}{3} \Rightarrow 4 \frac{3}{7} > a > 3$ mà a là số tự nhiên nên $a = 4$.

Ta được $a = 4; b = 3; c = 2$ không thỏa mãn (*).

Từ các trường hợp trên ta thấy P đạt giá trị nhỏ nhất là $P = a + b + c + 2011 = 2023$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $P = 2023$ khi $a = 7; b = 3; c = 2$ và các hoán vị của nó.

Câu 109. (HSG 7 huyện Văn Bàn 2022 - 2023)

$$B = \frac{2020}{5 + (2x - 3y)^2 + |xy - 24|}$$

Tìm GTLN của biểu thức

Lời giải

Vì $(2x - 3y)^2 \geq 0; |xy - 24| \geq 0 \Rightarrow (2x - 3y)^2 + |xy - 24| \geq 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 5 + (2x - 3y)^2 + |xy - 24| \geq 5 \\ &\Rightarrow \frac{2020}{5 + (2x - 3y)^2 + |xy - 24|} \leq \frac{2020}{5} = 404 \\ &\Rightarrow B \leq 404 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} 2x - 3y = 0 & (1) \\ xy - 24 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow 2x = 3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2}$$

Từ

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = k \Rightarrow \begin{cases} x = 3k \\ y = 2k \end{cases}$$

Đặt

$$\text{Mà } xy - 24 = 0 \Rightarrow 3k \cdot 2k - 24 = 0 \Rightarrow 6k^2 = 24 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -6 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } B_{\max} = 404 \text{ khi } \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -6 \\ y = -4 \end{cases}$$

Câu 110. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ 2022 - 2023)

Cho biểu thức: $P = \frac{3 - 2x}{2 - x}$ với x là số nguyên. Tìm giá trị lớn nhất của P .

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \frac{3 - 2x}{2 - x} = \frac{2x - 3}{x - 2} = \frac{2(x - 2) + 1}{x - 2} = 2 + \frac{1}{x - 2}$$

Để P có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{1}{x - 2}$ có giá trị lớn nhất.

$$x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow \frac{1}{x - 2} < 0 \quad (1)$$

+ Với

$$x = 2 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{x - 2} \text{ không có nghĩa } (2)$$

+ Với

$$x > 2 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x - 2} > 0$$

+ Với

Phân số $\frac{1}{x - 2}$ có tử và mẫu đều dương, tử không đổi nên phân số đạt giá trị lớn nhất khi mẫu đạt giá trị nhỏ nhất.

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 2 \in \mathbb{Z}$ và $x - 2 > 0$ nên $x - 2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi

$$x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow \frac{1}{x - 2} = 1 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{1}{x-2}$ có giá trị lớn nhất là 1 khi $x=3$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3 khi $x=3$.

Dạng 2.1: Bất đẳng thức về chứng minh tổng phân số tự nhiên

Câu 1. (HSG 7 huyện Đồng Xuân 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100}$. Chứng minh rằng $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) - \dots - \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) - \frac{1}{100} \\ &= \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) - \dots - \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) - \frac{1}{100} < \frac{5}{6} \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác: $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9900}$

$$A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right) + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9900} = \frac{7}{12} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9900} > \frac{7}{12} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh.

Câu 2. (HSG 7 huyện Nga Sơn 2022 - 2023)

Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2023} - 1}$. Chứng minh rằng: $A > \frac{2023}{2}$.

Lời giải

Ta có: $A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2022} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{2023}}\right) - \frac{1}{2^{2023}}$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2022}} + \dots + \frac{1}{2^{2023}}\right) - \frac{1}{2^{2023}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{2022} \cdot \frac{1}{2^{2023}} - \frac{1}{2^{2023}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2006}} = 1 + 2016 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2016}} = \frac{2023}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^{2023}}\right) > \frac{2023}{2}$$

Vậy $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2023} - 1} > \frac{2023}{2}$

Câu 3. (HSG 7 huyện Thái Thụy - Thái Bình 2018 - 2019; trường Nguyệt Ân, huyện Ngọc Lặc 2022 - 2023)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì tổng $S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$ không thể là một số nguyên.

Lời giải

S có $(n-1)$ số hạng

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2-1}{n^2} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$S = n-1 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) < n-1 \quad (1)$$

Mặt khác $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{n}$

$$S > n-1 - 1 + \frac{1}{n} = n-2 + \frac{1}{n} > n-2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $n-2 < S < n-1$

Vậy S không có giá trị nguyên với mọi số tự nhiên $n \geq 2$

Câu 4. (HSG 7 huyện Cát Tiên - Lâm Đồng 2018 - 2019)

Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=2016$. Chứng minh rằng giá trị biểu

$$A = \frac{a}{2016-c} + \frac{b}{2016-a} + \frac{c}{2016-b}$$

thức sau không phải là một số nguyên:

Lời giải

$$A = \frac{a}{2016-c} + \frac{b}{2016-a} + \frac{c}{2016-b} = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$$

Ta có: $\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}; \frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{c+a} > \frac{c}{a+b+c} \Rightarrow A > 1$

Mặt khác: $\frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}; \frac{b}{b+c} < \frac{a+b}{a+b+c}; \frac{c}{c+a} < \frac{b+c}{a+b+c} \Rightarrow A < 2$

Vậy $1 < A < 2$ nên A không phải là một số nguyên.

Câu 5. (HSG 7 đề 283 2018 - 2019)

Cho biểu thức $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ với x, y, z, t là các số tự nhiên khác 0 . Chứng minh $M^{10} < 1025$.

Lời giải

$$\frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}, \frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}; \frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\Rightarrow M < \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y}\right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t}\right) \Rightarrow M < 2$$

Có $M^{10} < 2^{10} = 1024 < 1025 \Rightarrow M^{10} < 1025$

Câu 6. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016; trường Nguyễn Khuyến, trường Thái Phiên 2016 - 2017)

Chứng minh rằng $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ có giá trị không phải là số tự nhiên $(x, y, z, t \in \mathbb{N}^*)$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{x}{x+y+z+t} < \frac{x}{x+y+z} < \frac{x}{x+y}$$

$$\frac{y}{x+y+z+t} < \frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}$$

$$\frac{z}{x+y+z+t} < \frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}$$

$$\frac{t}{x+y+z+t} < \frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t}$$

$$\frac{x+y+z+t}{x+y+z+t} < M < \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} \right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t} \right)$$

Hay $1 < M < 2$.

Vậy M có giá trị không phải là số tự nhiên.

Câu 7. (HSG 7 huyện Sơn Dương 2016 - 2017)

Cho $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ với $a, b, c > 0$. Chứng tỏ rằng M không phải là số nguyên.

Lời giải

Vì $a, b, c > 0$ nên: $\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}; \frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{c+a} > \frac{c}{a+b+c}$

Do đó $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$. Do đó $M > 1$ (1)

Mà $\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \right) + \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right)$

$$= \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \right) + \left(\frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c} \right) + \left(\frac{c}{c+a} + \frac{a}{c+a} \right) = 3$$

Vì $\left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right) > 1$ suy ra $M = \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \right) < 2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $1 < M < 2$ nên M không phải là số nguyên.

