Người làm:
Zalo: Minh Thu - số đt zalo: 0919791300
Email: minhthupht@gmail.com

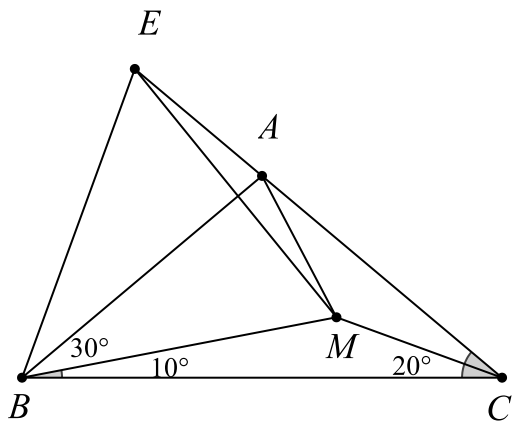
CĐ: HÌNH HỌC

Dạng 1. Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau

Câu 1. (HSG 7 trường Ngô Gia Tự 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\widehat{A} = 100^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{MBC} = 10^\circ$, $\widehat{MCB} = 20^\circ$. Tính số đo góc $\widehat{AMB}$.

Lời giải



+) Ta có tam giác ABC cân tại A và $\widehat{A} = 100^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \dfrac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ$.

Trên tia CA lấy điểm E sao cho $CE = CB \Rightarrow \Delta BCE$ cân tại $C \Rightarrow \widehat{BEC} = \widehat{EBC} = 70^\circ$.

+) Xét ΔMCB và ΔMCE có:

MC chung

$\widehat{MCB} = \widehat{MCE}\ (= 20^\circ)$

$CB = CE$ (cách lấy điểm E)

Suy ra $\Delta MCB = \Delta MCE$ (c – g – c)

$\Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{MEC} = 10^\circ \Rightarrow \widehat{MBE} = \widehat{MEB} = 70^\circ - 10^\circ = 60^\circ$

$\Rightarrow \Delta MEB$ đều $\Rightarrow BM = BE$.

+) Ta có $\widehat{MBA} = \widehat{CBA} - \widehat{CBM} = 40^\circ - 10^\circ = 30^\circ$

Mặt khác $\widehat{ABE} = \widehat{MBE} - \widehat{MBA} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$

Suy ra $\widehat{ABE} = \widehat{ABM}\ (= 30^\circ)$

+) Xét ΔMAB và ΔEAB có:

AB chung

$\widehat{MBA} = \widehat{EBA}\ (= 30^\circ)$

$BM = BE$ (cmt)

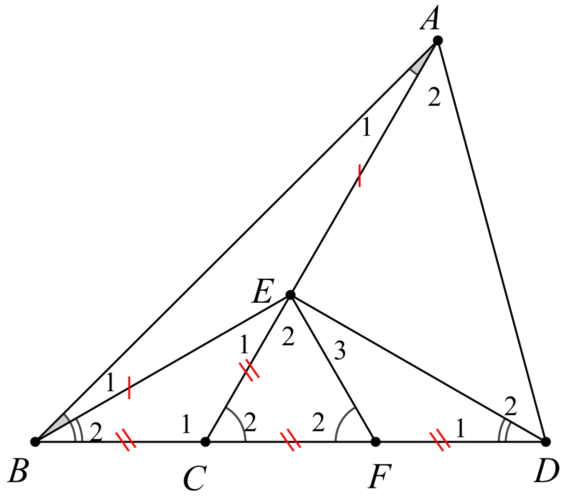
Suy ra $\Delta MAB = \Delta EAB$ (c – g – c)

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AEB} = 70^\circ$.

Câu 2. **(HSG 7 trường Tân Lạc 2015 - 2016)**

Cho tam giác ABC có góc B bằng 45°, góc C bằng 120°. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$. Tính góc ADB.

Lời giải



Trên CA lấy điểm E sao cho $AE = BE \Rightarrow \Delta EBA$ cân tại E

$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{A_1} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{B_2} = 30^\circ$.

Ta có $\widehat{E_1} = \widehat{A_1} + \widehat{B_2} = 30^\circ$ (tính chất góc ngoài của tam giác)

Do đó ΔCBE cân tại $C \Rightarrow CB = CE$.

Gọi F là trung điểm $CD \Rightarrow CB = CE = CF = FD$.

Tam giác CEF cân tại C có $\widehat{C_2} = 180^\circ - \widehat{C_1} = 60^\circ$ nên CEF là tam giác đều.

$\Rightarrow CE = CF = FD = EF \Rightarrow \Delta EDF$ cân tại F.

Suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{E_3} = \dfrac{\widehat{F_2}}{2} = 30^\circ$

Xét tam giác CDE ta có: $\widehat{CED} = \widehat{E_2} + \widehat{E_3} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ (1)

Ta có: $\widehat{D_1} = \widehat{B_1} \Rightarrow \Delta EBD$ cân tại $E \Rightarrow EB = ED \Rightarrow EA = ED\ (= EB)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔEDA vuông cân tại $E \Rightarrow \widehat{D_2} = 45^\circ$

Vậy $\widehat{ADB} = \widehat{D_1} + \widehat{D_2} = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$.

