# Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường cao trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

1. **Phương pháp giải:**

Dựa vào định lí, tính chất về sự đồng quy của ba đường cao trong tam giác.

1. **Bài toán.**

**Bài 1.** Cho

*ABC*

đều. Ba đường cao

*AM* , *BN*,*CP* cắt nhau tại *O* . Chứng minh rằng:

1. *OA*  *OB*  *OC* .
2. *O* là trọng tâm của
3. *AM*  *BN*  *CP*

*ABC*

# Lời giải:

*A*

*P*

*O*

*N*

*B M C*

1. Vì

*ABC*

đều nên

*ABC*

cân ở cả 3 đinh nên ba đường cao

*AM* , *BN*,*CP* đồng thời là ba

đường trung trực, ba đường trung tuyến của tam giác.

Vì *AM* , *BN*,*CP* là ba đường trung trực nên *OA*  *OB*  *OC* (1)

1. Vì

*AM* , *BN*,*CP* là ba đường trung tuyến nên *O* là trọng tâm của

*ABC*

1. Vì *O* là trọng tâm của

*ABC*

suy ra *OA*  2 *AM* ,*OB*  2 *BN*,*OC*  2 *CP*

3 3 3

(2)

Từ (1) (2) suy ra *AM*  *BN*  *CP*

**Bài 2.** Chứng minh rằng một tam giác có hai đường cao (xuất phát từ các đỉnh của hai góc nhọn) bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

# Lời giải

*A*

*F*

*E*

*B C*

Xét

*ABC*

có hai đường cao

*BE*,*CF* và *BE*  *CF*

Xét hai tam giác vuông

*CBF*

và *CBE*

có:

*BC* là cạnh chung.

*BE*  *CF* (giả thiết)

Suy ra

*CBF*  *CBE*

(cạnh huyền - cạnh góc vuông).

Từ đó suy ra *CBF*  *BCE* . Hay

*ABC*

cân tại *A*.

**Bài 3.** Chứng minh rằng một tam giác có ba đường cao bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

# Lời giải



Xét tam giác

*ABC*

có hai đường cao

*AH* , *BE*,*CF* và *AH*  *BE*  *CF*

Xét hai tam giác vuông

*CBF*

và *CBE* có

*BC* là cạnh chung.

*BE*  *CF* (giả thiết)

Suy ra

*CBF*  *CBE*

(cạnh huyền – cạnh góc vuông).

Suy ra *CBF*  *BCE* (1)

Xét hai tam giác vuông

*ABH*

va *BAE* có

*AB* là cạnh chung.

*AH*  *BE* (giả thiết).

Suy ra

*ABH*

 *BAE*

(cạnh huyền – cạnh góc vuông).

Suy ra *ABH*  *BAE* (hai cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) (2) suy ra *CBF*  *BCE*  *BAE*

Vậy

*ABC* có ba góc bằng nhau nên

*ABC*

là tam giác đều.

**Bài 4.** Cho

*ABC*

vuông tại *A* , kẻ đường cao *AH* và trung tuyến *AM* . Chứng minh trực tâm

của

*ABC* , *MAB*

và *MAC*

thẳng hàng.

# Lời giải

*A*

*B H M C*

Vì *AH* là đường cao của

*ABC* nên trực tâm của

*ABC*

thuộc đường thẳng *AH* 1

Có: *AH* là đường cao của *ABC*

 *AH*  *BC*  *AH*  *BM* , *AH*  *CM*

Xét

*ABM*

có *AH*  *BM*

Trực tâm của

*ABM* thuộc đường thẳng *AH* 2

Xét

*ACM*

có *AH*  *CM*

Trực tâm của

*ACM* thuộc đường thẳng *AH* 3

Từ 1;2;3  Trực tâm của *ABC*; *ABM* ; *ACM*

thẳng hàng

**Bài 5.** Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* . Đường cao

*AH*. Lấy *I* là trung điểm của

*AC*.

1. Chứng minh *I* là giao điểm của 3 đường trung trực *AHC*
2. Gọi *K* và *D* lần lượt là trung điểm của *AH* và
3. Chứng minh *BK*  *AD* .

*HC*. Chứng minh

*KD* // *AC* .

# Lời giải

1. Ta có *HI* là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền

*AC* của tam giác vuông *AHC* nên *IH* 

*IA*  *IC*  *AC*

2

. Do đó, *I* là giao điểm của ba đường trung trực của

*AHC*.

1. Do *I* là giao điểm của ba đường trung trực của

*AHC*

nên *ID*  *HC* , suy ra

*ID*//*AH* . Tương tự ta có

*IK* // *HC*.

Từ đó ta chứng minh được

*IHK*  *IDC* (c.g.c). Suy

ra *KH*  *ID* , *KI*  *HD*.

Ta chứng minh được

*KHD*  *IDC*

(c.g.c). Suy ra

*KDH*  *ICD* , do đó

*KD* // *AC*.

1. Do

*KD*//*AC* nên *KD*  *AB* . Trong

*ABD* , hai

đường cao *KD* và *AH* cắt nhau tại *K* nên *K* là trực tâm của tam giác. Do đó *BK*  *AD*.

**Bài 6.** Cho tam *ABC* cân tại

*A*, hai đường cao *BD* và *CE* cắt nhau tại

*I* (*D* 

*AC*, *E*  *AB*) . Tia

*AI* cắt *BC* tại *M* . Chứng minh

1. *M* là trung điểm của

*BC*.

1. Tam giác *MED* là tam giác cân.

# Lời giải

3

1. Hai đường cao *BC* và *CE* cắt nhau tại *I* nên *I* là trực tâm của tam giác

*AI*  *BC*.

*ABC*.

Do đó

Hơn nữa, do tam giác *ABC* cân tại *A* nên đường cao *AI* cũng đồng thời là đường trung tuyến.

Do đó, *M* là trung điềm của

*BC*.

1. Trong tam giác vuông

*BEC*,

do *EM* là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền *BC* nên

*EM*  1 *BC* . Tương tự,

2

*DM*  1 *BC*. Do đó

2

*EM*  *DM* , suy ra

*MED*

là tam giác cân tại *M* .

**Bài 7.** Cho tam giác *ABC* cân tại *A*, đường trung tuyến *AM* và đường phân giác *BD* cắt nhau

tại

*K*. Gọi *E* là giao điểm của *CK* và

*AB*. Chứng minh

# Lời giải

*BD*  *CE*.

*ABC* cân tại *A* nên đường trung tuyến *AM* cũng đồng

thời là đường phân giác.

Hai đường phân giác *AM* và *BD* cắt nhau tại *K* . Do đó,

*CK* là đường phân giác thứ ba của tam giác *ABC*.

*ABC*

cân tại *A* nên

*B*  *C*.

Mà *DBC*  1 *B*

2

( *BD* là đường phân giác)

*ECB*  1 *C*

2

( *CK* là đường phân giác)

 *DBC*  *ECB*

Xét hai tam giác

*BDC*

và *ECB* có

*DBC*  *ECB* (chứng minh trên)

*BC* : cạnh chung

*EBC*  *DCB* ( *ABC* cân tại *A* )

Suy ra *BDC*  *ECB* (g.c.g)

Do đó, *BD*  *CE* (hai cạnh tương ứng)

**Bài 8.** Cho tam giác

*ABC*. Hai đường cao

*AH* , *BK* cắt nhau tại *I*.

1. Chứng minh rằng *CI*  *AB*.
2. Khi

*ACH*  50, hãy tính các góc

*BIH* , *HIK*.