Câu 8. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa - Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho $C = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2023^2}$. Chứng minh rằng $C < \frac{3}{4}$.

Lời giải

$$C = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2023^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{2023.2023}$$

Ta có:
$$\begin{cases} \frac{1}{3.3} < \frac{1}{2.3} \\ \frac{1}{4.4} < \frac{1}{3.4} \\ \dots \\ \frac{1}{2023.2023} < \frac{1}{2022.2023} \end{cases}$$

Suy ra
$$C < \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2022.2023}$$

$$C < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}$$

$$C < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2023} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$C < \frac{3}{4}$$

Vậy

Câu 9. (HSG 7 huyện Tam Điệp–Ninh Bình 2021 - 2022; huyện Vũ Thư, huyện Thường Xuân 2022 - 2023)

Cho biết $a_1 = 1; a_2 = 1 + \frac{1}{2}; a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}; \dots; a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 2$$

với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1

Lời giải

Với mọi $k \geq 2$, ta có:
$$\frac{1}{k.a_k^2} < \frac{1}{k.a_{k-1}.a_k}$$
 (vì $a_k > a_{k-1}$)

Ta có:
$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1}.a_k} = \frac{1}{k.a_{k-1}.a_k}$$

Suy ra
$$\frac{1}{k.a_k^2} < \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}$$

Cho $k = 2; 3; \dots; n$ ta có:
$$\frac{1}{2a_2^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}; \frac{1}{3a_3^2} < \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}; \dots; \frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$$

Cộng theo vế ta được:

$$\frac{1}{2a_2^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 1 + 1 = 2$$

Dạng 2.2: Bất đẳng thức về chứng minh tổng lũy thừa tự nhiên

Câu 1. (HSG 7 trường Võ Thị Sáu 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2022}}$. Chứng minh rằng: $A < \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $A = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2022}}$

$$4A = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2021}}$$

$$4A - A = \left(1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2021}}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2022}}\right)$$

$$3A = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2021}} - \frac{2022}{4^{2022}}$$

$$3A = \frac{1}{3} \cdot \left(4 - \frac{1}{4^{2021}}\right) - \frac{2022}{4^{2022}}$$

$$3A = \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^{2021}} - \frac{2022}{4^{2022}} < \frac{4}{3} \Rightarrow A < \frac{4}{9} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Vậy $A < \frac{1}{2}$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thọ Xuân–Thanh Hóa 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{65} < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{40}$

Lời giải

Đặt $S = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3}$. Ta có:

Đặt

$$S = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2022.2023.2024}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{4.5.6} + \frac{2}{5.6.7} + \frac{2}{6.7.8} + \dots + \frac{2}{2022.2023.2024} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \frac{1}{5.6} - \frac{1}{6.7} + \frac{1}{6.7} - \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{2022.2023} - \frac{1}{2023.2024} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{2023.2024} \right) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{40} \quad (1)$$

$$S = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} > \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2023.2024.2025}$$

Ta lại có:

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5.6.7} + \frac{2}{6.7.8} + \dots + \frac{2}{2023.2024.2025} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5.6} - \frac{1}{6.7} + \frac{1}{6.7} - \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{2023.2024} - \frac{1}{2024.2025} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5.6} - \frac{1}{2024.2025} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{30} - \frac{1}{2.2024.2025} = \frac{1}{60} - \frac{1}{2.2024.2025} > \frac{1}{60} - \frac{1}{780} = \frac{1}{65} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{1}{65} < S < \frac{1}{40}$.

Vậy $\frac{1}{65} < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{40}$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \frac{5}{5^5} - \dots + \frac{2021}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}} < \frac{5}{36}$

Lời giải

Đặt: $A = \frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \frac{5}{5^5} - \dots + \frac{2021}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}}$. Ta có:

$$5A = 1 - \frac{2}{5^1} + \frac{3}{5^2} - \frac{4}{5^3} + \frac{5}{5^4} - \dots + \frac{2021}{5^{2020}} - \frac{2022}{5^{2021}}$$

$$\Rightarrow 5A + A = 6A = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} - \dots - \frac{1}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2021}}$$

Đặt $P = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{5^5} + \dots - \frac{1}{5^{2021}}$ thì $6A = P - \frac{2022}{5^{2022}}$

$$\Rightarrow 5P = 5 - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} - \dots - \frac{1}{5^{2020}}$$

$$\Rightarrow 6P = 5 - \frac{1}{5^{2021}} \Rightarrow P = \frac{5}{6} - \frac{1}{6.5^{2021}}$$

$$\Rightarrow 6A = \frac{5}{6} - \frac{1}{6.5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}} < \frac{5}{6} \Rightarrow A < \frac{5}{36}$$

Câu 4. (HSG 7 TP Vĩnh Yên 2022 - 2023)

Chứng tỏ: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{2019}} < 0,75$

Lời giải

Đặt $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{2019}}$. Ta có: $3A = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{2019}{3^{2018}}$

Suy ra: $2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} - \frac{2019}{3^{2019}}$

Đặt $M = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}}$

$$\Rightarrow 3M = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2017}}$$

$$\Rightarrow 2M = 1 - \frac{1}{3^{2018}} < 1 \Rightarrow M < \frac{1}{2}$$

Ta có:
$$2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} - \frac{2019}{3^{2019}} = 1 + M - \frac{2019}{3^{2019}} < 1 + M < 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4}$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Ninh Giang 2022 - 2023)

$$A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2022}} < \frac{3}{4}$$

Chứng minh rằng:

Lời giải

Ta có
$$3A = 3 \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2022}} \right) = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2021}}$$

$$3A - A = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2021}} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2022}} \right)$$

$$3A - A = 1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2021}} \right) - \frac{2022}{3^{2022}}$$

Đặt
$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2021}}$$

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2020}}$$

$$3B - B = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2020}} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2021}} \right)$$

$$2B = 1 - \frac{1}{3^{2021}} \Rightarrow B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2021}} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2A < 1 + \frac{1}{2} - \frac{2022}{3^{2022}} \Rightarrow A < \frac{3}{4} - \frac{1011}{3^{2022}} \Rightarrow A < \frac{3}{4}$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Chí Linh 2022 - 2023)

$$S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}} < \frac{1}{2}$$

Chứng minh

Lời giải

$$S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}}$$

Nên ta có
$$4S = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{2023}{4^{2022}}$$

$$4S - S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}} - \frac{2023}{4^{2023}}$$

$$3S < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}}$$

$$A = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}}$$

Đặt

$$4A = 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{2021}}$$

$$4A - A = 4 - \frac{1}{4^{2022}} \Rightarrow 3A < 4 \Rightarrow A < \frac{4}{3}$$

$$S < \frac{4}{9} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Suy ra

$$S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}} < \frac{1}{2}$$

Vậy

Câu 7. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$$

Cho biểu thức: với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 2$. Chứng minh rằng S không phải là số tự nhiên.