Dạng 2. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau

Câu 1. **(HSG 7 huyện Tân Lạc 2015 - 2016)**

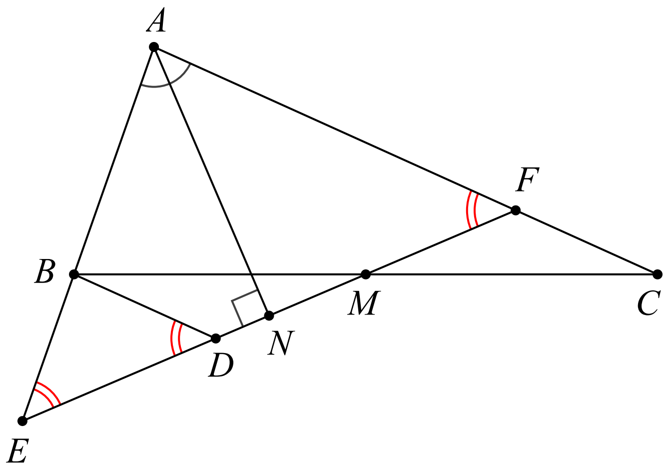
Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC. Từ M kẻ đường vuông góc với tia phân giác của góc BAC tại N, cắt tia AB tại E và cắt tia AC tại F.

Chứng minh rằng:

a) $BE = CF$.

b) $AE = \dfrac{AB + AC}{2}$.

Lời giải



a) Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt EF tại D

Xét ΔMBD và ΔMCF có:

$\widehat{DBM} = \widehat{FCM}$ (so le trong)

$MB = MC$ (giả thiết) ;

$\widehat{BMD} = \widehat{CMF}$ (đối đỉnh)

Do đó $\Delta MBD = \Delta MCF$ (c – g – c). Suy ra $BD = CF$ (1).

Mặt khác ΔAEF có AN vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên cân tại A

Suy ra $\widehat{E} = \widehat{MFA}$.

Mà $\widehat{BDE} = \widehat{MFA}$ (đồng vị) nên $\widehat{BDE} = \widehat{E}$.

Do đó ΔBDE cân tại B, suy ra $BD = BE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BE = CF$.

b) Tam giác AEF cân tại A $\Rightarrow$ $AE = AF$

Ta có: $2AE = AE + AF = (AB + BD) + (AC - CF)$

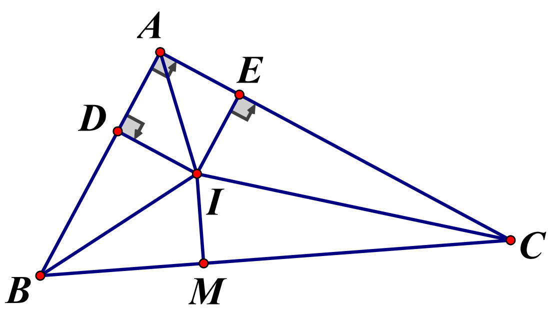
$= (AB + AC) + (BD - CF) = AB + AC$ (vì $BE = CF$)

Vậy $AE = \dfrac{AB + AC}{2}$.

Câu 2. **(HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2016 - 2017)**

Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 3\,cm$; $AC = 4\,cm$. Điểm I nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác ABC. Gọi M là chân đường vuông góc kẻ từ I đến BC. Tính MB.

Lời giải



Vì I nằm trong tam giác ABC cách đều ba cạnh nên I là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác ABC.

Tam giác ABC vuông tại A nên tính $BC = 5\,cm$

Xét ΔCEI và ΔCMI có:

$\widehat{CEI} = \widehat{CMI} = 90^\circ$

CI cạnh chung

$\widehat{ECI} = \widehat{MCI}$ (CI là phân giác của $\widehat{ACB}$)

$\Rightarrow \Delta CEI = \Delta CMI$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow CM = CE$ (hai cạnh tương ứng)

Chứng minh tương tự ta có: $AE = AD;\ BD = BM$

Suy ra $MB = \dfrac{BC + AB - AC}{2} = 2$

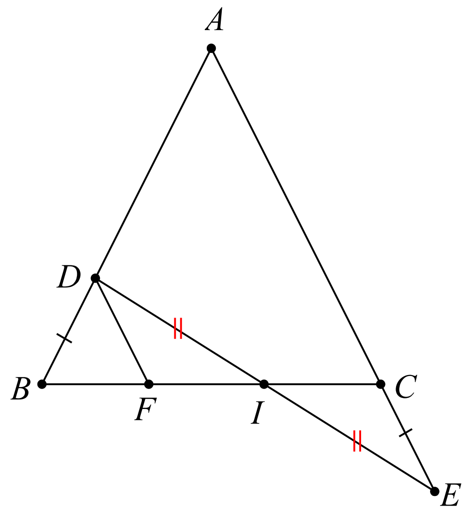
Dạng 3. Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Câu 1. (HSG 7 huyện 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC cân tại đỉnh $A.$ Trên cạnh AB lấy điểm D, trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $BD = CE.$ Gọi I là trung điểm của $DE.$

Chứng minh ba điểm B, I, C thẳng hàng

Lời giải



Kẻ $DF // AC$ $(F \in AC)$

$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{DFB}$ (đồng vị)

$\Rightarrow \widehat{DFB} = \widehat{B}\left(= \widehat{ACB}\right)$ $\Rightarrow \Delta DBF$ cân tại D

$\Rightarrow DF = BD = CE$

Xét ΔIDF và ΔIFC có:

$DF = CE$ (gt)

$\widehat{IDF} = \widehat{IEC}$ (so le trong)

$DI = IE$

Suy ra $\Delta IDF = \Delta IFC$ (c – g – c)

$\Rightarrow \widehat{DIF} = \widehat{EIC}$

$\Rightarrow F, I, C$ thẳng hàng $\Rightarrow B, I, C$ thẳng hàng.

Dạng 4. Bất đẳng thức trong tam giác

Dạng 5. Chứng minh song song, vuông góc

Dạng 6. Hình khối trong thực tiễn

Dạng 7. Bài toán chứng minh tổng hợp

Câu 1. **(HSG 7 trường Nguyễn Văn Trỗi 2017 - 2018; trường Ngô Gia Tự 2017 - 2018)**

Cho tam giác cân ABC, $AB = AC$. Trên tia đối của các tia BC, CB lấy theo thứ tự hai điểm D và E sao cho $BD = CE$.

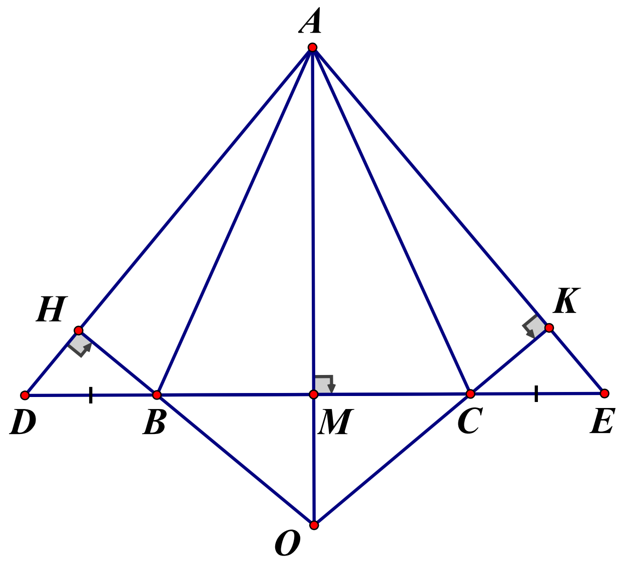
a) Chứng minh tam giác ADE là tam giác cân.

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh AM là tia phân giác của $\widehat{DAE}$.

c) Từ B và C vẽ BH, CK theo thứ tự vuông góc với AD, AE. Chứng minh $BH = CK$.

d) Chứng minh 3 đường thẳng AM, BH, CK gặp nhau tại một điểm.

Lời giải



a) Ta có ΔABC cân nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ACE}$

Xét ΔABD và ΔACE có:

$AB = AC$ (gt)

$\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$ (cmt)

$DB = CE$ (gt)

Suy ra $\Delta ABD = \Delta ACE$ (c – g – c)

$\Rightarrow AD = AE \Rightarrow \Delta ADE$ cân tại A.

b) Xét ΔAMD và ΔAME có:

$MD = ME$ (do $DB = CE$ và $MB = MC$)

AM chung

$AD = AE$ (cmt)

Suy ra $\Delta AMD = \Delta AME$ (c – c – c)

$\Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{MAE}$

Vậy AM là tia phân giác của $\widehat{DAE}$.

c) Vì ΔADE cân tại A (cm câu a) nên $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$

Xét hai tam giác vuông ΔBHD và ΔCKE có:

$\widehat{BDH} = \widehat{CEK}$ (do $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$)

$DB = CE$ (gt)

Suy ra $\Delta BHD = \Delta CKE$ (ch – gn)

$\Rightarrow BH = CK$.

d) Gọi giao điểm của BH và CK là O

Xét hai tam giác vuông ΔAHO và ΔAKO có:

OA cạnh chung

$AH = AK$ (vì $AD = AE$ và $DH = KE$ do $\Delta BHD = \Delta CKE$)

Suy ra $\Delta AHO = \Delta AKO$ (ch – cgv)

Do đó $\widehat{OAH} = \widehat{OAK}$ nên AO là tia phân giác của $\widehat{KAH}$ hay AO là tia phân giác của $\widehat{DAE}$,

Mặt khác theo câu b) AM là tia phân giác của $\widehat{DAE}$.

Do đó $AO \equiv AM$, suy ra ba đường thẳng AM, BH, CK cắt nhau tại O.

Câu 2. **(HSG 7 trường Hùng Thư 2017 - 2018)**

Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng:

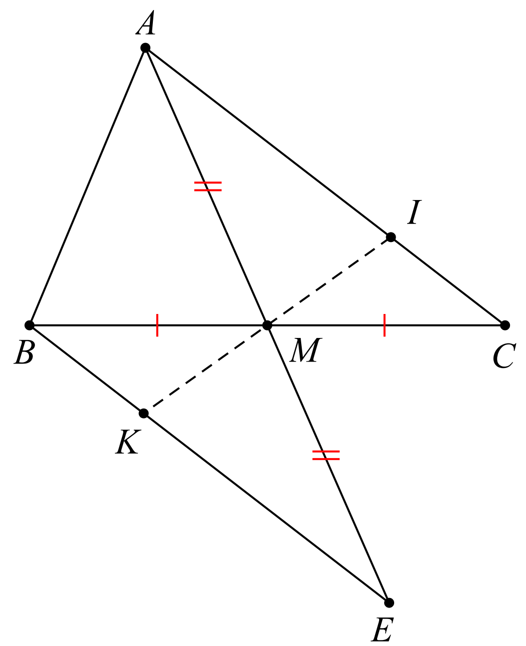
a) $AC = EB$ và $AC // BE$.

b) Gọi I là một điểm trên AC; K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Từ E kẻ $EH \perp BC\,(H \in BC)$. Biết $\widehat{HBE} = 50^\circ$, $\widehat{MEB} = 25^\circ$. Tính $\widehat{HEM}$ và $\widehat{BME}$.

d) Từ H kẻ $HF \perp BE\,(F \in BE)$. Chứng minh rằng: $HF + BE > BH + HE$.

Lời giải



a) Xét ΔAMC và ΔEMB có:

$AM = ME$ (gt)

$\widehat{AMC} = \widehat{EMB}$ (đối đỉnh)

$BM = MC$ (gt)

Suy ra $\Delta AMC = \Delta EMB$ (c – g – c)

$\Rightarrow AC = EB$ và $\widehat{MAC} = \widehat{MEB}$

Mà 2 góc $\widehat{MAC}$ và $\widehat{MEB}$ ở vị trí so le trong

Suy ra $AC // BE$.

b) Xét ΔAMI và ΔEMK có:

$AM = EM$ (gt)

$\widehat{MAI} = \widehat{MEK}$ (do $\Delta AMC = \Delta EMB$)

$AI = EK$ (gt)

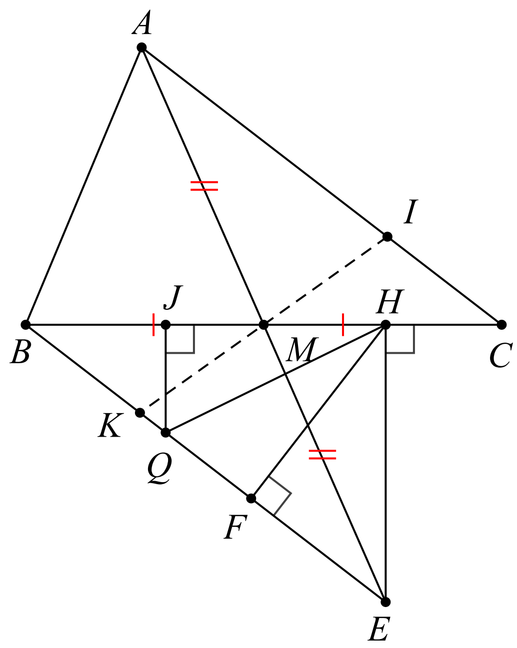
Nên $\Delta AMI = \Delta EMK$ (c – g – c) $\Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{EMK}$ (hai góc tương ứng

Mà $\widehat{AMI} + \widehat{IME} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \widehat{EMK} + \widehat{IME} = \widehat{AMI} + \widehat{IME} = 180^\circ$.

Suy ra ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c)



Trong tam giác vuông BHE ($\widehat{H} = 90^\circ$) có $\widehat{HBE} = 50^\circ$

$\Rightarrow \widehat{HEB} = 90^\circ - \widehat{HBE} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

$\Rightarrow \widehat{HEM} = \widehat{HEB} - \widehat{MEB} = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$

$\widehat{BME}$ là góc ngoài tại đỉnh M của ΔHEM.

Nên $\widehat{BME} = \widehat{HEM} + \widehat{MHE} = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$ (định lý góc ngoài của tam giác)

d) Tam giác BHE vuông tại H nên $BE > HE$, $EF < HE$

Do đó trên BE tồn tại điểm Q nằm giữa B và F sao cho $QE = HE$.

Ta có ΔQHE cân tại E nên $\widehat{HQE} = \widehat{QHE}$

Mà $\begin{cases} \widehat{BHQ} + \widehat{QHE} = 90^\circ \\ \widehat{HQE} + \widehat{QHF} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{BHQ} = \widehat{QHF}$

Kẻ $QJ \perp BH$.

Ta có $\Delta QJH = \Delta QFH$ (ch – gn)

$\Rightarrow HF = JH$, $BQ > BJ$.

Do đó $FH + BE = FH + BQ + QE > JH + BJ + HE = HB + HE$.

Vậy $FH + BE > HB + HE$.

Câu 3. **(HSG 7 trường Kim An 2017 – 2018; trường Nguyễn Khuyến 2016 – 2017)**

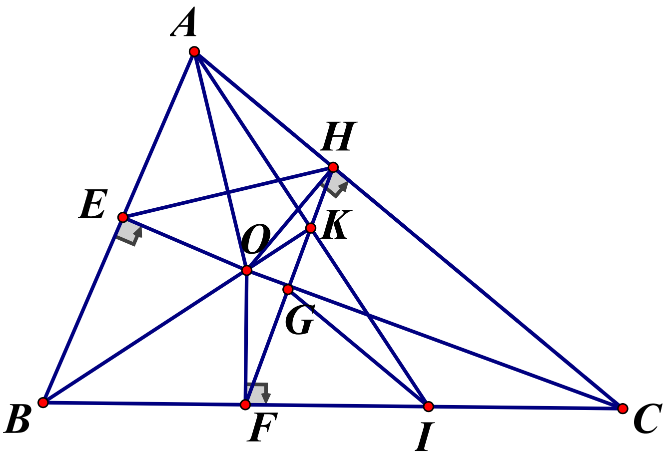
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại O. Gọi F là hình chiếu của O trên BC; H là hình chiếu của O trên AC. Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI.

Chứng minh:

a) Tam giác FCH cân và $AK = KI$.

b) Ba điểm B, O, K thẳng hàng.