# Lời giải



1. Ta có *I* là trực tâm của tam giác chất đồng quy của ba đường cao, suy ra *CI*  *AB*.
2. Vì tam giác *BKC* vuông tại *K* nên *KBC*  90  *ACB*  40.

Mà tam giác *BIH* vuông tại *H* nên

*BIH*  90  *KBC*  *BIH*  40.

Vì hai góc *HIK* và *BIH* kề bù nên ta *HIK*  180  *BIH*.

Từ đó tính được *HIK*  140.

**Bài 9.** Cho tam giác *ABC* cân tại *A*. Hai đường cao xuất phát từ đỉnh *B* và đỉnh *C* cắt nhau tại

*M* . Biết góc

*BMC*  120, tính các góc của tam giác

# Lời giải

*ABC*.



Gọi

*E*, *F* lần lượt là chân đường cao hạ từ đỉnh

*B*, *C* của tam giác

*ABC*. Ta có

*BMC*  120

nên góc *CME*  60.

Vì tam giác *CME* vuông tại *E* nên

*MCA*  *CME*  90.

Mặt khác tam giác *AFC* vuông tại *F* nên ta có

*BAC*  *ACF*  90. Suy ra

*BAC*  *CME*  60.

Vì tam giác *ABC* cân tại *A* nên *ABC*  *ACB*  60.

**Bài 10.** Cho tam giác *ABC* cân tại

*A*, *M* là trung điểm của

*B*,*C*. Gọi *H* và *K* lần lượt là chân

các đường vuông góc kẻ từ *M* đến *AB* và

*AC*. Chứng minh

# Lời giải

*MH*  *MK*.



Tam giác *ABC* cân tại *A* nên *AM* đồng thời là đường trung tuyến và đường phân giác.

Lại có

*MH*  *AB*, *MK*  *AC*

nên theo tính chất đường phân giác của một góc, có

*MH*  *MK*.

# Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC**

# Dạng 1. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

**Bài 1.** Cho  *ABC* cân tại *A* , đường trung tuyến *AM* . Đường trung trực của *AB* cắt *AM* ở *O*

. Chứng minh rằng điểm *O* cách đều ba đỉnh của *ABC*

**Bài 2.** Cho  *ABC* cân tại *A* , *O* là giao điểm của ba đường trung trực. Lấy điểm *D* trên cạnh

*AB* , điểm *E* trên cạnh sao cho *AD*  *CE* . Chứng minh rằng

1. *OA*  *OB*  *OC* .
2. Điểm *O* nằm trên đường trung trực của *DE* .

**Bài 3.** Nhà bạn Nam có một mảnh vườn nhỏ trồng hoa và cỏ nhật. Bố của bạn Nam nhờ Nam chọn vị trí để đặt vòi xoay phun tưới cây tự động sao cho vị trí đó cách đều ba khóm hoa ở ba góc vườn nhưng Nam lại chưa biết tìm như thế nào. Các em hãy giúp bạn Nam giải quyết vấn đề này nhé.

**Bài 4.** Ông Hùng có ba cửa hàng *A*, *B*, *C* không nằm trên một đường thẳng và đang muốn tìm

địa điểm *O* để làm kho hàng. Phải chọn vị trí của kho hàng ở đâu để khoảng cách từ kho đến các cửa hàng bằng nhau?

# Dạng 2. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng

**Bài 5.** Cho tam giác *ABC* cân ở

*AC* cắt nhau tại *O*.

*A*, đường phân giác

*AK*.

Các đường trung trực của *AB* và

1. Chứng minh rằng ba điểm *A*, *K*, *O* thẳng hàng.
2. Kéo dài *CO* cắt *AB* ở

*D*, kéo dài *BO* cắt *AC* ở

*E*. Chứng minh rằng *AK* và các đường

trung trực của *AD* và *AE* đồng quy.

**Bài 6.** Cho

*xOy*  90

và điểm *P* nằm trong góc đó. Trên mặt phẳng đó lấy điểm *A* sao cho

*Ox* là đường trung trực của đoạn thẳng *PA* và điểm *B* sao cho *Oy* là đường trung trực của đoạn thẳng *PB* .

1. Chứng minh ba điểm *O*, *A*, *B* thẳng hàng.
2. Chứng minh *O* là giao điểm của ba đường trung trực của

*ABP*

từ đó suy ra

*ABP*

vuông.

**Bài 7.** Cho tam giác *MNP* cân ở *M* , đường cao *MH* . Các đường trung trực của *MN* và *MP*

cắt nhau ở *D* . Chứng minh ba điểm *M* , *D*, *H* thẳng hàng.

**Bài 8.** Cho tam giác *ABC* cân có *A* là góc tù. Gọi *M* là trung điểm của *BC* . *N* nằm trong tam giác *ABC* sao cho tam giác *BNC* cân tại *N* . Chứng minh đường thẳng *AM* và các đường

trung trực của *NB*, *NC* đồng quy.

# Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường trung trực trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

**Bài 9.** Cho

*ABC* có

*A*ˆ 110 . Các đường trung trực của cạnh *AB* và *AC* lần lượt cắt *BC* ở

*E* và *F* . Tính *EAF* .

**Bài 10.** Cho

*ABC*

cân tại *A* ,

*A*  900 . Các đường trung trực của *AB* và của *AC* cắt nhau tại

*O* và cắt *BC* tại *D* và *E* . Chứng minh rằng:

1. *OA* là đường trung trực của *BC* .
2. *BD*  *CE* .
3. *ODE* là tam giác cân.

**Bài 11.** Cho *M* là giao điểm 3 đường trung trực của tam giác *ABC* . Chứng minh rằng nếu

*M* nằm trên một cạnh của tam giác *ABC* thì *ABC* là một tam giác vuông.

**Bài 12.** Cho

*ABC* , đường phân giác

*AI*  *I*  *BC*  . Trên đoạn thẳng *IC* lấy điểm *H* , từ *H* kẻ

đường thẳng song song với *AI* cắt *AB* kéo dài tại *E* và cắt *AC* tại *F* . Chứng minh rằng:

1. Đường trung trực của đoạn thẳng *EF* đi qua đỉnh *A* của
2. Đường trung trực của đoạn thẳng *EF* vuông góc với *AI* .

*ABC* .

1. Khi *H* di động trên tia *IC* của định.

*ABC*

cố định thì đường trung trực của đoạn thẳng *EF* cố

**Bài 13.** Cho

*ABC*

có ba góc nhọn. Các điểm

*F*, *K* , *I* lần lượt là trung điểm các cạnh

*BC*, *BA*, *AC* . Gọi *H* là giao điểm các đường trung trực *ABC* . Trên tia đối của tỉa *FH* lấy

điểm

*A*1 sao cho

*A*1*F*  *FH* . Trên tia đối của tia *KH* lấy điểm *C*1

sao cho

*KH*  *KC*1. Trên tia

đối của tia *IH* lấy điểm

*B*1 sao cho

*IH*  *IB*1 .

1. Chứng minh rằng hình lục giác một song song.

*AC*1*BA*1*CB*1 có 6 cạnh bằng nhau và 2 trong 6 cạnh đó đôi

1. Chứng minh rằng:

*ABC*

= *A*1*B*1*C*1

**BA ĐƯỜNG CAO**

**Dạng 1. Xác định trực tâm của một tam giác**

**Bài 14.** Cho

*ABC* , các đường cao

*AK*, *BN*,*CM* . Điểm *H* là trực tâm của tam giác. Tìm trực

tâm của

*BHC* ,

*AHC* ,

*AHB* .

**Bài 15.** Cho tam giác *ABC* , hai đường cao *BD* và *CE* . Gọi *M* là trung điểm của minh *M* thuộc trung trực của *DE* .