Lời giải

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2} \quad \text{với } n \in \mathbb{N} \text{ và } n > 2$$

$$S = \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \frac{4^2 - 1}{4^2} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$$

Ta có:

$$S = 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + 1 - \frac{1}{4^2} + 1 - \frac{1}{5^2} + \dots + 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$S = (1 + 1 + 1 + \dots + 1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$S = (n - 1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow S < (n - 1)$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n - 1)n}$$

Lại có

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n - 1} - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$$

$$\Rightarrow S > (n - 1) - 1 \Rightarrow S > n - 2 \Rightarrow n - 2 < S < n - 1$$

mà $n - 2$; $n - 1$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên S không phải là số tự nhiên.

Câu 8. (HSG 7 trường Trần Đức Thông - Hưng Hà, huyện Mường Lát 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$. Chứng minh: $A < \frac{3}{16}$.

Lời giải

Ta có: $A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$

$$3A = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

$$3A + A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$4A = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} \right) - \frac{100}{3^{100}} \quad (1)$$

Đặt $B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}}$

$$3B = 3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}}$$

$$3B + B = 3 - \frac{1}{3^{99}}$$

$$4B = 3 - \frac{1}{3^{99}} < 3 \Rightarrow B < \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$4A < \frac{3}{4} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$A < \frac{3}{16}$$

Do đó

Câu 9. (HSG 7 huyện Quảng Xương 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2023}} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$

Lời giải

Ta có $VT = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2023}} \quad (1)$

$$3.VT = 3 \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{2023}} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2022}} \quad (2)$$

$$2.VT = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{2023}} \right) < \frac{1}{3} \Rightarrow VT < \frac{1}{6} \quad (3)$$

Lấy (2) trừ (1) theo vế với vế ta được :

$$VP = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$$

$$\text{Ta thấy } \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{100.101}$$

$$VP > \frac{1}{5} - \frac{1}{101} = \frac{96}{505} > \frac{96}{576} = \frac{1}{6} \quad (4)$$

Nên

Từ (3) và (4) suy ra: $VP > VT$.

Câu 10. (HSG 7 trường Tri Thức tỉnh Đồng Nai 2022 - 2023)

Chứng minh: $\frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{8}$

Lời giải

Ta có:
$$\frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{100^2} = \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right)$$

$$< \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{49.50} \right) = \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{50} \right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{200} < \frac{1}{8}$$

(đpcm)

Câu 11. (HSG 7 huyện Quan Hóa 2021 - 2022; huyện Tiên Du - Bắc Ninh, trường Lê Quý Đôn - Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{1}{50}$.

Lời giải

Ta có
$$A = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}}$$

$$7.A = 1 + \frac{2}{7^1} + \frac{3}{7^2} + \frac{4}{7^3} + \dots + \frac{99}{7^{98}} + \frac{100}{7^{99}}$$

$$\Rightarrow 7A - A = \left(1 + \frac{2}{7^1} + \frac{3}{7^2} + \frac{4}{7^3} + \dots + \frac{99}{7^{98}} + \frac{100}{7^{99}} \right) - \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}} \right)$$

$$\Rightarrow 6A = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{99}} - \frac{100}{7^{100}}$$

Đặt
$$B = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{99}}$$

$$\Rightarrow 7B = 7 + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{98}}$$

$$\Rightarrow 7B - B = \left(7 + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{98}} \right) - \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{99}} \right)$$

$$6B = 7 - \frac{1}{7^{99}} < 7 \Rightarrow B < \frac{7}{6}$$

$$6A = B - \frac{100}{7^{100}} < B \Rightarrow 6A < \frac{7}{6} \Rightarrow A < \frac{7}{36}$$

Lại có:

$$A < \frac{7}{36}$$

Vậy

Câu 12. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$

Lời giải

$$A = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{n.n} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

Ta có:

Câu 13. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $D = \left(\frac{1}{2^2} - 1\right)\left(\frac{1}{3^2} - 1\right)\left(\frac{1}{4^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1\right)$. So sánh D với $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Vì D là tích của 99 số âm nên:

$$\begin{aligned} -D &= \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100^2}\right) \\ -D &= \frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \dots \frac{9999}{100^2} = \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \dots \frac{99.101}{100^2} \\ -D &= \frac{1.2.3.4.5 \dots 98.99}{2.3.4.5 \dots 99.100} \cdot \frac{3.4.5 \dots 100.101}{2.3.4 \dots 99.100} \\ D &= \frac{1}{100} \cdot \frac{101}{2} = \frac{101}{200} > \frac{100}{200} \Rightarrow D > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$D < -\frac{1}{2}$$

Vậy

Câu 14. (HSG 7 trường Lý Nam Đế - Hưng Hà 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $A = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2007^2} < \frac{1003}{2008}$

Lời giải

Tổng A không có thừa số chung, do vậy ta đánh giá từng số hạng

$$\frac{2}{3^2} = \frac{2}{9} < \frac{2}{8} = \frac{2}{2.4}$$

$$\frac{2}{5^2} = \frac{2}{25} < \frac{2}{24} = \frac{2}{4.6}$$

$$\frac{2}{7^2} = \frac{2}{49} < \frac{2}{48} = \frac{2}{6.8}$$

.....

$$\frac{2}{2007^2} < \frac{2}{2006.2008}$$

$$A < \frac{2}{2.4} + \frac{2}{4.6} + \frac{2}{6.8} + \dots + \frac{2}{2006.2008} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2008} = \frac{1003}{2008}$$

Câu 15. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $S_1 = 1 + \frac{1}{5}; S_2 = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2}; \dots; S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n} (n \in \mathbb{N}^*)$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{5^2S_2^2} + \frac{1}{5^3S_3^2} + \dots + \frac{1}{5^nS_n^2} < \frac{1}{4}$$

Lời giải

Ta có $S_n > S_{n-1} > \dots > S_2 > S_1 > 1$
 $\Rightarrow S_n^2 > S_{n-1}^2 > \dots > S_2^2 > S_1^2 > 1$
 $\Rightarrow \frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{5^2S_2^2} + \frac{1}{5^3S_3^2} + \dots + \frac{1}{5^nS_n^2} < \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}$

Đặt $A = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}$
 $\Rightarrow 5A = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{n-1}}$
 $\Rightarrow 4A = 1 - \frac{1}{5^n} < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{4}$

Vậy $A < \frac{1}{4}$

Câu 16. (HSG 7 trường Lưu Khánh Đàm - Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $S_n = \frac{1^2 - 1}{1} + \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$ (với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$). Chứng minh rằng S_n không là số nguyên.

Lời giải

Có $S_n = 1 - \frac{1}{1^2} + 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + \dots + 1 - \frac{1}{n^2} = (n - 1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$

Đặt $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

Do $A > 0$ nên $S_n < n - 1$

Mặt khác $A < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n - 1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n}$

$\Rightarrow S_n > (n - 1) - \left(1 - \frac{1}{n} \right) = n - 2 + \frac{1}{n} > n - 2$ (do $\frac{1}{n} > 0$)

$\Rightarrow n - 2 < S_n < n - 1$ nên S_n không là số nguyên.

Câu 17. (HSG 7 trường Dân Chủ - Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n - 1}{(n - 1)^2 \cdot n^2}$ (với n là số tự nhiên lớn hơn 1).

