



Chương

Bài 2.

TÍCH PHÂN

A

Lý thuyết

1. Hình thang cong

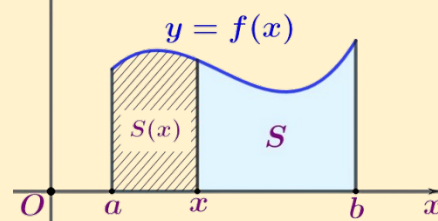


Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$.

Hình phẳng giới hạn bởi:

- » đồ thị hàm số $y = f(x)$,
- » trục hoành,
- » hai đường thẳng $x = a, x = b$



2. Diện tích hình thang cong



Định nghĩa:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi:

- » đồ thị hàm số $y = f(x)$,
- » trục hoành,
- » hai đường thẳng $x = a, x = b$

được tính bởi:

$$S = F(b) - F(a)$$

✓ Trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.



3. Định nghĩa tích phân



Định nghĩa:

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\int_a^b f(x) dx$.

✓ Viết $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

✓ Gọi $\int_a^b$ là dấu tích phân; a là cận dưới; b là cận trên, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân,



Chú ý

» Trường hợp $a=b$: $\int_a^a f(x) dx = 0$

» Trường hợp $a > b$: $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

» Tích phân không phụ thuộc vào biến số x hay t , nghĩa là

4. Ý nghĩa hình học của tích phân

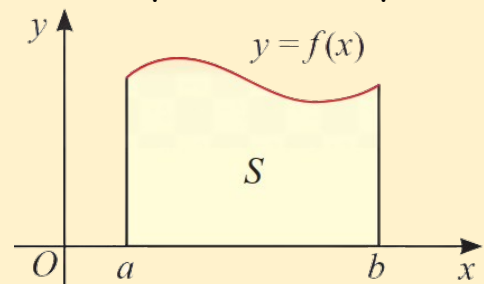


Định nghĩa:

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi:

- » đồ thị hàm số $y=f(x)$,
- » trục hoành,
- » hai đường thẳng $x=a, x=b$

Vậy $S = \int_a^b f(x) dx$.





Chú ý

» Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

» Tốc độ $v(t) \geq 0$ tại mọi thời điểm $t \in [a; b]$ thì quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b được tính theo công thức:

$$s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t) dt$$

5. Tính chất tích phân



Tính chất:

(1) Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

(2) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, k là số thực. Khi đó:

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

(3) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, $c \in (a; b)$. Khi đó

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



B

Các dạng bài tập

Dạng 1. Áp dụng định nghĩa - tính chất



Phương

- ☑ Áp dụng định nghĩa, tính chất và bảng công thức nguyên hàm cơ bản.

1	$\int_a^a f(x)dx = 0$ (Tích phân có hai cận giống nhau thì bằng 0).
2	$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$ (Tích phân đảo cận $\rightarrow$ thêm dấu trừ).
3	$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ với $k \in \mathbb{R}$.
4	$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
5	Trong đoạn $[a; b]$, tồn tại $c \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

- ☑ Ý nghĩa hình học của tích phân:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi: đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a, x = b$.



Ví dụ 1.1.

Cho $\int_0^3 f(x)dx = 5$ và $\int_0^3 g(x)dx = 2$. Tính:

(1) $\int_0^3 [f(x) + g(x)] dx$

(2) $\int_0^3 3f(x)dx$

(3) $\int_0^3 [f(x) - g(x)] dx$

(4) $\int_0^3 [2f(x) - 3g(x)] dx$

Lời giải

(1) $\int_0^3 [f(x) + g(x)] dx$

$$\int_0^3 [f(x) + g(x)] dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_0^3 g(x)dx = 5 + 2 = 7$$



$$(2) \int_0^3 [f(x) - g(x)] dx$$

$$\int_0^3 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^3 g(x) dx = 5 - 2 = 3$$

$$(3) \int_0^3 3f(x) dx$$

$$\int_0^3 3f(x) dx = 3 \int_0^3 f(x) dx = 3 \cdot 5 = 15$$

$$(4) \int_0^3 [2f(x) - 3g(x)] dx$$

$$\int_0^3 [2f(x) - 3g(x)] dx = 2 \int_0^3 f(x) dx - 3 \int_0^3 g(x) dx = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 4$$



Ví dụ 1.2.