*BC*. Chứng

**Bài 16.** Đoạn thẳng *AB* và điểm *M* nằm giữa *A* và *B* (*MA*  *MB*). Vẽ tia Mx vuông AB lấy

hai điểm *C* và *D* sao cho

1. *AE*  *BD*

*MA*  *MC* , *MD*  *MB*. Tia *AC* vuông cắt *BD* tại *E* . Chứng minh

1. *C* là trực tâm của tam giác *ABD* .

# Dạng 2. Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba đường thẳng đồng quy

**Bài 17.** Cho tam giác *LMN* nhọn và điểm *S* nằm trong tam giác. Gọi *LS* cắt *MN* tại *P* , *MS* cắt *LN* tại *Q* . Chứng minh rằng nếu *LP* vuông góc với *MN* và *MQ* vuông góc với *LN* thì *NS* vuông góc với *ML* .

**Bài 18.** Cho

*NK*  *MP*

**Bài 19.** Cho

*MNP*

*ABC*

cân tại *M* , đường cao *PQ* cắt đường phân giác *MS* ở *K* . Chứng minh

vuông tại *A* , kẻ đường cao *AH* . Lấy điểm *K* thuộc đoạn thẳng *HC* . Qua

*K* kẻ đường thẳng song song với *AB* , cắt *AH* tại *D* . Chứng minh *AK*  *CD* .

**Bài 20.** Cho

*MNP*

vuông tại

*M* *MP*  *MN*  . Trên cạnh *MN* lấy điểm *Q* sao cho *MQ*  *MP* ,

trên tia đối của tia *MP* lấy điểm *R* sao cho *MR*  *MN* . Chứng minh:

1. *PQ*  *NR* .
2. *RQ*  *NP* .

# Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường cao trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

**Bài 21.** Cho

*MNP* có ba góc nhọn, các đường cao

*NQ*, *PR* cắt nhau tại S.

1. Chứng minh *MS*  *NP* .
2. Cho *MNP*  650 . Tính *SMR* .

**Bài 22.** Cho

*BD*  *BA* .

*ABC*

vuông tại *A* , kẻ đường phân giác *BM* . Trên cạnh *BC* lấy điểm *D* sao cho

1. Chứng minh *BM*  *AD* .
2. Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *D* trên *AC* , *K* là hình chiếu vuông góc của *A* trên *DM*

. Chứng minh ba đường thẳng

*AK*, *BM* , *DH* đồng quy.

# ĐÁP SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC

**Dạng 1. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác Bài 1.**



*ABC* cân tại *A* có *AM* là đường trung tuyến của cạnh đáy *BC* nên *AM* cũng là đường trung trực của *BC* .

Vì đường trung trực của *AB* cắt *AM* ở *O ABC* nên *O* là giao điểm của ba đường trung trực

của *ABC* .

Vậy *O* cách đều ba đỉnh của  *ABC* .

# Bài 2.



1. Điểm *O* là giao điểm 3 đường trung trực của

*ABC*

nên *OA*  *OB*  *OC* .

1. Ta có *OA*  *OC*

nên

*AOC* cân tại *O*  *A*2  *C*1 (1)

*ABC* cân tại *A* , *AO* là đường trung trực nên *AO* là đường phân giác của *BAC*

 *A*1  *A*2 (2)

Từ (1) và (2)  *A*1  *C*1 ( *A*1 )

Xét

*OAD*

và *OCE* có:

*AD*  *CE* (gt)

*A*1  *C*1 (cmt)

Do đó,

*OA*  *OC*

*OAD*  *OCE*(c.g.c)

 *OD*  *OE* (hai cạnh tương ứng)

Vậy *O* nằm trên đường trung trực *DE* .

# Bài 3.



Gọi vị trí ba khóm hoa đó lần lượt là *A*, *B*, *C* và vị trí cần đặt vòi xoay phun tưới cây tự động

là *O* thì điểm *O* cách đều ba điểm *A*, *B*, *C* . Do đó *O* là giao của ba đường trung trực của tam

giác *ABC* hay *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*

Để xác định vị trí điểm *O* ta chỉ cần xác định giao điểm của hai trong ba đường trung trực của tam giác *ABC* .

# Bài 4.



Vì điểm *O* cách đều ba điểm *A*, *B*, *C* nên *O* là giao của ba đường trung trực của tam giác

*ABC* hay *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* .

Để xác định vị trí điểm *O* ta chỉ cần xác định giao điểm của hai trong ba đường trung trực của tam giác *ABC* .

# Dạng 2. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng Bài 5.

*A*

*D*

*E*

*O*

*1*

*2*

*1*

*2*

*K*

*B C*

1. Ta có

*ABD*  *ACD* (c.g.c). Từ đó suy ra *AD* là đường trung trực của

*BC*.

Xét

*BC*.

*ABC* , theo tính chất ba đường trung trực của tam giác nên *O* thuộc đường trung trực của

Vậy ba điểm *A*, *D*, *O* thẳng hàng.

1. Ta có

*ABC*  *ACB*,

*B*2  *B*1

 *B*1  *C*1.

Chứng minh

*ADC*  *AEB* (g.c.g), suy ra

*AD*  *AE*

1.

Măt khác, có *OB*  *OC*, *BE*  *CD* (vì

*ADC*  *AEB* ) nên *OD*  *OE*

2.

Từ 1

và 2

suy ra *AK* là đường trung trực của

*BC*.

Xét *ADE* , theo tính chất ba đường trung trực của tam giác suy ra *AK* và các đường trung

trực của *AD* và *AE* đồng quy.

# Bài 6.



1. Xét *AOP* có: *Ox* là đường trung trực của *PA* nên *OA*  *OP*, *IA*  *IP*

Xét hai tam giác vuông

*OAI*

và *OPI*

có: *OA*  *OP*, *IA*  *IP*

 *OAI*

 *OPI*

(ch-cgv)  *O*1  *O* 2

(1)

Xét *BOP* có: *Oy* là đường trung trực của *PB* nên *OB*  *OP*, *EB*  *EP*

Xét hai tam giác vuông

*OBE*

và *OPE*

có: *OB*  *OP*, *EB*  *EP*

 *OBE*  *OPE*

(ch-cgv)  *O*3  *O* 4

(2)

Từ (1)(2) suy ra *O*1  *O* 4  *O* 2  *O*3  90

 *AOB*  *O*1  *O* 4  *O* 2  *O*3  2*O* 2  *O*3   180

Suy ra ba điểm *O*, *A*, *B* thẳng hàng.

1. Ta có *OA*  *OP* và *OB*  *OP* theo chứng minh câu a.

 *OA*  *OB*  *OP*

 O nằm trên đường trung trực của *AB* .

Xét

*ABP*

có:

*Ox* là đường trung trực của *PA*

*Oy* là đường trung trực của *PB*

*O* nằm trên đường trung trực của *AB*

Suy ra *O* là giao điểm của ba đường trung trực của

*ABP*

Mà *O* nằm trên cạnh *AB* của mục III của chuyên đề này)

# Bài 7.

*ABP*

nên

*ABP*

***M***

là tam giác vuông (Theo chứng minh Bài 1

***N H P***

***D***

***E***

***D***

Chứng minh được:

*MNH*  *MPH*

(cạnh huyền – cạnh góc vuông).

Từ đó, suy ra *MH* là đường trung trực của *NP* .

Theo tính chất ba đường trung trực của tam giác, ta suy ra điểm *D* thuộc đường trung trực của

*NP* .

Vậy ba điểm

# Bài 8.

*M* , *D*, *H* thẳng hàng.