Chứng minh rằng: $B < 1$.

Lời giải

$$B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} &= \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{n^2 - (n-1)^2}{(n-1)^2 \cdot n^2} \\ &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \\ &= 1 - \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Vì n là số tự nhiên lớn hơn 1 nên $\frac{1}{n^2} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n^2} < 1$.

Vậy $B < 1$.

Câu 18. (HSG 7 trường Trần Đức Thông - Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{2001}{2000^2 + 1} + \frac{2001}{2000^2 + 2} + \dots + \frac{2001}{2000^2 + 2000}$. Chứng minh rằng: $1 < A^2 < 4$.

Lời giải

Tổng A có tất cả 2000 số hạng.

Ta có: $\frac{2001}{2000^2 + 1} > \frac{2001}{2000^2 + 2} > \frac{2001}{2000^2 + 3} > \dots > \frac{2001}{2000^2 + 2000}$

$$\Rightarrow A > \frac{2001}{2000^2 + 2000} \cdot 2000 = \frac{2001 \cdot 2000}{2000(2000 + 1)} = 1 \quad (1)$$

Mặt khác: $A < \frac{2001}{2000^2 + 1} \cdot 2000 = \frac{2001 \cdot 2000}{2000^2 + 1} = \frac{(2000 + 1) \cdot 2000}{2000^2 + 1} = \frac{2000^2 + 2000}{2000^2 + 1}$

$$= \frac{(2000 + 1) \cdot 2000}{2000^2 + 1} = \frac{(2000^2 + 1) + 1999}{2000^2 + 1} = 1 + \frac{1999}{2000^2 + 1} < 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $1 < A < 2 \Rightarrow 1 < A^2 < 4$.

Vậy $1 < A^2 < 4$.

Câu 19. (HSG 7 trường Kim Trung - Hưng Hà 2022 - 2023)

Chứng minh tổng: $A = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{2019^2} + \frac{1}{2020^2}$ không phải là một số nguyên.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{1 \cdot 2} > \frac{1}{2 \cdot 2} ; \frac{1}{2 \cdot 3} > \frac{1}{3 \cdot 3} ; \frac{1}{3 \cdot 4} > \frac{1}{4 \cdot 4} ; \dots ; \frac{1}{2018 \cdot 2019} > \frac{1}{2019 \cdot 2019} ; \frac{1}{2019 \cdot 2020} > \frac{1}{2020 \cdot 2020}$.

Do đó ta có:

$$1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2018.2019} + \frac{1}{2019.2020} > 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{2019^2} + \frac{1}{2020^2}$$

$$\Rightarrow A < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}$$

$$\Rightarrow A < 1 + 1 - \frac{1}{2020} = 1 + \frac{2019}{2020}$$

$$\text{Vì } 0 < \frac{2019}{2020} < 1 \quad \text{nên} \quad 1 < 1 + \frac{2019}{2020} < 2$$

Suy ra: $1 < A < 2$.

Vậy A không phải là một số nguyên.

Câu 20. (HSG 7 huyện Lục Nam 2018 - 2019; trường Điện Nông 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2020^3} < \frac{1}{40}$

Lời giải

Đặt $A = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2020^3}$

Ta có: $\frac{1}{5.5.5} < \frac{1}{4.5.6}$; $\frac{1}{6.6.6} < \frac{1}{5.6.7}$; $\frac{1}{7.7.7} < \frac{1}{6.7.8}$; ...; $\frac{1}{2020.2020.2020} < \frac{1}{2019.2020.2021}$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{5.5.5} + \frac{1}{6.6.6} + \frac{1}{7.7.7} + \dots + \frac{1}{2020.2020.2020}$$

$$< \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2019.2020.2021}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \frac{1}{5.6} - \frac{1}{6.7} + \frac{1}{6.7} - \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{2019.2020} - \frac{1}{2020.2021} \right)$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{2020.2021} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{2020.2021} \right)$$

Vì $\frac{1}{2020.2021} > 0$ nên $\frac{1}{20} - \frac{1}{2020.2021} < \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{2020.2021} \right) < \frac{1}{40}$

Hay $A < \frac{1}{40}$

Vậy $\frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2020^3} < \frac{1}{40}$

Câu 21. (HSG 7 huyện Hưng Hà - Thái Bình 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2}$. Chứng minh $\frac{2}{5} < A < \frac{8}{9}$.

Lời giải

Ta có $A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{8.9}$

$$\Rightarrow A < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{8} - \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow A < 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow A < \frac{8}{9} \quad (1)$$

Ta có
$$A > \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{9.10}$$

$$\Rightarrow A > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow A > \frac{4}{10} \Rightarrow A > \frac{2}{5} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{2}{5} < A < \frac{8}{9}$ (đpcm).

Câu 22. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ 2021 - 2022)

Cho $A = 1 - \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2022}$. Chứng tỏ rằng A không phải là số nguyên.

Lời giải

Ta có:
$$A + \frac{2}{3}A = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} \Rightarrow A = \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023}\right] \cdot \frac{3}{5}$$

Vì $\left(\frac{2}{3}\right)^{2023} > 0 \Rightarrow 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} > 0$ mà $\frac{3}{5} > 0$ nên $A > 0$ (1)

Lại có:
$$0 < \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} < \frac{2}{3} \Rightarrow 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} < 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow A = \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023}\right] \cdot \frac{3}{5} < \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $0 < A < 1$ nên A không là số nguyên (đpcm).

Câu 23. (HSG 7 huyện Lục Ngạn–Bắc Giang 2021 - 2022)

Cho
$$C = \frac{2020}{2019^2 + 1} + \frac{2020}{2019^2 + 2} + \frac{2020}{2019^2 + 3} + \dots + \frac{2020}{2019^2 + 2019}$$
.

Chứng minh rằng giá trị của biểu thức C không phải là số nguyên.

Lời giải

Ta có:
$$\frac{2020}{2019^2 + 1} < \frac{2020}{2019^2}$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 2} < \frac{2020}{2019^2}$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 3} < \frac{2020}{2019^2}$$

$$\dots$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 2019} < \frac{2020}{2019^2}.$$

Từ đó suy ra $C < \frac{2020}{2019^2} + \frac{2020}{2019^2} + \frac{2020}{2019^2} + \dots + \frac{2020}{2019^2} = \frac{2020}{2019^2} \cdot 2019 = \frac{2020}{2019} < 2$

$$\Rightarrow C < 2 \quad (1)$$

Ta có: $\frac{2020}{2019^2 + 1} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$

$$\frac{2020}{2019^2 + 2} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 3} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$$

...

$$\frac{2020}{2019^2 + 2018} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 2019} = \frac{2020}{2019^2 + 2019}$$

Từ đó suy ra $C > \frac{2020}{2019^2 + 2019} + \frac{2020}{2019^2 + 2019} + \frac{2020}{2019^2 + 2019} + \dots + \frac{2020}{2019^2 + 2019}$

$$= \frac{2020}{2019^2 + 2019} \cdot 2019 = \frac{2020 \cdot 2019}{2019(2019 + 1)} = 1 \Rightarrow C > 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $1 < C < 2$ nên C không là số nguyên.