Cho $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1$ $\int_{-2}^4 f(t) dt = -4$ Tính $\int_2^4 f(y) dy$

Lời giải

Ta có: $\int_{-2}^4 f(t) dt = \int_{-2}^4 f(x) dx$, $\int_2^4 f(y) dy = \int_2^4 f(x) dx$

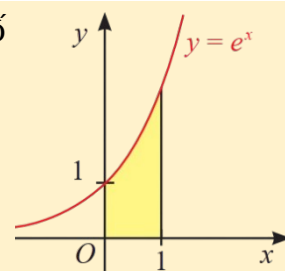
Khi đó: $\int_{-2}^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = \int_{-2}^4 f(x) dx$

$\Rightarrow \int_2^4 f(x) dx = \int_{-2}^4 f(x) dx - \int_{-2}^2 f(x) dx = -4 - 1 = -5$. Vậy $\int_2^4 f(y) dy = -5$



Ví dụ 1.3.

Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = e^x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 1$.



Lời giải

$y = f(x) = e^x$ có một nguyên hàm $F(x) = e^x$.

Diện tích hình thang cong là $S = F(1) - F(0) = e - e^0 = e - 1$ (đvdt).



Ví dụ 1.4.

Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $[1;3]$ thoả $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$,
 $\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6$ Tính $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$

Lời giải

$$\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx + 3 \int_1^3 g(x) dx = 10 \quad (1)$$

$$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6 \Leftrightarrow 2 \int_1^3 f(x) dx - \int_1^3 g(x) dx = 6 \quad (2)$$

Đặt $X = \int_1^3 f(x) dx$, $Y = \int_1^3 g(x) dx$.

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} X + 3Y = 10 \\ 2X - Y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 4 \\ Y = 2 \end{cases}$$

Do đó ta được: $\int_1^3 f(x) dx = 4$ và $\int_1^3 g(x) dx = 2$. Vậy $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx = 4 + 2 = 6$.



Ví dụ 1.5.

Cho số thực $a > 1$. tính tích phân $\int_0^a |x - 1| dx$ theo a .

Lời giải

Ta có hàm số $f(x) = |x - 1|$ có một nguyên hàm $F(x) = \frac{x^2}{2} - x$

Ta lại có
$$\int_0^a |x - 1| dx = \int_0^1 |x - 1| dx + \int_1^a |x - 1| dx = \int_0^1 (1 - x) dx + \int_1^a (x - 1) dx$$

$$= F(0) - F(1) + F(a) - F(1) = \frac{a^2}{2} - a + 1$$



▮ Dạng 2. Tích phân hàm số chứa dấu trị tuyệt đối



Phương

▮ Cách 1:

→ Cho $f(x)=0$ tìm nghiệm $\in [a;b]$ giả sử các nghiệm đó là $x_1; x_2; \dots; x_n \in [a;b]$

$$I = \int_a^{x_1} |f(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x)| dx$$

→ Khi đó

$$\Leftrightarrow I = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right|$$

→ Tính mỗi tích phân thành phần

▮ Cách 2:

→ Cho $f(x)=0$ tìm nghiệm $\in [a;b]$.

→ Xét dấu $f(x)$ trên $[a;b]$.

→ Áp dụng $|A| = \begin{cases} A & \text{ khi } A > 0 \\ -A & \text{ khi } A < 0 \end{cases}$ để phá trị tuyệt đối trong $\int_a^b \dots$.

→ Tính mỗi tích phân thành phần



Ví dụ 2.1.

Tính các tích phân sau:

$$(1) \quad A = \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx$$

$$(2) \quad B = \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx$$

$$(3) \quad C = \int_{-1}^2 |x^3 - 3x + 2| dx$$

$$(4) \quad D = \int_{-2}^2 |x^4 - 3x^2 - 4| dx$$

👉 Lời giải

$$(1) \quad A = \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx$$

Xét $f(x) = x^2 - 1$ trên đoạn $[-2; 2]$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-2; 2] \\ x = 1 \in [-2; 2] \end{cases}$$