***A***

***N***

***M***

***B C***

Từ giả thiết, ta có: *AB*  *AC*, *NB*  *NC* .

 *AN*

là đường trung trực của *BC* hay

*A*, *N*, *M* thẳng hàng.

Xét *NBC* , theo tính chất ba đường trung trực trong tam giác ta có các đường trung trực của

*NB* và *NC* đồng quy với đường thẳng *AM* .

# Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường trung trực trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

**Bài 9.**

*A*

*B E F C*

Ta có *E* nằm trên đường trung trực của *AB* nên

*EAB*

cân ở *E*  *EAB*  *EBA* .

Tương tự *F* nằm trên đường trung trực của *AC* nên

*FAC*

cân ở *F*  *FAC*  *FCA*

Ta có *EAF*  *BAC*  *BAE*  *CAF*  *BAC*  *EBA*  *FCA*

# Bài 10.

 110  70  40

*A*

*H*

*K*

*D*

*E*

*B C*

1. Vì điểm *O* là giao điểm các đường trung trực của

*BC* .

*ABC*

nên *O* thuộc đường trung trực của

*ABC*

cân tại *A*

 *AB*  *AC*  *A*

thuộc đường trung trực của *BC* .

Vậy *AO* là đường trung trực của *BC* .

1. Gọi *H* là trung điểm của *AB* , *K* là trung điểm của *AC* .

Xét

*HBD*

và *KCE*

có:

*BHD*  *CKE*  900

*BH*  *CK*

*ABC*  *ACB* ( *ABC*

cân tại *A* )

Do đó, *HBD*  *KCE*(*g*.*c*.*g*)

 *BD*  *CE* (2 cạnh tương ứng)

1. *HBD*  *KCE*  *HBD*  *KEC* (2 góc tương ứng)

mà *ODE*, *OED* lần lượt đối đỉnh với

*HBD*, *KEC*

 *ODE*  *OED*  *ODE*

# Bài 11.

cân tại *O* .

*B*

*M*

*A 1 C*

*2*

Giả sử *M* nằm trên cạnh *BC* của *ABC*

Vì *M* là giao điểm 3 đường trung trực của tam giác *ABC* nên *MA*  *MB*  *MC*

Xét

*ABM* có *MA*  *MB* nên

*ABM* là tam giác cân.

 *B*  *A*2

(1)

Xét

*ACM* có *MA*  *MC* nên

*ACM* là tam giác cân.

 *A*1  *C*

(2)

Trong

*ABC*

có *B*  *A*  *C*  180

 *B*  *A*1  *A*2  *C*  180

 *B*  *A*1  *A*2  *C*  180

Từ (1) (2) suy ra

2*A*1  2*A*2  180

 2.*A*1  *A*2   180

 *A*1  *A*2   90

 *A*  90

 *ABC* là tam giác vuông tại A.

# Bài 12.

*E*

*A*

*1 2*

*K*

*1*

*F*

*2*

*B I H C*

1. Ta có

*AI* //*EH*  *A*1  *E*

(đồng vị) và

*A*2  *F*1

(so le trong)

Mà *A*1  *A*2

(AI là tia phân giác của *BAC* ) nên

*E*  *F*1

 *EAF* là tam giác cân ở *A*

 *AE*  *AF*  điểm *A* thuộc đường trung trực của *EF*

 trung trực của đoạn thẳng *EF* đi qua đỉnh *A* của

1. Gọi đường trung trực của *EF* cắt *EF* tại *K* .

*ABC* .

Ta có

*AI* //*EH* mà *AK*  *EH*

 *AK*  *AI*

Vậy đường trung trực của đoạn thẳng *EF* vuông góc với *AI* .

1. *ABC* cố định nên đường phân giác *AI* cố định,

Mà *AK*  *AI* nên *AK* cũng cố định.

Suy ra khi điểm *H* chuyển động trên *IC* thì *AK* luôn cố định hay đường trung trực của *EF*

luôn cố định.

# Bài 13.



+ Xét

*AKH*

và *BKC*1 là hai tam giác vuông có:

*AK*  *KB* , *KH*  *KC*1

 *AKH*  *BKC*1 (hai cạnh góc vuông)

 *AH*  *BC*1

(1) và

*A*1  *B*1

Vì *A*1  *B*1

và ở vị trí so le trong  *AH* //*BC*1

(2)

+ Xét

*AIH* và *CIB*1 là hai tam giác vuông có:

*HI*  *IB* , *AI*  *IC*

 *AIH*

 *CIB*1

(hai cạnh góc vuông)

 *AH*  *CB*1

(3) và

*A*2  *C*1

Vì *A*2  *C*1

và ở vị trí so le trong  *AH* //*CB*1

(4)

Từ (1) và (3) 

*BC*1 //*CB*1

( //*AH* )

Từ (2) và (4) 

*BC*1=*CB*1 (  *AH* )

+ Chứng minh tương tự ta có

*AC*1 // *CA*1 và *AC*1 = *CA*1 ;

*BA*1 // *AB*1 và

*BA*1 = *AB*1

Mà *H* là giao điểm ba đường trung trực của

*ABC*

nên *AH*  *BH*  *CH*

Do đó b)

*BC*1  *CB*1  *AC*1  *CA*1  *AB*1  *BA*1



Kẻ Xét

*BB*1 , *AA*1

*BCB*1 và

*B*1*C*1*B*

có:

*B*1*C* = *C*1*B* (chứng minh trên)

*BB*1*C*  *B*1*BC*1 (2 góc so le trong của

*BB*1 là cạnh chung

*B*1*C* //*C*1*B* )

 *BCB*1  *B*1*C*1*B* (c.g.c)  *BC* = *C*1*B*1

Chứng minh tương tự ta được

*A*1*B*1  *AB* ,

*A*1*C*1  *AC*

Xét

*A*1*B*1*C*1 và

*ABC*

có:

*C*1*B*1  *BC* ,

*A*1*B*1  *AB* ,

*A*1*C*1  *AC*

 *A*1*B*1*C*1

 *ABC*

(c.c.c)

# BA ĐƯỜNG CAO

**Dạng 1. Xác định trực tâm của một tam giác Bài 14.**

*A*

*M*

*N*

*H*

*B K C*

\*) Các đường cao của

*BHC* là:

*HK*, *BN*,*CM* cắt nhau tại *A* .Vậy trực tâm của

*BHC*

là *A* .

\*) Các đường cao của

\*) Các đường cao của

# Bài 15.

*AHC* là:

*AHB* là:

*HM* , *AN*,*CK* cắt nhau tại *B* . Vậy trực tâm của

*HM* , *AM* , *BK* cắt nhau tại *C* . Vậy trực tâm của

*AHC*

*AHB*

là *B* . là *C* .



Ta có *EM* là đường trung tuyến trong

*EBC*

vuông ở *E* , do đó

*EM*  1 *BC*

2

1 .

Tương tự ta có *ED* là đường trung tuyến trong

*DBC*

vuông ở *D* , do đó

*DM*  1 *BC*

2

2 .

Từ (1), (2) suy ra *ME*  *MD* , do đó *M* nằm trên đường trung trực của *ED* .

# Bài 16.

*A B*

*x*

*D*

*E*

*C*

*M*

1. Do tia *AC* cắt *BD* tại *E* nên hai điểm *C* và *D* nằm cùng phía với *AB*.

Do *MA*  *MC*

vuông cân tại

và *AMC*  90 nên tam giác *AMC* vuông cân tại

*M* .

*M* . Tương tự ta có

*BMD*

Từ đó suy ra *EDC*  *DCE*  45  *CED*  90  *AC*  *BD*.