Câu 24. (HSG 7 trường Bảo Phương, trường Thanh Thùy 2018 - 2019)

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}} < \frac{1}{2}$$

Chứng minh rằng:

Lời giải

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}}$$

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}}$$

$$3B - B = 1 - \frac{1}{3^{2013}} \Rightarrow 2B = 1 - \frac{1}{3^{2013}} \Rightarrow B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2013}} < \frac{1}{2}$$

$$B < \frac{1}{2}$$

Vậy

Câu 25. (HSG 7 trường Bích Hòa 2013 - 2014; trường Hồng Dương 2017 - 2018; huyện Thanh Oai, trường Điện Hồng 2018 - 2019)

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$$

Chứng minh:

Lời giải

Đặt $A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$, ta có:

$$A < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{4} - \frac{1}{100} < \frac{1}{4}$$

$$A > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101} = \frac{1}{5} - \frac{1}{101} > \frac{1}{6}$$

Câu 26. (HSG 7 huyện Thường Tín - Hà Nội 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $B = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2^2}$

Lời giải

Ta có: $2^3 > 1.2.3 \Rightarrow \frac{1}{2^3} < \frac{1}{1.2.3}$

Tương tự: $\frac{1}{3^3} < \frac{1}{2.3.4}; \dots; \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2017.2018.2019}$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{2017.2018.2019} = \frac{1}{2} \left(\frac{3-1}{1.2.3} + \frac{4-2}{2.3.4} + \dots + \frac{2019-2017}{2017.2018.2019} \right)$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2017.2018} - \frac{1}{2018.2019} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2018.2019} \right)$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2018.2019.2} < \frac{1}{2^2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2^2}$$

Câu 27. (HSG 7 trường Trần Hưng Đạo 2017 - 2018; trường Vạn Long 2018 - 2019)

Biết $x \in \mathbb{Q}$ và $0 < x < 1$. Chứng minh $x^n < x$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Lời giải

$$x^n - x = x(x^{n-1} - 1)$$

Xét

$$0 < x < 1 \Rightarrow x^{n-1} - 1 < 0; x > 0 \Rightarrow x^n - x < 0$$

Suy ra điều phải chứng minh

Câu 28. (HSG 7 trường Hương Điền - Nam Hương 2017 - 2018)

Chứng minh: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

.....

$$\frac{1}{2005^2} < \frac{1}{2004 \cdot 2005} = \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1 - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1$$

Câu 29. (HSG 7 huyện Đông Sơn - Thanh Hoá, trường Nguyễn Chích 2017 - 2018)

Cho $B = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \frac{24}{25} + \dots + \frac{2499}{2500}$. Chứng tỏ B không phải là số nguyên.

Lời giải

Ta có:

$$B = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \frac{24}{25} + \dots + \frac{2499}{2500}$$

$$B = 49 - \left(1 - \frac{3}{4} + 1 - \frac{8}{9} + 1 - \frac{15}{16} + 1 - \frac{24}{25} + \dots + 1 - \frac{2499}{2500} \right)$$

$$B = 49 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right) = 49 - M$$

Trong đó

$$M = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right)$$

Áp dụng tính chất

$$\frac{1}{(n+1)n} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$$

Ta có:

$$\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right) < \left(\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{50 \cdot 49} \right)$$

$$M < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} = 1 - \frac{1}{50} < 1$$

Lại có:

$$M > \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{50 \cdot 51} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{50} - \frac{1}{51}$$

$$M > \frac{1}{2} - \frac{1}{51} = \frac{49}{101} > 0$$

Từ đó suy ra $0 < M < 1 \Rightarrow B = 49 - M$, không phải là một số nguyên.

Câu 30. (HSG 7 huyện Anh Sơn, trường THCS Tào Sơn 2017 - 2018)

Chứng minh rằng:

$$A = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$$

Lời giải

Ta có:

$$A = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2}$$

$$= \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{10^2 - 9^2}{9^2 \cdot 10^2}$$

$$= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} = 1 - \frac{1}{10^2} < 1$$

Câu 31. (HSG 7 huyện Trục Ninh 2022 - 2023)

Cho $A = 4^{27} + 4^{1000} + 4^x$. Tìm số tự nhiên x lớn nhất sao cho A là số chính phương.

Lời giải

Giả sử tồn tại số tự nhiên x để A là số chính phương.

* Xét $x \geq 27$:

Ta có: $A = 4^{27} + 4^{1000} + 4^x = 4^{27} (1 + 4^{973} + 4^{x-27})$

$$= (2^2)^{27} \left[(2^{x-27})^2 + 2 \cdot 2^{x-27} \cdot 1 + 1 + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \right]$$

$$= (2^2)^{27} \left[(2^{x-27})^2 + 2^{x-27} + 2^{x-27} + 1 + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \right]$$

$$= (2^2)^{27} \left[2^{x-27} (2^{x-27} + 1) + (2^{x-27} + 1) + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \right]$$

$$= (2^{27})^2 \left[(2^{x-27} + 1)^2 + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \right]$$

Ta có: $(2^{27})^2$ là số chính phương.

Với $x \geq 27$ và $x \in \mathbb{N}$ thì $1 + 4^{973} + 4^{x-27} \in \mathbb{N}$ nên để A là một số chính phương thì

$B = (2^{x-27} + 1)^2 + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27}$ cũng là một số chính phương

$$\Rightarrow B \geq 0 \text{ mà } (2^{x-27} + 1)^2 \geq 0 \text{ nên } 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \geq 0$$

$$\Rightarrow 2^{1946} - 2^{x-26} \geq 0$$

$$\Rightarrow x - 26 \leq 1946 \Rightarrow x \leq 1972$$

Kết hợp với điều kiện ta có: $27 \leq x \leq 1972$

Vì x là số tự nhiên lớn nhất nên $x = 1972$.

Thay $x = 1972$ vào A ta được $A = \left[2^{27} \cdot (2^{1945} + 1) \right]^2$ là số chính phương (1)

* Xét $0 \leq x < 27$:

Giả sử tồn tại x thỏa mãn $0 \leq x < 27$ để A là số chính phương

$$A = 4^{27} + 4^{1000} + 4^x = 4^x (4^{27-x} + 4^{1000-x} + 1)$$

$$= (2^2)^x \left[(2^{27-x})^2 + 2 \cdot 2^{27-x} \cdot 1 + 1 + (2^2)^{1000-x} - 2 \cdot 2^{27-x} \right]$$

$$= (2^x)^2 \left[(2^{27-x})^2 + 2^{27-x} + 2^{27-x} + 1 + 2^{2000-2x} - 2^{28-x} \right]$$

$$= (2^x)^2 \left[(2^{27-x} + 1)^2 + (2^{2000-2x} - 2^{28-x}) \right]$$

Ta có: $(2^x)^2$ là số chính phương.