Cho

Bảng xét dấu:

x	-2	-1	1	2	
x^2-1	+	0	-	0	+

Do đó:

$$A = \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-2}^{-1} + \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 = \left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right] + \left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right] + \left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right] = 4.$$



$$(2) \quad B = \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx$$

Xét $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ trên $[-2; 1]$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \in [-2; 1] \\ x = 0 \in [-2; 1] \\ x = 1 \in [-2; 1] \end{cases}$$

Cho

Bảng xét dấu:

x	-2	0	1		
f(x)	0	+	0	-	0

Do đó:

$$\begin{aligned} B &= \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx = \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx \\ &= \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right) \Big|_{-2}^0 - \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right) \Big|_0^1 = - \left(-\frac{8}{3} \right) - \left(-\frac{5}{12} \right) = \frac{37}{12}. \end{aligned}$$

$$(3) \quad C = \int_{-1}^2 |x^3 - 3x + 2| dx$$

Xét $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên $[-1; 2]$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in [-1; 2] \\ x = -1 \in [-1; 2] \end{cases}$$

Cho

Bảng xét dấu:

x	-1	2
$x^3 - 3x - 2$		

$$C = - \int_{-1}^2 (x^3 - 3x + 2) dx = - \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right) \Big|_{-1}^2 = 6 - \left(-\frac{3}{4} \right) = \frac{27}{4}.$$

Do đó:

$$(4) \quad D = \int_{-2}^2 |x^4 - 3x^2 - 4| dx$$

Xét $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ trên $[-2; 2]$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in [-2; 2] \\ x = -2 \in [-2; 2] \end{cases}$$

Cho

Bảng xét dấu:

x	-2	2
$x^4 - 3x^2 - 4$		

$$D = - \int_{-2}^2 (x^4 - 3x^2 - 4) dx = - \left(\frac{1}{5}x^5 - x^3 - 4x \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{48}{5} - \left(-\frac{48}{5} \right) = \frac{96}{5}.$$

Do đó:



Ví dụ 2.2.

Tính các tích phân sau:

$$(1) \quad A = \int_{-3}^5 (|x+2| - |x-2|) dx$$

$$(2) \quad C = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx$$

$$(2) \quad B = \int_{-1}^2 (x + |1-x| - |x+2|) dx$$

$$(1) \quad D = \int_0^3 \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} dx$$

Lời giải

$$(1) \quad A = \int_{-3}^5 (|x+2| - |x-2|) dx$$

Ta có bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối:

x	-3	-2	2	5
$ x+2 $	$-x-2$	0	$x+2$	$x+2$
$ x-2 $	$-x+2$		$-x+2$	0
$ x+2 - x-2 $	-4		$2x$	4

$$A = \int_{-3}^5 (|x+2| - |x-2|) dx = \int_{-3}^{-2} -4 dx + \int_{-2}^2 2x dx + \int_2^5 4 dx = -4x \Big|_{-3}^{-2} + x^2 \Big|_{-2}^2 + 4x \Big|_2^5 = 8$$

Khi đó:

$$(2) \quad B = \int_{-1}^2 (x + |1-x| - |x+2|) dx$$

Ta có bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối:

x	-1	1	2
$ 1-x $	$1-x$	0	$x-1$
$ x+2 $	$x+2$		$x+2$
$x + 1-x - x+2 $	$-x-1$		$x-3$

Khi đó:

$$B = \int_{-1}^2 (x + |1-x| - |x+2|) dx = \int_{-1}^1 (-x-1) dx + \int_1^2 (x-3) dx$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{x^2}{2} - 3x \right) \Big|_1^2 = \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left(-4 - \left(-\frac{5}{2} \right) \right) = -\frac{7}{2}.$$

$$(3) \quad C = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

Ta có:

Khi đó:

$$I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx = \int_1^2 \frac{2(2-x)+1}{x} dx + \int_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x} dx = \int_1^2 \frac{5-2x}{x} dx + \int_2^5 \frac{2x-3}{x} dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{5}{x} - x \right) dx + \int_2^5 \left(2 - \frac{3}{x} \right) dx = (5 \ln|x| - x^2) \Big|_1^2 + (2x - 3 \ln|x|) \Big|_2^5 = 8 \ln 2 - 3 \ln 5 + 4.$$



$$(4) \quad D = \int_0^3 \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} dx$$

$$D = \int_0^3 \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} dx = \int_0^3 \sqrt{x(x^2 - 2x + 1)} dx = \int_0^3 |x - 1| \sqrt{x} dx$$

$$Ta \text{ có: } |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} D &= \int_0^3 (1 - x) \sqrt{x} dx + \int_0^3 (x - 1) \sqrt{x} dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} \right) dx + \int_1^3 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \right) dx \\ &= \left(\frac{2}{3} x \sqrt{x} - \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} - \frac{2}{3} x \sqrt{x} \right) \Big|_1^3 = \frac{4}{15} + \left[\frac{8\sqrt{3}}{5} - \left(-\frac{4}{15} \right) \right] = \frac{24\sqrt{3} + 8}{15}. \end{aligned}$$