1. Trong tam giác *ABD* , hai đường cao *AE* và *DM* cắt nhau nên *C* là trực tâm của tam giác

*ABD*

# Dạng 2. Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba đường thẳng đồng quy

**Bài 17.**

*L*

*M P N*

*Q*

*S*

Vì *MQ*  *LN* , *LN*  *MN*  *S* là trực tâm của

# Bài 18.

*LMN*  *NS*  *ML*

*M*

*K*

*Q*

*P N*

*S*

Xét *MPN* cân tại *M* có *MS* là đường phân giác (gt)  *MS*  *PN*

Lại có *PQ*  *MN*

 *K* là trực tâm của *MPN*

 *NK*  *MP* .

# Bài 19.

*B*

*D*

*H*

*K*

Ta có:

*A C*

 *AB*  *AC* (*gt*)

*DK* // AB (gt)



 *DK*  *AC* (quan hệ từ vuông góc đến song song) Lại có: *CH*  *AD* và *DK* giao *CH* tại *K*

 *K* là trực tâm của *ADC*  *AK*  *CD*

# Bài 20.

*S*

*R*

*M*

*Q*

*P N*

a) Gọi *RN* giao *PQ* tại *S*

Ta có:

*MQ*  *MP* (*gt*)  *MPQ*

cân tại *M*

Có 0

1800  900 0

*NMP* 90

 *SPR*   45

2

1800  *RMN* 1800  900 0

Tương tự:

*SRP*    45 2 2

Lại có:

*RSP*  *SRP*  *SPR*  1800

( định lí tổng ba góc trong tam giác)

 *RSP*  1800  *SRP*  *SPR*  900

 *PQ*  *NR* .

a) Xét

*PRN*

có: *NM*  *RP* (*gt*) và *PS*  *RN* (*cmt*)

mà *NM* giao *PS* tại *Q*

 *Q* là trực tâm của *PRN*

 *RQ*  *NP* .

# Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường cao trong tam giác để giải quyết các bài toán khác Bài 21.

*M*

*Q*

*R*

*S*

*N H P*

1. Xét

*MNP*

có:

*PR*  *MN* (*gt*) ,

*NQ*  *MP* (*gt*)

 *S* là trực tâm của

 *MS*  *NP* .

*MNP*

1. Gọi *MS* giao *NP* tại *H*

 *MH*  *NP*  *NMH* vuông tại *H*

 *SMR*  *MNH*  900

 *SMR*  900  *MNH*  900  650  250 .

# Bài 22.

***A K***

***M H***

1. Ta có:

 *BAD*

***C***

***B D***

*BA*  *BD* (*gt*)

cân tại *B*

Lại có: *BM* là đường phân giác (gt)

 *BM*  *AD* .

1. Xét

*AMD* có:

*BM*  *AD*

 *AK*  *MD*



*DH*  *AM*



 Ba đường thẳng

 Ba đường thẳng

*AK*, *BM* , *DH* là ba đường cao của

*AK*, *BM* , *DH* đồng quy.

*AMD*

# PHIẾU BÀI TẬP

**BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC**

# Dạng 1. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

**Bài 1.** Chọn đáp án đúng. Điểm cách đều 3 đỉnh của tam giác là giao điểm của:

1. 3 đường trung tuyến.
2. 3 đường phân giác.
3. 3 đường trung trực.
4. 3 đường cao.

**Bài 2.** Chọn đáp án đúng.

1. Cho

*ABC*

tù, giao điểm 3 đường trung trực của tam giác nằm:

1. trong
2. ngoài

*ABC* .

*ABC* .

1. trên 1 cạnh của *ABC* .
2. trùng với 1 đỉnh của *ABC* .
3. Cho

*ABC* có

*A*  90 thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác:

1. nằm trong
2. nằm ngoài

*ABC*

*ABC*

1. là trung điểm của cạnh *BC*
2. trùng với đỉnh *A* của *ABC*
3. Cho

*ABC*

nhọn, giao điểm 3 đường trung trực của tam giác nằm:

1. trong
2. ngoài

*ABC*

*ABC*

1. trên một cạnh của *ABC*
2. trùng với một đỉnh của *ABC*

**Bài 3.** Cho *ΔABC* . Vẽ điểm *O* cách đều ba đỉnh *A*, *B*, *C* và vẽ đường tròn đi qua 3 đỉnh của tam giác trong mỗi trường hợp sau:

1. *ΔABC* là tam giác nhọn.
2. *ΔABC* vuông tại *A* .
3. *ΔABC* là tam giác tù.

**Bài 4.** Cho đó.

*A*, *B*, *C* là ba điểm phân biệt không thẳng hàng. Xác định đường tròn đi qua ba điểm

**Bài 5.** Cho

*ABC* có

*A*  90 . Các đường trung trực của *AB* và của *AC* cắt nhau ở *O* và cắt

*BC* theo thứ tự ở *D* và *E* . Nối

*AD*, *AE*,*OB*,*OC* . Tìm tam giác bằng

*OAD* , bằng

*OAE*.

**Bài 6.** Cho

*ABC*

vuông tại *A* , đường cao *AH* . Tia phân giác của các góc *BAH* và *CAH* cắt

*BC* lần lượt ở *D* và *E* . Gọi *O* là giao điểm các đường phân giác của tam giác *ABC* .

1. Chứng minh rằng đường tròn tâm *O* , bán kính *OA* đi qua ba điểm
2. Tính số đo góc *DOE* .

*A*, *D*, *E* .

**Bài 7.** Tam giác *ABC* có *A* là góc tù. Các đường trung trực của các cạnh *AB* và *AC* cắt nhau ở *O*. Các điểm *B* và *C* có thuộc đường tròn tâm *O* bán kính *OA* hay không? Vì sao?

**Bài 8.** Cho

*ABC*

có ba góc nhọn, *O* là giao điểm hai đường trung trực của *AB* và *AC* . Trên

tia đối của tia *OB* lấy điểm *D* sao cho *OB*  *OD* .

1. Chứng minh *O* thuộc đường trung trực của *AD* và *CD* .
2. Chứng minh các

*ABD* ,

*CBD* vuông.

1. Biết *ABC*  70 . Hãy tính số đo *ADC* .

**Bài 9.** Tam giác *ABC* có ba đường trung tuyến cắt nhau tại *O* . Biết rằng điểm *O* cũng là giao điểm của ba đường trung trực trong tam giác *ABC* . Chứng minh tam giác *ABC* đều.

**Bài 10.** Cho

*ABC*

đều. Trên cạnh

*AB*, *BC*,*CA* lấy theo thứ tự ba điểm

*M* , *N*, *P* sao cho

*AM*  *BN*  *CP*

1. Chứng minh

*MNP*

là tam giác đều

1. Gọi *O* là giao điểm các đường trung trực của *ABC* .

Chứng minh rằng điểm *O* cũng là giao điểm các đường trung trực của *MNP*

**Bài 11.** Trong một buổi tổng vệ sinh sân trường, 3 tổ cần dọn cỏ và rác của 3 bồn cây *A*, *B*, *C*

ở 3 góc sân trường. Em hãy giúp 3 tổ chọn một vị trí *O* để đặt chiếc xe đẩy rác sao cho vị trí chiếc xe cách đều 3 bồn cây đó.

# Dạng 2. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng

**Bài 1.** Cho

*ABC*

cân tại *A* . Dựng tam giác *BCD* cân tại *D* biết *D* khác phía với *A* đối với

đường đường thẳng *BC* . Gọi O là giao điểm của *AB* và *AC* . Chứng minh rằng hàng.