Với $0 \leq x < 27$ và $x \in \mathbb{N}$ thì $4^{27-x} + 4^{1000-x} + 1 \in \mathbb{N}$

Nên để A là một số chính phương thì $C = (2^{27-x} + 1)^2 + 2^{2000-2x} - 2^{28-x}$ cũng là một số chính

phương $\Rightarrow C \geq 0$ mà $(2^{27-x} + 1)^2 \geq 0$

nên $\Rightarrow 2^{2000-2x} - 2^{28-x} \geq 0 \Rightarrow 2000 - 2x \geq 28 - x \Rightarrow x \leq 1972$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x = 1972$ là số lớn nhất để A là số chính phương.

Câu 32. (HSG 7 TP Thanh Hóa 2022 - 2023)

Gọi $a; b$ là hai giá trị tương ứng của $x; y$ để biểu thức $A = x^2 + 4x + y^2 - 4y + 100$ đạt giá trị nhỏ nhất. Chứng minh rằng: $(a+b)^{2023} = a^{2023} + b^{2023}$

Lời giải

Ta có: $A = x^2 + 4x + y^2 - 4y + 100$

$$= (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) + 92$$

$$= (x+2)^2 + (y-2)^2 + 92$$

Vì $(x+2)^2 \geq 0; (y-2)^2 \geq 0 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-2)^2 + 92 \geq 92, \forall x, y$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x+2=0$ và $y-2=0 \Rightarrow x=-2$ và $y=2$

A đạt giá trị nhỏ nhất bằng 92 khi $x=-2; y=2$ suy ra $a=-2; b=2$

+) Thay $a=-2; b=2$ vào vế trái của $(a+b)^{2023} = a^{2023} + b^{2023}$

$$(-2+2)^{2023} = 0^{2023} = 0 \quad (1)$$

Ta được:

+) Thay $a=-2; b=2$ vào vế phải của $(a+b)^{2023} = a^{2023} + b^{2023}$

$$(-2)^{2023} + 2^{2023} = -2^{2023} + 2^{2023} = 0 \quad (2)$$

Ta được:

Dạng 2.3 Bất đẳng thức về chứng minh tích của một dãy

Câu 1. (HSG 7 huyện Hưng Hà–Thái Bình 2022 - 2023)

Cho $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{99}{100}$. Chứng minh rằng $P < \frac{1}{10}$

Lời giải

Ta có: $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Cho n các giá trị từ 1 đến 99 ta có:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}; \frac{3}{4} < \frac{5}{6}; \frac{5}{6} < \frac{6}{7}; \dots; \frac{99}{100} < \frac{100}{101}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots \frac{100}{101}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots \frac{100}{101} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100} \right)^2 < \frac{1}{101}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Quan Sơn 2022 - 2023)

Chứng minh rằng $\frac{1}{4048} < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 < \frac{1}{2025}$.

Lời giải

$$\frac{1}{4048} < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 < \frac{1}{2025}$$

Với mọi $n \geq 1$ ta có: $\frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} < \frac{n^2}{n^2 + 2n} = \frac{n}{n+2}$

Từ đó suy ra: $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 < \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \dots \frac{2021}{2023} \cdot \frac{2013}{2025} = \frac{1}{2025}$

Với mọi $n \geq 2$ ta có: $\frac{n^2}{(n+1)^2} > \frac{n^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{(n+1)^2} = \frac{n-1}{n+1}$

Từ đó suy ra: $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 > \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{6} \dots \frac{2020}{2022} \cdot \frac{2022}{2024} = \frac{1}{4048}$

Dạng 3. Bất đẳng thức dạng chữ

Câu 1. (HSG 7 huyện Phú Lý 2016 - 2017; huyện Dương Nam 2017 - 2018; quận Hà Đông 2022 - 2023)

Cho $a > 2, b > 2$. Chứng minh $ab > a + b$.

Lời giải

Từ $a > 2 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{2}; b > 2 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$

Suy ra: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a+b}{ab} < 1$

Vậy $ab > a + b$.

Câu 2. (HSG 7 Cẩm Thủy - Nam Định 2021 - 2022; Hậu Lộc 2022 - 2023)

Cho ba số a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$

Lời giải

Sử dụng tính chất: $0 < a < 1 \Rightarrow a < \sqrt{a}$.

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có: $0 < \frac{a}{b+c} < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{b+c}$

Mà $\frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c}$ (do a, b, c dương) nên: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{a+b+c}$ (1)

Chứng minh tương tự ta được: $\sqrt{\frac{b}{c+a}} > \frac{b}{a+b+c}$ (2) và $\sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{c}{a+b+c}$ (3)

Cộng về ba bất đẳng thức (1); (2); (3) ta được:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 3. (HSG 7 huyện Tân Ước 2013 - 2014; trường Phú Nhuận 2014 - 2015; huyện Thái Thụy 2015 - 2016; huyện Hương Khê 2016 - 2017; huyện Yên Lập, huyện Hương Sơn 2017 - 2018; huyện Phú Lí - Hà Nam, trường Hoàng Quyên, trường Lý Tự Trọng, huyện Lộc Hà 2018 - 2019; huyện Triệu Sơn - Thanh Hóa, huyện Thanh Sơn - Phú Thọ 2021 - 2022; huyện Hưng Hà, huyện Cẩm Thủy, huyện Thanh Sơn, thị Xã Bỉm Sơn, trường Kinh Môn, huyện Sơn Động 2022 - 2023)

Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn: $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Lời giải

Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$, nên $(a-1)(b-1) \geq 0$ suy ra $ab+1 \geq a+b$

$$\frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \quad \text{nên} \quad \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b} \quad (1)$$

Do đó

$$\frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c} \quad (2) ; \quad \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c} \quad (3)$$

Tương tự:

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \quad (4)$$

Do đó:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (5)$$

Mà

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2 \quad (\text{đpcm})$$

Từ (4) và (5) suy ra

Câu 4. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2015 - 2016; huyện Mỹ Cày 2017 - 2018; huyện Kinh Môn 2018 - 2019; huyện Đông Hưng 2022 - 2023)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 \leq 2(ab+bc+ca)$$

Lời giải

Ta có: $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$

Tương tự ta có $b^2 + c^2 \geq 2bc$; $c^2 + a^2 \geq 2ac$. Suy ra:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + ac + bc) \quad \text{hay} \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác, ta có:

$$a+b > c \Rightarrow ac + bc > c^2$$

$$a+c > b \Rightarrow ab + bc > b^2$$

$$b+c > a \Rightarrow ab + ac > a^2$$

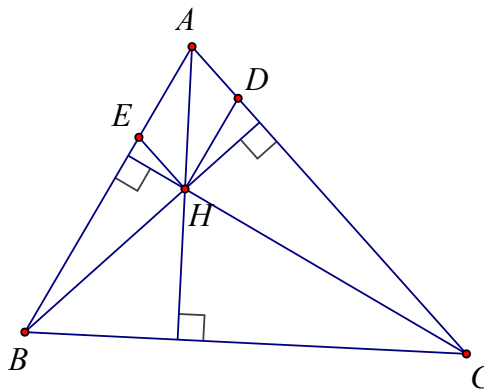
$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 \leq 2(ab+bc+ca)$

Câu 5. (HSG 7 huyện Yên Định - Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho tam giác nhọn ABC , trực tâm H . Chứng minh: $HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$

Lời giải



Qua H kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB tại E và AC tại $D \Rightarrow CH \perp HD$

Qua H kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB tại E và BC tại $F \Rightarrow BH \perp HE$

$$\Delta AHD = \Delta HAE \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AD = HE, AE = HD$$

Ta có

Trong $\triangle AHD$ có $HA < HD + AD$ nên $HA < AE + AD$. (1)

Từ $BH \perp HE \Rightarrow \triangle HBE$ vuông cân nên $HB < BE$. (2)

Tương tự, ta có: $HC < DC$. (3)

Từ (1), (2), (3) ta có: $HA + HB + HC < AB + AC$. (4)

Tương tự: $HA + HB + HC < AB + BC$ (5)

và $HA + HB + HC < AB + BC$. (6)

Từ (4), (5), (6) suy ra: $HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$

Câu 6. (HSG 7 huyện Yên Định - Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho x, y, z là 3 số thực tùy ý thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$.