Lời giải



a) +) Xét ΔCHO và ΔCHO có:

CO chung

$\widehat{CHO} = \widehat{CFO} = 90^\circ$

$\widehat{OCH} = \widehat{OCF}$ (gt)

Suy ra $\Delta CHO = \Delta CFO$ (ch – gn)

Suy ra $CH = CF \Rightarrow \Delta FCH$ cân tại C

+) Vẽ $IG // AC (G \in FH) \Rightarrow \widehat{FGI} = \widehat{FHC}$ (đồng vị)

Lại có, $\Delta CHO = \Delta CFO \Rightarrow \widehat{FHC} = \widehat{HFC}$

Do đó $\widehat{FGI} = \widehat{FHC} \Rightarrow \Delta FIG$ cân tại I

$\Rightarrow \widehat{KGI} = \widehat{KHA}$ (cùng bù với 2 góc bằng nhau) và $AH = IG$

+) Xét ΔAHK và ΔIGK có:

$\widehat{HAK} = \widehat{GIK}$ (so le trong)

$AH = IG$ (cmt)

$\widehat{KHA} = \widehat{KGI}$ (cmt)

Suy ra $\Delta AHK = \Delta IGK$ (g – c – g).

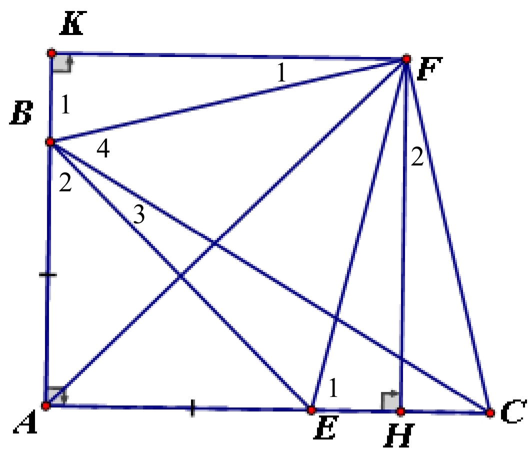
Suy ra $AK = KI$.

b) Vẽ $OE \perp AB$ tại E. tương tự câu a ta có ΔAEH, ΔBEF thứ tự cân tại A, B.
Suy ra: $BE = BF$ và $AE = AH$.
Ta có $BA = BE + EA = BF + AH = BF + FI = BI$
$\Rightarrow \Delta ABI$ cân tại B.
Nên BO là phân giác $\widehat{B}$ cũng là trung tuyến.
Mà BK là đường trung tuyến của ΔABI
Do đó BO và BK trùng nhau nên B, O, K là ba điểm thẳng hàng.

Câu 4. **(HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2017 - 2018)**

Cho tam giác ABC vuông tại A $(AB < AC)$, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB.$
Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt đường trung trực của CE tại F.
a) Chứng minh tam giác BFC cân.
b) Biết góc $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Chứng minh tam giác BFE đều.

Lời giải



a) Ta có FH là đường trung trực của đoạn EC nên $FC = FE$ (1).
Xét ΔABF và ΔAEF có:
$AB = AE$ (gt);
$\widehat{BAF} = \widehat{EAF}$ (gt)
AF chung
Suy ra $\Delta ABF = \Delta AEF$ (c – g – c)
$\Rightarrow FB = FE$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $FB = FC$ nên ΔBFC cân tại F.
b) Hạ $FK \perp AB \Rightarrow KF // AC$
$\Rightarrow \widehat{KFH} = \widehat{FHC} = 90^\circ$ (so le trong)
Ta có $\Delta ABF = \Delta AEF \Rightarrow \widehat{ABF} = \widehat{AEF}$
$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{HEF} \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{HCF}$ (do ΔBFC cân tại F)
Xét ΔFKB và ΔFHC có:
$\widehat{BKF} = \widehat{CHF} = 90^\circ$
$FB = FC$ (cmt)

$\widehat{B_1} = \widehat{HCF}$ (cmt)

Suy ra $\Delta FKB = \Delta FHC$ (ch – gn)

$\Rightarrow \widehat{F_1} = \widehat{F_2}$

$\Rightarrow \widehat{F_1} + \widehat{BFH} = \widehat{F_2} + \widehat{BFH} \Rightarrow \widehat{KFH} = \widehat{BFC} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta BFC$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{B_4} = 45^\circ$ (3)

Ta có $\widehat{ACB} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{B_3} = 60^\circ - \widehat{B_2} = 15^\circ$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{FBE} = \widehat{B_3} + \widehat{B_4} = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ$

Tam giác cân ΔBFE có $\widehat{FBE} = 60^\circ$ nên tam giác BFE đều.

Câu 5. **(HSG 7 trường Lê Văn Tám 2017 - 2018)**

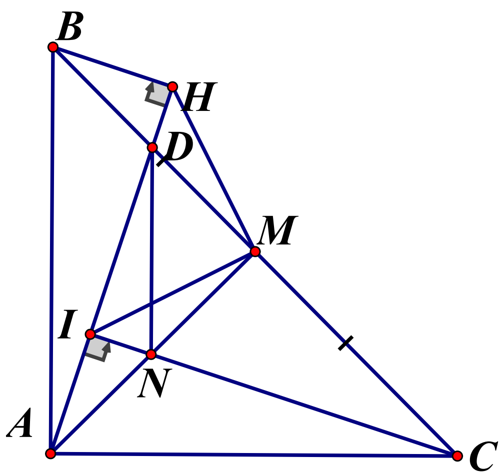
Cho tam giác ABC vuông cân tại A, M là trung điểm của BC. Lấy điểm D bất kỳ thuộc cạnh BC. H và I thứ tự là hình chiếu của B và C xuống đường thẳng AD. Đường thẳng AM cắt CI tại N. Chứng minh rằng:

a) $BH = AI$

b) Đường thẳng DN vuông góc với AC.

c) IM là phân giác của $\widehat{HIC}$.

Lời giải



a) Xét hai tam giác vuông ΔAIC và ΔBHA có:

$\widehat{BAH} = \widehat{ACI}$ (cùng phụ với $\widehat{HAC}$)

$AB = AC$ (ABC vuông cân)

Suy ra $\Delta AIC = \Delta BHA$ (gn – cgv)

$\Rightarrow BH = AI$.

b) Xét ΔADC có AM, CI là hai đường cao cắt nhau tại N

$\Rightarrow N$ là trực tâm của tam giác.

$\Rightarrow DN \perp AC$.

c) Ta có tam giác ABC vuông cân tại A, M là trung điểm của BC.

$\Rightarrow AM = BM = \dfrac{BC}{2}$

mà $\widehat{HDB} = \widehat{MDA}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{HBD} = \widehat{MAD}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau)

Xét ΔBHM và ΔAIM có:

$BH = AI$ (cmt)

$\widehat{HBD} = \widehat{MAD}$ (cmt)

$BM = AM$ (cmt)

Suy ra $\Delta BHM = \Delta AIM$ (c – g – c)

$\Rightarrow HM = MI$ và $\widehat{BMH} = \widehat{IMA}$

Mà $\widehat{IMA} + \widehat{BMI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BMH} + \widehat{BMI} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta HMI$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{HIM} = 45^\circ$

Mà $\widehat{HIC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HIM} = \widehat{MIC} = 45^\circ$

$\Rightarrow IM$ là phân giác $\widehat{HIC}$.

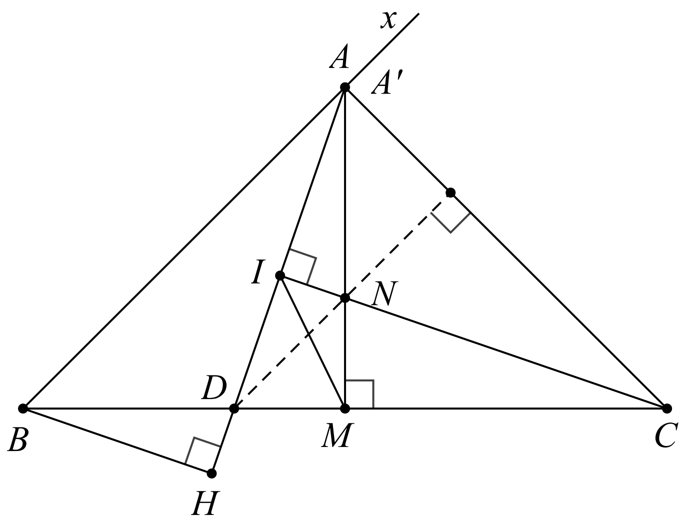
Câu 6. **(HSG 7 huyện Tam Dương 2016 - 2017)**

Cho đoạn thẳng BC cố định, M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Vẽ góc CBx sao cho $\widehat{CBx} = 45^\circ$, trên tia Bx lấy điểm A sao cho độ dài đoạn thẳng BM và BA tỉ lệ với 1 và $\sqrt{2}$. Lấy điểm D bất kỳ thuộc đoạn thẳng BM. Gọi H và I lần lượt là hình chiếu của B và C trên đường thẳng AD. Đường thẳng AM cắt CI tại N. Chứng minh rằng:

a) DN vuông góc với AC.

b) Tia phân giác của góc HIC luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



a) Từ M kẻ tia My vuông góc với BC và cắt tia Bx tại A'

Tam giác BMA' vuông cân tại M nên $MB : BA' = 1 : \sqrt{2}$

Suy ra $A \equiv A'$ nên AM vuông góc với BC

Tam giác ADC có AM và CI là đường cao nên N là trực tâm của tam giác ADC.

Suy ra DN vuông góc với AC.

b) Ta có tam giác ABC vuông cân tại A, M là trung điểm của BC.

$\Rightarrow AM = BM = \dfrac{BC}{2}$

Ta cũng có $\widehat{HDB} = \widehat{MDA}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{HBD} = \widehat{MAD}$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau)

Xét ΔBHM và ΔAIM có:

$BH = AI$ (cmt)

$\widehat{HBD} = \widehat{MAD}$ (cmt)

$BM = AM$ (cmt)

Suy ra $\Delta BHM = \Delta AIM$ (c – g – c)

$\Rightarrow HM = MI$ và $\widehat{BMH} = \widehat{IMA}$

Mà $\widehat{IMA} + \widehat{BMI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BMH} + \widehat{BMI} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta HMI$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{HIM} = 45^\circ$

Mà $\widehat{HIC} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{HIM} = \widehat{MIC} = 45^\circ \Rightarrow IM$ là phân giác $\widehat{HIC}$.

Vậy tia phân giác của $\widehat{HIC}$ luôn đi qua điểm M cố định.

Câu 7. **(HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2016 - 2017)**

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB < AC)$. Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE. Gọi I là giao điểm của CD và BE, K là giao của AB và DC.