Dạng 3. Tích phân hàm số cho bởi nhiều công thức



Phương

Bài toán 1:

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{khi } x \leq b \\ h(x) & \text{khi } x > b \end{cases}$ liên tục trên D . Tính $J = \int_a^c f(x)dx$.
Xét $b \in [a; c]$.

→ **Bước 1.** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x=b$?
Tức là kiểm tra

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = g(b) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} h(x) = f(b)$$

$$J = \int_a^c f(x)dx = \underbrace{\int_a^b g(x)dx}_{I_1} + \underbrace{\int_b^c h(x)dx}_{I_2}$$

→ **Bước 2.** Tách cận:

→ **Bước 3.** Tính các tích phân $I_1; I_2$ bằng các phương pháp đã học.

Bài toán 2:

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} g(x; m) & \text{khi } x \leq b \\ h(x; m) & \text{khi } x > b \end{cases}$ liên tục trên D . Tính $J = \int_a^c f(x)dx$.
Xét $b \in [a; c]$.

→ **Bước 1.** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x=b$?
Tức là kiểm tra:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x; m) = g(b; m) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b^-} g(x; m) = \lim_{x \rightarrow b^+} h(x; m) = f(b)$$

$$J = \int_a^c f(x)dx = \underbrace{\int_a^b g(x)dx}_{I_1} + \underbrace{\int_b^c h(x)dx}_{I_2}$$



Ví dụ 3.1.

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ Tính tích phân $I = \int_1^3 f(x)dx$?

→ **Lời giải**

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 2x + 3) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 1) = 3 \end{cases} \text{ và } f(2) = 3$$

Do đó hàm số đã cho liên tục tại $x=2$.

$$I = \int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx + \int_2^3 (x^2 - 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_2^3 = \frac{23}{3}$$

Ta có:



Ví dụ 3.2.

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ Tính tích phân $\int_0^2 f(x) dx$?

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4 - x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2) = 3 \end{cases}$, và $f(1) = 3$.

Vì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbf{R}$ nên liên tục tại $x = 1$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$.

Khi đó $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 (4 - x) dx = x^3 \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 1 + \left(8 - 2 - 4 + \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{2}$



Ví dụ 3.3.

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 0,5x & \text{khi } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{khi } 2 \leq x < 15 \\ 4 - 0,2x & \text{khi } 15 \leq x \leq 20 \end{cases}$ Tính $\int_0^{20} f(x) dx$

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (0,5x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$ và

Do $\lim_{x \rightarrow 15^-} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 15^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 15^+} (4 - 0,2x) = f(15)$ nên hàm số liên tục trên đoạn $[0; 20]$

Do đó $\int_0^{20} f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^{15} f(x) dx + \int_{15}^{20} f(x) dx$
 $= \int_0^2 0,5x dx + \int_2^{15} 1 dx + \int_{15}^{20} (4 - 0,2x) dx = \frac{x^2}{4} \Big|_0^2 + x \Big|_2^{15} + \left(4x - \frac{x^2}{10} \right) \Big|_{15}^{20} = 1 + 13 + \frac{5}{2} = \frac{33}{2}$



Ví dụ 3.4.

Cho số thực a và hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leq 0 \\ a(x - x^2) & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbf{R}$. Tính

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a(x - x^2)) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x) = 0 \end{cases}$, và $f(0) = 0$.

Vì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbf{R}$ nên liên tục tại $x = 0$.