*A*,*O*, *D* thẳng

**Bài 2.** Cho

*ABC*

cân tại *A* . Gọi *M* là trung điểm của *BC* . Các đường trung trực của *AB* và

*AC* cắt nhau ở *E* . Chứng minh ba điểm

*A*, *E*, *M* thẳng hàng.

**Bài 3.** Cho tam giác *ABC* cân tại *A* . Gọi *G* là trọng tâm, *O* là giao điểm ba đường trung trực của tam giác *ABC* .

1. Tam giác *BOC* là tam giác gì?
2. Chứng minh ba điểm *A*,*O*,*G* thẳng hàng?

**Bài 4.** Cho tam giác *ABC* cân ở *A* . Gọi *M* là trung điểm của *BC* . Các đường trung trực của

*AB*, *AC* cắt nhau ở *E* . Chứng minh ba điểm *A*, *E*, *M* thẳng hàng.

**Bài 5.** Cho tam giác *ABC* cân tại *A* . Lấy điểm *D* sao cho tam giác *BCD* cân tại *D* ( *D* và *A* nằm khác phía đối với đường thẳng *BC* ). Chứng minh các đường trung trực của *AB* và *AC* đồng quy với đường thẳng *AD*

**Bài 6.** Cho *ABC* vuông ở *A* , *D* là giao điểm hai đường trung trực của hai cạnh *AB* và *AC* .

Chứng minh *B*, *D*,*C* thẳng hàng.

**Bài 7.** Cho tam giác *ABC* cân tại *A* . *M* là trung điểm của *BC* . Kẻ *ME* vuông góc *AB* tại

*E*, *MF* vuông góc với *AC* tại *F* .

1. Chứng minh rằng *AM* là đường trung trực của *EF* ?
2. Kẻ đường thẳng *d* vuông góc *AB* tại *B* , kẻ đường thẳng *d* / vuông góc với *AC* tại *C* , hai

đường thẳng *d* và *d* /

giao nhau giao tại *D* . Chứng minh rằng ba điểm

*A*, *M* , *D* thẳng hàng?

**Bài 8.** Cho tam giác nhọn *ABC* . Gọi *H* ,*G*,*O* theo thứ tự là trực tâm, trọng tâm, giao điểm ba

đường trung trực của tam giác. Tia *AG* cắt *BC* ở *M* . Gọi *I* là trung điểm của điểm của *GH* . Chứng minh:

1. *OM*  1 *AH*

2

*GA*, *K* là trung

1. *IGK*  *MGO*
2. Ba điểm *H* ,*G*,*O* thẳng hàng
3. *GH*  2*GO*

**Bài 9.** Cho tam giác *ABC* cân ở *A* , đường phân giác *AK* . Các đường trung trực của *AB* và

*AC* cắt nhau tại *O* . Kéo dài *CO* cắt *AB* ở *D* , kéo dài *BO* cắt *AC* ở *E* .

1. Chứng minh ba điểm *A*, *K* ,*O* thẳng hàng.
2. Chúng minh *AK* và các đường trung trực của *AD* và *AE* đồng quy.

# Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường trung trực trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

**Bài 1.** Cho

*ABC*

cân tại *A* , đường trung tuyến *AM* . Đường trung trực của *AC* cắt đường

thẳng *AM* tại *D* . Chứng minh rằng *DA*  *DB* .

**Bài 2.** Cho tam giác cân *ABC* có *AB*  *AC* . Hai đường trung trực của hai cạnh nhau tại *O* . Chứng minh: *AOB*  *AOC* .

*AB*; *AC* cắt

**Bài 3.** Cho

*ABC* , *M* là trung điểm của

*BC*. Các đường trung trực của *AB* và *AC* cắt nhau

tại *O*. Tính số đo góc *OMB*.

**Bài 4.** Cho

*ABC*

có góc

*A*  110. Đường trung trực của các cạnh *AB* và *AC* cắt nhau tại *I*.

1. Chứng minh

*BIC*

cân.

1. Chứng minh

*BIC*  2180 *BAC* và tính số đo góc

*BIC*.

**Bài 5.** Cho

*ABC* có

*A*ˆ  60 . Các đường trung trực của cạnh *AB* và *AC* lần lượt cắt *BC* ở *E*

và *F* . Tính *EAF* .

**Bài 6.** Cho

*ABC*

cân tại *A* . Đường trung tuyến *AM* cắt đường trung trực của *AC* tại *K* .

Chứng minh rằng *KA*  *KB*  *KC*.

**Bài 7.** Cho

*ABC*

cân tại *A* ,

*A*  900 . Các đường trung trực của *AB* và của *AC* cắt nhau tại *O*

và cắt *BC* tại *D* và *E* . Chứng minh rằng:

1. *OA* là đường trung trực của *BC* .
2. *BC*  *CE* .
3. *ODE* là tam giác cân.

**Bài 8.** Chứng minh rằng các đường trung trực của tam giác vuông cắt nhau tại trung điểm của cạnh huyền.

**Bài 9.** Cho tam giác đều *ABC* . Gọi *D* và *E* là hai điểm lần lượt trên hai cạnh *AB* và *AC* sao cho *BD*  *AE* . Chứng minh rằng các đường trung trực của đoạn thẳng *DE* luôn đi qua một điểm cố định khi *D* và *E* di chuyển trên các cạnh *AB* và *AC* .

**Bài 10.** Cho *ABC* , *AC*  *AB* . Hai điểm *D* và *E* theo thứ tự di chuyển trên các cạnh *AB* và

*AC* sao cho *BD*  *CE* . Chứng minh rằng các đường trung trực của *DE* luôn đi qua một điểm cố định.

# BA ĐƯỜNG CAO

**Dạng 1. Xác định trực tâm của một tam giác**

**Bài 1.** Cho

*ABC* có

*ABC*  90 , *AH*  *BC* . Em chọn phát biểu đúng:

1. *H* là trực tâm của
2. *A* là trực tâm của
3. *B* là trực tâm của
4. *C* là trực tâm của

*ABC*

*ABC*

*ABC*

*ABC*

**Bài 2.** Cho *ABC* , hai đường cao *AM* và *BN* cắt nhau tại *H* . Em chọn phát biểu đúng:

1. *H* là trọng tâm của *ABC* .
2. *HA*  2 *AM*

3

và *HB*  2 *BN*

3

1. *H* là trực tâm của

*ABC* ; *CH* là đường cao của

*ABC* .

1. *CH* là đường trung trực của *ABC* .

**Bài 3.** Cho

*ABC*

cân tại *A* có *AM*  *BC*

tại *M* . Chọn phát biểu đúng:

1. *AM* là đường trung tuyến của *ABC*
2. *AM* là đường trung trực của *BC* .
3. *AM* là đường phân giác của *BAC* .
4. Cả A, B, C đều đúng.

**Bài 4.** Cho

*D* . Khi đó

*ABC*

vuông tại *A* . Lấy *H* thuộc *AB* , vẽ *HE*  *BC* ở *E* . Tia *EH* cắt tia *CA* tại

1. *H* là trọng tâm của *BCD* .
2. *H* là trực tâm của *BCD* .
3. *H* là giao ba đường trung trực của
4. *H* là giao ba đường phân giác của

*BCD* .

*BCD* .

**Bài 5.** Cho tam giác

*AHB*, *AHC* .

*ABC*

vuông tại

*A*, đường cao *AH* . Tìm trực tâm của các giác

*ABC*,

**Bài 6.** Cho *H* là trực tâm của tam giác *ABC* không vuông. Tìm trực tâm của các tam giác

*HBC*, *HAB*, *HAC*

**Bài 7.** Cho

*ABC* có

*A*  700 , *AB*  *AC* , đường phân giác góc *A* cắt *BC* tại *D* , *BF*  *AC*

tại

*F* , *H* là giao điểm của *BF* và *AD* , *E* thuộc *AC* sao cho *AE*  *AB* .