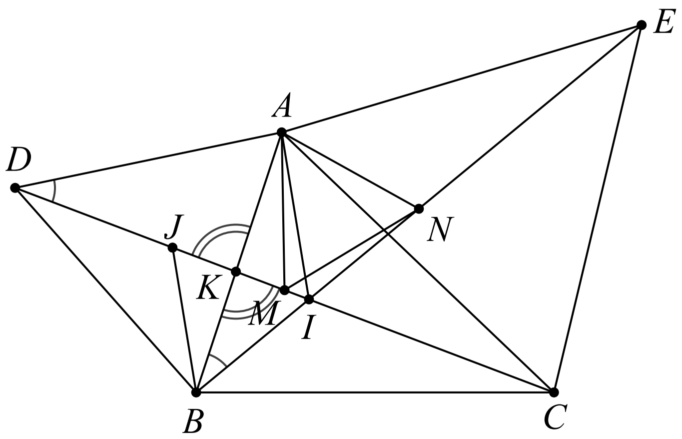
a) Chứng minh rằng: $\Delta ADC = \Delta ABE$.

b) Chứng minh rằng $\widehat{DIB} = 60^\circ$.

c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE. Chứng minh rằng ΔAMN đều.

d) Chứng minh rằng IA là phân giác của góc DIE.

Lời giải



a) Xét ΔADC và ΔABE có:

$AD = AB$ (ΔABD đều)

$\widehat{DAC} = \widehat{BAE} \left(= 60^\circ + \widehat{BAC}\right)$

$AC = AE$ (ΔACE đều)

Suy ra $\Delta ADC = \Delta ABE$ (c – g – c)

b) Từ $\Delta ADC = \Delta ABE$ (câu a)

$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{ADC}$ mà $\widehat{BKI} = \widehat{AKD}$ (đối đỉnh)

Khi đó xét ΔBIK và ΔDAK có $\widehat{BIK} = \widehat{DAK} = 60^\circ$

c) Từ $\Delta ADC = \Delta ABE$ (câu a)

$\Rightarrow DC = BE \Rightarrow CM = EN$ và $\widehat{ACM} = \widehat{AEN}$

$\Rightarrow \Delta ACM = \Delta AEN$ (c – g – c)

$\Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{EAN}$, $\widehat{MAN} = \widehat{CAE} = 60^\circ$

Do đó ΔAMN đều

d) Trên tia ID lấy điểm J sao cho $IJ = IB \Rightarrow \Delta BIJ$ đều

$\Rightarrow BJ = BI$ và $\widehat{JBI} = \widehat{DBA} = 60^\circ$ suy ra $\widehat{IBA} = \widehat{JBD}$.

Lại có $BA = BD$

$\Rightarrow \Delta IBA = \Delta JDB$ (c – g – c)

$\Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{DJB} = 120^\circ$

Mà $\widehat{BID} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{DIA} = 60^\circ$.

Từ đó suy ra IA là phân giác của $\widehat{DIE}$.

Câu 8. **(HSG 7 huyện Anh Sơn 2015 - 2016)**

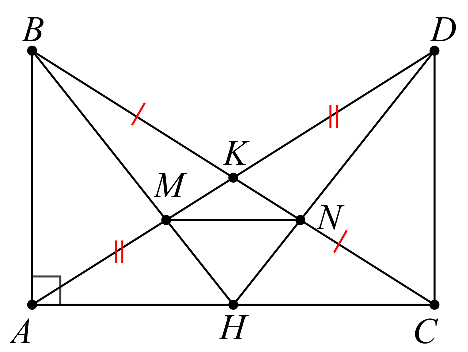
Cho tam giác ABC vuông tại A, K là trung điểm của BC. Trên tia đối của tia KA lấy D, sao cho $KD = KA$.

a) Chứng minh: $CD // AB$.

b) Gọi H là trung điểm của AC, BH cắt AD tại M cắt BC tại N. Chứng minh rằng: $\Delta ABH = \Delta CDH$.

c) Chứng minh: ΔHMN cân.

Lời giải



a) Chứng minh $CD // AB$.

Xét tam giác: ΔABK và ΔDCK có:

$BK = CK$ (gt)

$\widehat{BKA} = \widehat{CKD}$ (đối đỉnh)

$AK = DK$ (gt)

Suy ra $\Delta ABK = \Delta DCK$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{DCK} = \widehat{ABK}$ (góc tương ứng)

Mặt khác $\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ACD}=\widehat{ACB}+\widehat{BCD}=90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ACD}=90^\circ=\widehat{BAC}$

$\Rightarrow AB//CD$ ($AB\perp AC$ và $CD\perp AC$).

b) Chứng minh rằng: $\Delta ABH=\Delta CDH$

Xét tam giác vuông ΔABH và ΔCDH có:

$BA=CD$ (do $\Delta ABK=\Delta DCK$)

$AH=CH$ (gt)

Suy ra $\Delta ABH=\Delta CDH$ (c-g-c)

c) Chứng minh: $\Delta\ HMN$ cân.

Xét tam giác vuông ΔABC và ΔCDA có:

$AB=CD$; $\widehat{ACD}=90^0=\widehat{BAC}$; AC cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ABC=\Delta CDA$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{ACB}=\widehat{CAD}$

Mà $AH=CH$ (gt) và $\widehat{MHA}=\widehat{NHC}$ (vì $\Delta ABH=\Delta CDH$)

$\Rightarrow \Delta AMH=\Delta CNH$ (g-c-g) $\Rightarrow MH=NH$.

Vậy ΔHMN cân tại H.

Câu 9. **(HSG 7 huyện Hiệp Hòa 2016 - 2017)**

Cho tam giác ABC có $\widehat{B}=2\widehat{C}$. Kẻ đường cao AH. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE=BH$. Đường thẳng HE cắt AC tại D.