Khi đó
$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 2x dx + \int_0^1 a(x - x^2) dx$$

$$= (x^2) \Big|_{-1}^0 + a \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = -1 + a \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{a}{6} - 1$$



▮ Dạng 4. Bài toán thực tế



Phương pháp

■ Bài toán chuyển động của một vật

» Một vật chuyển động theo phương trình vận tốc $v(t)$ trong khoảng thời gian

$t=a$ đến $t=b (a < b)$

sẽ di chuyển được quãng đường là:

$$s = \int_a^b v(t) dt$$

» Một vật chuyển động có phương trình gia tốc $a(t)$ thì vận tốc của vật đó sau

$$v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$$

khoảng thời gian $\Delta t = t_2 - t_1$ là:

■ Bài toán ứng dụng tích phân vào tìm các đại lượng vật lý như công, điện lượng,...

» Theo định luật Hooke, lực cần dùng để giữ lò xo giãn thêm x mét từ độ dài tự nhiên là $f(x) = kx$, với $k (N/m)$ là độ cứng của lò xo. Công cần để kéo dẫn lò

$$A = \int_{l_1}^{l_2} f(x) dx$$

xo từ độ dài l_1 đến độ dài l_2 là:

» Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$$



Ví dụ 4.1.

Một vật chuyển động với vận tốc $10 m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt

🔗 Lời giải

Hàm vận tốc $v(t) = \int a(t) dt = \int (3t + t^2) dt = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C$

Lấy mốc thời gian $(t=0)$ lúc tăng tốc $\Rightarrow v(0) = 10 \Rightarrow C = 10$

$$v(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 10$$

Ta được:

Sau 10 giây kể từ lúc tăng tốc, quãng đường vật đi được là:

$$s = \int_0^{10} \left(\frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 10 \right) dt = \left(\frac{t^4}{12} + \frac{t^3}{2} + 10t \right) \Big|_0^{10} = \frac{4300}{3} m$$



Ví dụ 4.2.

Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t) = t^2 - 3t + 2$ (m/s). Trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 3$

- (1) Tìm độ dịch chuyển của vật.
- (2) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này.

Lời giải

- (1) Tìm độ dịch chuyển của vật.

Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 3$ là

$$\int_1^3 v(t) dt = \int_1^3 (t^2 - 3t + 2) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t \right]_1^3 = \left(\frac{3^3}{3} - \frac{3 \cdot 3^2}{2} + 2 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{3 \cdot 1^2}{2} + 2 \cdot 1 \right) = \frac{2}{3}$$

- (2) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này.

Tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 3$ là

$$\int_1^3 |v(t)| dt = \int_1^3 |t^2 - 3t + 2| dt = \int_1^2 (-t^2 + 3t - 2) dt + \int_2^3 (t^2 - 3t + 2) dt = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$$



Ví dụ 4.3.

Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t) = t^2 - t - 6$ (m/s). Trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 4$

- (1) Tìm độ dịch chuyển của vật.
- (2) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này.

Lời giải

- (1) Tìm độ dịch chuyển của vật.

Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 4$ là

$$\int_1^4 v(t) dt = \int_1^4 (t^2 - t - 6) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t \right]_1^4 = \left(\frac{4^3}{3} - \frac{4^2}{2} - 6 \cdot 4 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} - 6 \cdot 1 \right) = -\frac{9}{2}$$

- (2) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này.

Tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $1 \leq t \leq 4$ là

$$\int_1^4 |v(t)| dt = \int_1^4 |t^2 - t - 6| dt = \int_1^3 (-t^2 + t + 6) dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6) dt = \frac{22}{3} + \frac{17}{6} = \frac{61}{6}$$



Ví dụ 4.4.

Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,0002x + 7,5$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

- (1) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 60 đơn vị sản phẩm.

(2) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 150 đơn vị sản phẩm.



Lời giải

- (1) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 60 đơn vị sản phẩm.

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 60 đơn vị sản phẩm là

$$\begin{aligned} P(60) - P(50) &= \int_{50}^{60} P'(x) dx = \int_{50}^{60} (-0,0002x + 7,5) dx = - \int_{50}^{60} 0,0002x dx + \int_{50}^{60} 7,5 dx \\ &= -0,0001x^2 \Big|_{50}^{60} + 7,5x \Big|_{50}^{60} = -0,0001(60^2 - 50^2) + 7,5(60 - 50) = 74,89 \quad (\text{triệu đồng}). \end{aligned}$$

- (2) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 150 đơn vị sản phẩm.