1. Xác định trực tâm của
2. Tính số đo *DHF* .

*ABE* .

# Dạng 2. Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba đường thẳng đồng quy

**Bài 1.** Cho

*ABC*

cân tại *A* , đường cao *BE* cắt đường trung tuyến *AD* ở *H* . Chứng minh *CH*

tạo với *AB* một góc 90.

**Bài 2.** Cho tam giác

*ABC*

cân tại *A* . đường cao *CH* cắt tia phân giác của góc *A* tại *D* .

Chứng minh rằng *BD*  *AC* .

**Bài 3.** Cho

*MNP*

vuông tại *M* . Trên cạnh *MN* lấy điểm *Q* , kẻ *QR*  *NP*  *R* *NP* . Gọi *O* là

giao điểm của các đường thẳng *PM* và *RQ* . Chứng minh *PQ*  *ON* .

**Bài 4.** Cho tam giác *ABC* cân tại *A* . Lấy điểm *D* sao cho *A* là trung điểm của

*BD*. Kẻ đường

cao *AE* của tam giác *ABC* , đường cao *AF* của tam giác *ACD* . Chứng minh rằng *AE*  *AF*.

**Bài 5.** Cho tam giác *MNP* có ba góc nhọn, các đường cao

1. Chứng minh *MS*  *NP* .
2. Cho *MNP* = 65°. Tính *SMR* .

*NQ*, *PR* cắt nhau tại *S* .

**Bài 6.** Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* , kẻ đường cao *AH* . Lấy điểm *K* thuộc đoạn thẳng

*HC* . Qua *K* kẻ đường thẳng song song với *AB* , cắt *AH* tại *D* . Chứng minh *AK*  *CD* .

**Bài 7.** Cho tam giác *ABC* vuông cân tại

*B*. Trên cạnh *AB* lấy điểm

*H*.Trên tia đối của tia *BC*

lấy điểm *D* sao cho *BH*  *BD* . Chứng minh

a) *DH*  *AC*. b) *CH*  *AD*.

**Bài 8.** Cho tam giác *MNP* vuông tại *M* *MP*  *MN*  . Trên cạnh *MN* lấy điểm *Q* sao cho

*MQ*  *MP* , trên tia đối của tia *MP* lấy điểm *R* sao cho *MR*  *MN* . Chứng minh:

1. *PQ*  *NR* .
2. *RQ*  *NP* .

**Bài 9.** Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* , kẻ đường phân giác *BM* . Trên cạnh *BC* lấy điểm *D*

sao cho *BD*  *BA* .

1. Chứng minh *BM*  *AD* .
2. Gọi H là hình chiếu vuông góc của *D* trên *AC*, *K* là hình chiếu vuông góc của *A* trên *DM* .

Chứng minh ba đường thẳng *AK*, *BM* , *DH* đồng quy.

**Bài 10.** Đoạn thẳng *AB* và điểm *M* nằm giữa *A* và *B* (*MA*  *MB*). Vẽ tia đó lấy hai điểm *C* và

*D* sao cho

1. *AE*  *BD*

*MA*  *MC* , *MD*  *MB*. Tia *AC* vuông cắt *BD* tại *E* . Chứng minh:

1. *C* là trực tâm của tam giác *ABD*

**Bài 11.** Cho góc nhọn *xOy* . Trên tia *Ox* lấy điểm *A* , trên tia *Oy* lấy điểm *B* sao cho

*OA*  *OB*. Kẻ *AC*  *Oy*, *BD*  *Ox* (*C* *Ox*, *D* *Oy*) . Đường thẳng vuông góc với *Ox* tại *A* và

đường thẳng vuông góc với *Oy* tại *B* cắt nhau tại *M* . Chứng minh: *OM* , *AC*, *BD* đồng quy.

**Bài 12.** Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* có *BD* là đường phân giác. Trên cạnh *BC* lấy điểm *E*

sao cho

*BA*  *BE*. Vẽ *CH*  *DB*. Chứng minh rằng

*BA*, *DE*,*CH* đồng quy.

# Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường cao trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

**Bài 1.** Cho

*ABC*

đều. Ba đường cao

*AM* , *BN*,*CP* cắt nhau tại *O* . Chứng minh rằng:

1. *OA*  *OB*  *OC* .
2. *O* là trọng tâm của
3. *AM*  *BN*  *CP*

*ABC*

**Bài 2.** Chứng minh rằng một tam giác có hai đường cao (xuất phát từ các đỉnh của hai góc nhọn) bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

**Bài 3.** Chứng minh rằng một tam giác có ba đường cao bằng nhau thì tam giác đó là tam giác đều.

**Bài 4.** Cho

*ABC*

vuông tại *A* , kẻ đường cao *AH* và trung tuyến *AM* . Chứng minh trực tâm

của

*ABC* , *MAB*

và *MAC*

thẳng hàng.

**Bài 5.** Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* . Đường cao

*AH*. Lấy *I* là trung điểm của

*AC*.

1. Chứng minh *I* là giao điểm của 3 đường trung trực *AHC*
2. Gọi *K* và *D* lần lượt là trung điểm của *AH* và
3. Chứng minh *BK*  *AD* .

*HC*. Chứng minh

*KD* // *AC* .

**Bài 6.** Cho tam *ABC* cân tại

*A*, hai đường cao *BD* và *CE* cắt nhau tại

*I* (*D* 

*AC*, *E*  *AB*) . Tia

*AI* cắt *BC* tại *M* . Chứng minh

1. *M* là trung điểm của

*BC*.

1. Tam giác *MED* là tam giác cân.

**Bài 7.** Cho tam giác *ABC* cân tại *A*,

đường trung tuyến *AM* và đường phân giác *BD* cắt nhau

tại

*K*. Gọi *E* là giao điểm của *CK* và

*AB*. Chứng minh

*BD*  *CE*.

**Bài 8.** Cho tam giác

*ABC*. Hai đường cao

*AH* , *BK* cắt nhau tại *I*.

1. Chứng minh rằng *CI*  *AB*.
2. Khi

*ACH*  50, hãy tính các góc

*BIH* , *HIK*.

**Bài 9.** Cho tam giác *ABC* cân tại *A*. Hai đường cao xuất phát từ đỉnh *B* và đỉnh *C* cắt nhau tại

*M* . Biết góc

*BMC*  120, tính các góc của tam giác

*ABC*.

**Bài 10.** Cho tam giác *ABC* cân tại

*A*, *M* là trung điểm của

*B*,*C*. Gọi *H* và *K* lần lượt là chân

các đường vuông góc kẻ từ *M* đến *AB* và

# Phần III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

*AC*. Chứng minh

*MH*  *MK*.

**BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC**

**Dạng 1. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác**

**Bài 1.** Cho  *ABC* cân tại *A* , đường trung tuyến *AM* . Đường trung trực của *AB* cắt *AM* ở *O*

. Chứng minh rằng điểm *O* cách đều ba đỉnh của *ABC*

**Bài 2.** Cho  *ABC* cân tại *A* , *O* là giao điểm của ba đường trung trực. Lấy điểm *D* trên cạnh

*AB* , điểm *E* trên cạnh sao cho *AD*  *CE* . Chứng minh rằng

1. *OA*  *OB*  *OC* .
2. Điểm *O* nằm trên đường trung trực của *DE* .