Chứng minh rằng đa thức $x^2 + y^4 + z^6$ có giá trị không lớn hơn 2.

Lời giải

Trong ba số x, y, z có ít nhất hai số cùng dấu. Giả sử $x, y \geq 0 \Rightarrow z = -x - y \leq 0$.

Vì $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$ nên: $x^2 + y^4 + z^6 \leq |x| + |y| + |z|$

$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq x + y - z \Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq -2z$

Vì $-1 \leq z \leq 1$ và $z \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$

Vậy $x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$

Câu 7. (HSG 7 Quảng Ninh 2022 - 2023)

Giả sử x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2, chứng minh:

$$S = \frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} < 2$$

Lời giải

Vì x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác và có chu vi bằng 2. Không giảm tính tổng

quát ta suy ra: $0 < x \leq y \leq z < 1$

Suy ra: $x - 1 < 0; y - 1 < 0 \Rightarrow (x - 1)(y - 1) < 0 \Rightarrow xy + 1 > x + y$

$\Rightarrow \frac{1}{xy+1} < \frac{1}{x+y} \Rightarrow \frac{z}{xy+1} < \frac{z}{x+y}$ (1)

Chứng minh tương tự: $\frac{x}{yz+1} < \frac{x}{y+z}$ (2); $\frac{y}{xz+1} < \frac{y}{x+z}$ (3).

Cộng vế với vế (1), (2), (3) ta được: $\frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} < \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}$ (4)

$$\frac{x}{y+z} < \frac{x+x}{x+y+z} \Rightarrow \frac{x}{y+z} < \frac{2x}{x+y+z}$$

Mà

$$\frac{y}{x+z} < \frac{2y}{x+y+z}, \quad \frac{z}{x+y} < \frac{2z}{x+y+z}$$

Tương tự:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} < \frac{2x}{x+y+z} + \frac{2y}{x+y+z} + \frac{2z}{x+y+z}$$

Suy ra:

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} < \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} \Rightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} < 2 \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta được: $S = \frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} < 2$. Đpcm.

Câu 8. (HSG 7 TP Bắc Ninh 2022 - 2023)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của c .

Lời giải

Vì $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ nên $0 \leq a+b+1+c+2 \leq c+2+c+2+c+2$
 $\Rightarrow 0 \leq 4 \leq 3c+6$ (vì $a+b+c=1$)

Hay $3c \geq -2 \Rightarrow c \geq \frac{-2}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của c là $\frac{-2}{3}$ khi đó $a+b = \frac{5}{3}$.

Câu 9. (HSG 7 thị xã Hoàng Mai 2022 - 2023)

Cho a, b, c là các số thỏa mãn: $a+b+c=0$. Chứng minh: $2022ab + 2023bc + 4045ca \leq 0$.

Lời giải

Từ $a+b+c=0 \Rightarrow b+c=-a; a+b=-c$. Do đó

$$\begin{aligned} 2022ab + 2023bc + 4045ca &= 2022ab + 2022ca + 2023bc + 2023ca \\ &= 2022a(b+c) + 2023c(b+a) \\ &= 2022a(-a) + 2023c(-c) \\ &= -2022a^2 - 2023c^2 = -(2022a^2 + 2023c^2) \leq 0 \end{aligned}$$

Vậy $2022ab + 2023bc + 4045ca \leq 0$ nếu $a+b+c=0$.

Câu 10. (HSG 7 huyện Anh Sơn, 2015 - 2016; trường Lê Quý Đôn Hà Đông 2022 - 2023)

Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh: $2(ab+bc+ca) > a^2 + b^2 + c^2$

Lời giải

Trong tam giác, tổng độ dài hai cạnh lớn hơn cạnh còn lại nên ta có:

$$b+c > a \Rightarrow a(b+c) > a^2 \Rightarrow ab+ac > a^2$$

Tương tự ta có : $bc + ba > b^2$ và $ac + cb > c^2$

Cộng theo vế ta được : $2(ab + bc + ca) > a^2 + b^2 + c^2$

Vậy a, b, c là ba cạnh của một tam giác thì $2(ab + bc + ca) > a^2 + b^2 + c^2$

Câu 11. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh: $M = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b}$ có giá trị không nguyên.

Lời giải

Với $a, b, c, d > 0$, ta có: $\frac{a+b}{a+b+c} > \frac{a+b}{a+b+c+d}$

$$\frac{b+c}{b+c+d} > \frac{b+c}{a+b+c+d}$$

$$\frac{c+d}{c+d+a} > \frac{c+d}{a+b+c+d}$$

$$\frac{d+a}{a+b+d} > \frac{d+a}{a+b+c+d}$$

Cộng theo vế ta được: $\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} > \frac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 2(*)$

Với $a, b, c, d > 0$, ta có: $\frac{a+b+c}{a+b+c} = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = \frac{a+b+d}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d}$$

Mà $\frac{c}{a+b+c} > \frac{c}{a+b+c+d}$ (với $a, b, c, d > 0$) nên suy ra: $\frac{a+b}{a+b+c} < \frac{a+b+d}{a+b+c+d}$ (1)

Chứng minh tương tự, ta được: $\frac{b+c}{b+c+d} < \frac{a+b+c}{a+b+c+d}$ (2)

$$\frac{c+d}{c+d+a} < \frac{c+d+b}{a+b+c+d}$$
 (3)

$$\frac{d+a}{a+b+d} < \frac{d+a+c}{a+b+c+d}$$
 (4)

Từ (1), (2), (3), (4) cộng theo vế ta được:

$$\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < \frac{3(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 3(**)$$

Từ (*) và (**): $2 < M = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < 3$

Vậy với $a, b, c, d > 0$, M có giá trị không nguyên (đpcm)

Câu 12. (HSG 7 trường Dân Chủ - Hưng Hà 2022 - 2023)

$$1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

Lời giải

Ta có: a, b, c là các số thực dương

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b}; \quad \frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c}; \quad \frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a} \\ \Rightarrow \frac{a+b+c}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \Rightarrow 1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có: a, b, c là các số thực dương

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}; \quad \frac{b+a}{a+b+c} < \frac{b}{b+c}; \quad \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c} \\ \Rightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} \Rightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2 \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

Câu 13. (HSG 7 trường Bùi Hữu Diên - Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho 3 số a, b, c là các số nguyên dương sao cho mỗi số nhỏ hơn tổng hai số kia. Chứng

minh $1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

Lời giải

Theo bài ta có $b+c < a+b+c \Rightarrow \frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c} \quad (1)$

Lại có $a < b+c \Rightarrow a+b+c < b+c+b+c \Rightarrow \frac{1}{a+b+c} > \frac{1}{2(b+c)} \Rightarrow \frac{2a}{a+b+c} > \frac{a}{b+c} \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c} \quad (3)$

Tương tự có $\frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{a+c} < \frac{2b}{a+b+c} \quad (4)$

$\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c} \quad (5)$

Từ (3) (4) (5) $\Rightarrow 1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2$ (đpcm).