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 150 đơn vị sản phẩm là

$$\begin{aligned} P(150) - P(100) &= \int_{100}^{150} P'(x) dx = \int_{100}^{150} (-0,0002x + 7,5) dx = - \int_{100}^{150} 0,0002x dx + \int_{100}^{150} 7,5 dx \\ &= -0,0001x^2 \Big|_{100}^{150} + 7,5x \Big|_{100}^{150} = -0,0001(150^2 - 100^2) + 7,5(150 - 100) = 373,75 \quad (\text{triệu đồng}). \end{aligned}$$



Ví dụ 4.5.

Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,0005x + 12,2$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

- (1) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị sản phẩm.

- (2) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị sản phẩm.

Lời giải

- (1) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị sản phẩm.

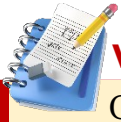
Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị sản phẩm là

$$\begin{aligned} P(101) - P(100) &= \int_{100}^{101} P'(x) dx = \int_{100}^{101} (-0,0005x + 12,2) dx = - \int_{100}^{101} 0,0005x dx + \int_{100}^{101} 12,2 dx \\ &= -0,00025x^2 \Big|_{100}^{101} + 12,2x \Big|_{100}^{101} = -0,00025(101^2 - 100^2) + 12,2(101 - 100) \approx 12,15 \quad (\text{triệu đồng}). \end{aligned}$$

- (2) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị sản phẩm.

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị sản phẩm là

$$\begin{aligned} P(110) - P(100) &= \int_{100}^{110} P'(x) dx = \int_{100}^{110} (-0,0005x + 12,2) dx = - \int_{100}^{110} 0,0005x dx + \int_{100}^{110} 12,2 dx \\ &= -0,00025x^2 \Big|_{100}^{110} + 12,2x \Big|_{100}^{110} = -0,00025(110^2 - 100^2) + 12,2(110 - 100) \approx 121,48 \quad (\text{triệu đồng}). \end{aligned}$$



Ví dụ 4.6.

Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính R không đổi, có thể được mô hình hóa bởi công thức bên dưới. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \leq r \leq R$. So sánh vận tốc trung bình với vận tốc lớn nhất.

(1) $v = \frac{k}{2} \left(\frac{4}{3} R^2 - r^2 \right)$, trong đó k là một hằng số.

(2) $v = k(R^2 - r^2)$, trong đó k là một hằng số.

Lời giải

(1) $v = \frac{k}{2} \left(\frac{4}{3} R^2 - r^2 \right)$, trong đó k là một hằng số.

Vận tốc trung bình của động mạch là:

$$\begin{aligned} v_{tb} &= \frac{1}{R-0} \int_0^R v(r) dr = \frac{1}{R} \int_0^R \frac{k}{2} \left(\frac{4}{3} R^2 - r^2 \right) dr \\ &= \frac{1}{6R} \int_0^R (4kR^2 - 3kr^2) dr = \frac{1}{6R} \left(4kR^2 r - k r^3 \right) \Big|_0^R = \frac{1}{6R} (4kR^3 - kR^3) = \frac{kR^2}{2} \end{aligned}$$

Vì $0 \leq r \leq R$ nên vận tốc của động mạch đạt giá trị lớn nhất là $v_{\max} = \frac{2}{3} kR^2$ khi $r=0$.

Do đó $v_{\max} = \frac{4}{3} v_{tb}$.

(2) $v = k(R^2 - r^2)$, trong đó k là một hằng số.

Vận tốc trung bình của động mạch là:

$$\begin{aligned} v_{tb} &= \frac{1}{R-0} \int_0^R v(r) dr = \frac{1}{R} \int_0^R k(R^2 - r^2) dr \\ &= \frac{1}{R} \int_0^R (kR^2 - kr^2) dr = \frac{1}{R} \left(kR^2 r - \frac{1}{3} k r^3 \right) \Big|_0^R = \frac{1}{R} \left(kR^3 - \frac{1}{3} kR^3 \right) = \frac{2kR^2}{3} \end{aligned}$$

Vì $0 \leq r \leq R$ nên vận tốc của động mạch đạt giá trị lớn nhất là $v_{\max} = kR^2$ khi $r=0$.

Do đó $v_{\max} = \frac{3}{2} v_{tb}$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>