**Bài 3.** Nhà bạn Nam có một mảnh vườn nhỏ trồng hoa và cỏ nhật. Bố của bạn Nam nhờ Nam chọn vị trí để đặt vòi xoay phun tưới cây tự động sao cho vị trí đó cách đều ba khóm hoa ở ba góc vườn nhưng Nam lại chưa biết tìm như thế nào. Các em hãy giúp bạn Nam giải quyết vấn đề này nhé.

**Bài 4.** Ông Hùng có ba cửa hàng *A*, *B*, *C* không nằm trên một đường thẳng và đang muốn tìm

địa điểm *O* để làm kho hàng. Phải chọn vị trí của kho hàng ở đâu để khoảng cách từ kho đến các cửa hàng bằng nhau?

# Dạng 2. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng

**Bài 5.** Cho tam giác *ABC* cân ở

*AC* cắt nhau tại *O*.

*A*, đường phân giác

*AK*.

Các đường trung trực của *AB* và

1. Chứng minh rằng ba điểm *A*, *K*, *O* thẳng hàng.
2. Kéo dài *CO* cắt *AB* ở

*D*, kéo dài *BO* cắt *AC* ở

*E*. Chứng minh rằng *AK* và các đường

trung trực của *AD* và *AE* đồng quy.

**Bài 6.** Cho

*xOy*  90

và điểm *P* nằm trong góc đó. Trên mặt phẳng đó lấy điểm *A* sao cho

*Ox* là đường trung trực của đoạn thẳng *PA* và điểm *B* sao cho *Oy* là đường trung trực của đoạn thẳng *PB* .

1. Chứng minh ba điểm *O*, *A*, *B* thẳng hàng.
2. Chứng minh *O* là giao điểm của ba đường trung trực của

*ABP*

từ đó suy ra

*ABP*

vuông.

**Bài 7.** Cho tam giác *MNP* cân ở *M* , đường cao *MH* . Các đường trung trực của *MN* và *MP*

cắt nhau ở *D* . Chứng minh ba điểm *M* , *D*, *H* thẳng hàng.

**Bài 8.** Cho tam giác *ABC* cân có *A* là góc tù. Gọi *M* là trung điểm của *BC* . *N* nằm trong tam giác *ABC* sao cho tam giác *BNC* cân tại *N* . Chứng minh đường thẳng *AM* và các đường

trung trực của *NB*, *NC* đồng quy.

# Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường trung trực trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

**Bài 9.** Cho

*ABC* có

*A*ˆ 110 . Các đường trung trực của cạnh *AB* và *AC* lần lượt cắt *BC* ở

*E* và *F* . Tính *EAF* .

**Bài 10.** Cho

*ABC*

cân tại *A* ,

*A*  900 . Các đường trung trực của *AB* và của *AC* cắt nhau tại

*O* và cắt *BC* tại *D* và *E* . Chứng minh rằng:

1. *OA* là đường trung trực của *BC* .
2. *BD*  *CE* .
3. *ODE* là tam giác cân.

**Bài 11.** Cho *M* là giao điểm 3 đường trung trực của tam giác *ABC* . Chứng minh rằng nếu

*M* nằm trên một cạnh của tam giác *ABC* thì *ABC* là một tam giác vuông.

**Bài 12.** Cho

*ABC* , đường phân giác

*AI*  *I*  *BC*  . Trên đoạn thẳng *IC* lấy điểm *H* , từ *H* kẻ

đường thẳng song song với *AI* cắt *AB* kéo dài tại *E* và cắt *AC* tại *F* . Chứng minh rằng:

1. Đường trung trực của đoạn thẳng *EF* đi qua đỉnh *A* của
2. Đường trung trực của đoạn thẳng *EF* vuông góc với *AI* .

*ABC* .

1. Khi *H* di động trên tia *IC* của định.

*ABC*

cố định thì đường trung trực của đoạn thẳng *EF* cố

**Bài 13.** Cho

*ABC*

có ba góc nhọn. Các điểm

*F*, *K* , *I* lần lượt là trung điểm các cạnh

*BC*, *BA*, *AC* . Gọi *H* là giao điểm các đường trung trực *ABC* . Trên tia đối của tỉa *FH* lấy

điểm

*A*1 sao cho

*A*1*F*  *FH* . Trên tia đối của tia *KH* lấy điểm *C*1

sao cho

*KH*  *KC*1. Trên tia

đối của tia *IH* lấy điểm

*B*1 sao cho

*IH*  *IB*1 .

1. Chứng minh rằng hình lục giác một song song.

*AC*1*BA*1*CB*1 có 6 cạnh bằng nhau và 2 trong 6 cạnh đó đôi

1. Chứng minh rằng:

*ABC*

= *A*1*B*1*C*1

**BA ĐƯỜNG CAO**

**Dạng 1. Xác định trực tâm của một tam giác**

**Bài 14.** Cho

*ABC* , các đường cao

*AK*, *BN*,*CM* . Điểm *H* là trực tâm của tam giác. Tìm trực

tâm của

*BHC* ,

*AHC* ,

*AHB* .

**Bài 15.** Cho tam giác *ABC* , hai đường cao *BD* và *CE* . Gọi *M* là trung điểm của minh *M* thuộc trung trực của *DE* .

*BC*. Chứng

**Bài 16.** Đoạn thẳng *AB* và điểm *M* nằm giữa *A* và *B* (*MA*  *MB*). Vẽ tia Mx vuông AB lấy

hai điểm *C* và *D* sao cho

1. *AE*  *BD*

*MA*  *MC* , *MD*  *MB*. Tia *AC* vuông cắt *BD* tại *E* . Chứng minh

1. *C* là trực tâm của tam giác *ABD* .

# Dạng 2. Sử dụng tính chất trực tâm của tam giác để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ba đường thẳng đồng quy

**Bài 17.** Cho tam giác *LMN* nhọn và điểm *S* nằm trong tam giác. Gọi *LS* cắt *MN* tại *P* , *MS* cắt *LN* tại *Q* . Chứng minh rằng nếu *LP* vuông góc với *MN* và *MQ* vuông góc với *LN* thì *NS* vuông góc với *ML* .

**Bài 18.** Cho

*NK*  *MP*

**Bài 19.** Cho

*MNP*

*ABC*

cân tại *M* , đường cao *PQ* cắt đường phân giác *MS* ở *K* . Chứng minh

vuông tại *A* , kẻ đường cao *AH* . Lấy điểm *K* thuộc đoạn thẳng *HC* . Qua

*K* kẻ đường thẳng song song với *AB* , cắt *AH* tại *D* . Chứng minh *AK*  *CD* .

**Bài 20.** Cho

*MNP*

vuông tại

*M* *MP*  *MN*  . Trên cạnh *MN* lấy điểm *Q* sao cho *MQ*  *MP* ,

trên tia đối của tia *MP* lấy điểm *R* sao cho *MR*  *MN* . Chứng minh:

1. *PQ*  *NR* .
2. *RQ*  *NP* .

# Dạng 3. Vận dụng tính chất ba đường cao trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

**Bài 21.** Cho

*MNP* có ba góc nhọn, các đường cao

*NQ*, *PR* cắt nhau tại S.

1. Chứng minh *MS*  *NP* .
2. Cho *MNP*  650 . Tính *SMR* .

**Bài 22.** Cho

*BD*  *BA* .

*ABC*

vuông tại *A* , kẻ đường phân giác *BM* . Trên cạnh *BC* lấy điểm *D* sao cho

1. Chứng minh *BM*  *AD* .
2. Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *D* trên *AC* , *K* là hình chiếu vuông góc của *A* trên *DM*

. Chứng minh ba đường thẳng *AK*, *BM* , *DH* đồng quy.