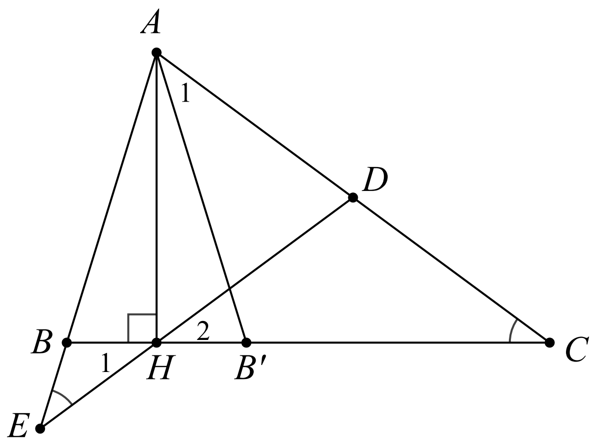
a) Chứng minh: $\widehat{BEH}=\widehat{ACB}$.

b) Chứng minh: $DH=DC=DA$.

c) Lấy B' sao cho H là trung điểm của BB'. Chứng minh $\Delta AB'C$ cân.

d) Chứng minh $AE=HC$.

Lời giải



a) Ta có ΔBEH cân tại B (do $BE=BH$) nên $\widehat{E}=\widehat{H_1}$

$\Rightarrow \widehat{ABC}=\widehat{E}+\widehat{H_1}=2\widehat{E}$ (Tính chất góc ngoài tam giác)

Lại có $\widehat{ABC}=2\widehat{C}$

Suy ra $\widehat{BEH} = \widehat{ACB}$

b) Ta có $\hat{E} = \hat{H}_1 = \hat{H}_2$ và $\hat{E} = \hat{C} \Rightarrow \hat{H}_2 = \hat{C}$

Do đó ΔDHC cân tại D nên $DC = DH$.

Xét ΔDAH có: $\widehat{DAH} = 90^\circ - \hat{E}$, $\widehat{DHA} = 90^\circ - \hat{H}_2 = 90^\circ - \hat{C}$.

$\Rightarrow \Delta DAH$ cân tại D nên $DA = DH$.

c) Ta có $\Delta ABB'$ cân tại A nên $\hat{B}' = \hat{B} = 2\hat{C}$

Mà $\hat{B}' = \hat{A}_1 + \hat{C}$ nên $2\hat{C} = \hat{A}_1 + \hat{C} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_1 \Rightarrow \Delta AB'C$ cân tại B'.

d) Ta có $AB = AB' = CB'$; $BE = BH = B'H$

Lại có: $AE = AB + BE$, $HC = CB' + B'H$.

Suy ra $AE = HC$.

Câu 10. **(HSG 7 trường Lê Quý Đôn – Tứ Kỳ 2016 - 2017)**

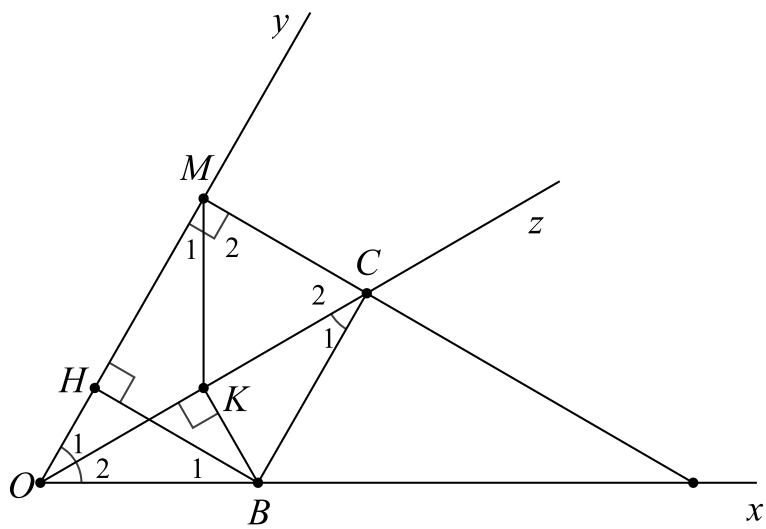
Cho Oz là tia phân giác của $\widehat{xOy} = 60^\circ$. Từ một điểm B trên tia Ox vẽ đường thẳng song song với tia Oy cắt Oz tại điểm C. Kẻ $BH \perp Oy$, $CM \perp Oy$, $BK \perp Oz$ $(H, M \in Oy; K \in Oz)$. MC cắt Ox tại P. Chứng minh:

a) K là trung điểm của OC.

b) ΔKMC là tam giác đều.

c) $OP > OC$.

Lời giải



a) ΔABC có $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (Oz là tia phân giác của $\widehat{xOy}$), $\hat{O}_1 = \hat{C}_1$ so le trong do $(Oy // BC,)$

$\Rightarrow \hat{O}_2 = \hat{C}_1 \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại $B \Rightarrow BO = BC$ mà $BK \perp OC$ tại K.

$\Rightarrow BK$ là đường cao cũng là trung tuyến của ΔOBC

Suy ra K là trung điểm OC.

b) Ta có ΔOMC vuông tại M và MK là trung tuyến nên $MK = KC$

$\Rightarrow \Delta KMC$ cân tại M.

Mặt khác ΔOMC có $\hat{M} = 90^\circ$, $\hat{O} = 30^\circ$

$\Rightarrow \widehat{MKC} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow \Delta AMC$ đều.

c) Ta có ΔOMC vuông tại $M \Rightarrow \widehat{MCO}$ nhọn $\Rightarrow \widehat{OCP}$ tù (hai góc $\widehat{MCO}$, $\widehat{OCP}$ bù nhau)

Xét trong ΔOCP có $\widehat{OCP}$ tù nên $OP > OC$.