Câu 14. (HSG 7 trường Văn Lang - Hưng Hà 2022 - 2023)

Với a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

Lời giải

Ta có $(a-b)^2 \geq 0$ với mọi $a, b \Rightarrow (a-b)(a-b) \geq 0 \Rightarrow a^2 - ab - ab + b^2 \geq 0$
 $\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$ (1)

Vì a, b là các số nguyên dương nên $ab > 0$ do đó chia cả 2 vế của (1) cho ab , ta được:

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Tương tự $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$; $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$.

Ta có:

$$\begin{aligned} (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) &= a \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + b \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + c \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ &= 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 \\ &= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) \end{aligned}$$

Mà $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$; $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$; $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$

Do đó $3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) \geq 9$
 $\Rightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$ (đpcm).

Câu 15. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2016 - 2017; huyện Thanh Miện - Hải Dương 2021 - 2022)

Cho 20 số nguyên khác 0 : $a_1; a_2; a_3 \dots a_{20}$ có các tính chất sau:

- + a_1 là số dương.
- + Tổng của ba số viết liền nhau bất kì là một số dương.
- + Tổng của 20 số đó là số âm.

Chứng minh rằng: $a_1 \cdot a_{14} + a_{14} \cdot a_{12} < a_1 \cdot a_{12}$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} a_1 + (a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7) + (a_8 + a_9 + a_{10}) + (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + a_{14} \\ + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0 \end{aligned}$$

Ta có: $a_1 > 0$; $a_2 + a_3 + a_4 > 0$; $a_5 + a_6 + a_7 > 0$; $a_8 + a_9 + a_{10} > 0$; $a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0$;

$a_{15} + a_{16} + a_{17} > 0$; $a_{18} + a_{19} + a_{20} > 0$

$\Rightarrow a_{14} < 0$

Tương tự: $(a_1 + a_2 + a_3) + \dots + (a_{10} + a_{11} + a_{12}) + (a_{13} + a_{14}) + (a_{15} + a_{16} + a_{17}) + (a_{18} + a_{19} + a_{20}) < 0$

$$\Rightarrow a_{13} + a_{14} < 0$$

Mặt khác: $a_{12} + a_{13} + a_{14} > 0 \Rightarrow a_{12} > 0$

Từ các điều kiện: $a_1 > 0$; $a_{12} > 0$; $a_{14} < 0 \Rightarrow a_1 \cdot a_{14} + a_{14} \cdot a_{12} < a_1 \cdot a_{12}$ (đpcm).

Câu 16. (HSG 7 huyện Phù Yên - Sơn La, trường Võ Thị Sáu 2017 - 2018; huyện Tiên Phước 2018 - 2019; huyện Yên Mỹ - Hưng Yên, trường Lê Hồng Phong 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: Nếu $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ thì $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$

Lời giải

Ta có: $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ nên suy ra:

$$a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3 \quad (1)$$

$$a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6 \quad (2)$$

$$a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9 \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được: $a_1 + a_2 + \dots + a_9 < 3(a_3 + a_6 + a_9)$

Vì $a_1 + a_2 + \dots + a_9 > 0$ nên ta được: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$

Câu 17. (HSG 7 huyện Sơn Trà - Đà Nẵng 2018 - 2019)

Tim x, y biết $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0$

Lời giải

Vì $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0$ với mọi x ; $|3y + 12| \geq 0$ với mọi y , do đó:

$$\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \geq 0 \quad \text{với mọi } x, y. \text{ Theo đề bài thì:}$$

$$\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0 \quad \left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| = 0$$

. Từ đó suy ra .

Khi đó $2x - \frac{1}{6} = 0$ và $3y + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}$ và $y = -4$.

Vậy $x = \frac{1}{12}$; $y = -4$.

Câu 18. (HSG 7 huyện Đức Phổ 2015 - 2016; huyện Phú Lý 2016 - 2017; huyện Trà Lý, huyện Năm Căn 2017 - 2018)

Cho các số $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{15}$. Chứng minh rằng: $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$

Lời giải

Với: $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{15}$. Ta có:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 5a_5$$

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} < 5a_{10}$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} < 5a_{15}$$

Suy ra $a_1 + a_2 + \dots + a_{15} < 5(a_5 + a_{10} + a_{15})$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$$

Vậy

Câu 19. (HSG 7 huyện Triệu Sơn - Thanh Hoá 2017 - 2018)

Gọi a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

Lời giải

Vì $a < b+c$ nên $\frac{a}{b+c} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b+c} < \frac{a+a}{b+c+a}$ (1)

Tương tự ta có: $\frac{b}{c+a} < 1 \Rightarrow \frac{b}{c+a} < \frac{b+b}{c+a+b}$ (2)

$$\frac{c}{a+b} < 1 \Rightarrow \frac{c}{a+b} < \frac{c+c}{a+b+c}$$
 (3)

Từ (1) (2), (3) suy ra : $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2$

Câu 20. (HSG 7 huyện Cẩm Khê - Phú Thọ 2017 - 2018)

Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Hãy so sánh $\frac{a}{b}$ với $\frac{a+c}{b+d}$.

Lời giải

Vì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ nên $ad < bc$ (1)

Mặt khác: $\frac{a}{b} = \frac{a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{ab+ad}{b(b+d)}$ (2)

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{b(a+c)}{b(b+d)} = \frac{ab+bc}{b(b+d)}$$
 (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$.

Câu 21. (HSG 7 trường Nguyễn Du 2016 - 2017)

Chứng minh với mọi $a, b \in \mathbb{Q}$ thì $|a| + |b| \geq |a+b|$.

Lời giải

Ta có: $(|a|+|b|)^2 = a^2 + 2|ab| + b^2$; $(a+b)^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Lại có $|ab| \geq ab$ nên $2|ab| \geq 2ab$

Vì thế $a^2 + 2|ab| + b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$

Vậy $|a|+|b| \geq |a+b|$ với mọi $a, b \in \mathbb{Q}$.

Câu 22. (HSG 7 huyện Bảo Thắng 2022 - 2023)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Lời giải

Đặt $x = b+c-a$; $y = a+c-b$; $z = a+b-c$ ta có: $a = \frac{z+y}{2}$; $b = \frac{x+z}{2}$; $c = \frac{y+x}{2}$

Do đó:
$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} = \frac{1}{2} \left(\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) \geq \frac{1}{2} (2+2+2) = 3$$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>