

Câu 1. (3,0 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 + x + y = \sqrt{y-1} - \sqrt{x} \\ 2x^2 - 11y + 32 = 3\sqrt[3]{4y-8} \end{cases} (x, y \in \mathbb{R}).$

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 2023 \\ u_{n+1} = \frac{2022u_n^3 + 2022u_n}{2022u_n^2 - u_n + 2022}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{1+u_i^2}$.

Câu 3. (5,0 điểm)

Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định nằm trên đường tròn (O) sao cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Xét một điểm C trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC không cân tại C. Gọi (O_1) là đường tròn đi qua A và tiếp xúc với BC tại C; (O_2) là đường tròn đi qua B và tiếp xúc với AC tại C. Hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại điểm thứ hai là D (D khác C).

a) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C cắt đường thẳng OD tại S. Chứng minh OA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADS.

b) Chứng minh đường thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định khi điểm C di động trên đường tròn (O) (tam giác ABC không cân tại C).

Câu 4. (2,0 điểm)

a) Cho k là số nguyên lớn hơn 1. Chứng minh $2^{k-1} + 1$ không chia hết cho k .

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố p và q thỏa mãn $2^p + 2^q$ chia hết cho $p \cdot q$.

Câu 5. (3,0 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$xf(y) - yf(x) = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ và } x \neq 0.$$

Câu 6. (2,0 điểm) Cho tập hợp X có 2023 phần tử. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn hai tập hợp con khác nhau của X sao cho giao của hai tập hợp này là một tập hợp có đúng một phần tử?

Câu 7. (3,0 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $y^2 \geq zx, z^2 \geq xy$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{z}{z+y} + \frac{y}{y+x} + \frac{2022z^{2023}}{z^{2023} + x^{2023}}$.

----- HẾT -----

* Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay; cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

* Họ và tên thí sinh: Số báo danh: