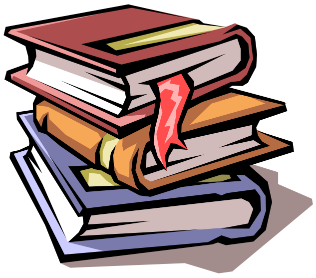
Tailieumontoan.com

Tài liệu sưu tầm



CHUYÊN ĐỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH
BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

Tài liệu sưu tầm, ngày 24 tháng 8 năm 2020

CHUYÊN ĐỀ: HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Hệ phương trình là một trong các vấn đề trọng tâm của chương trình đại số THCS. Các bài toán giải hệ phương trình cũng thường gặp trong các kỳ thi học sinh giỏi THCS và thi vào lớp 10 THPT, đặc biệt là các lớp chuyên. Các bài toán về hệ phương trình rất phong phú. Có nhiều cách phân loại hệ phương trình:

1) Phân loại theo số ẩn của hệ, theo số các phương trình hay phân loại theo bậc của hệ

2) Phân loại theo cấu trúc, đặc tính của hệ như hệ đối xứng loại 1, hệ đối xứng loại 2, hệ đẳng cấp,..

3) Phân loại theo phương pháp giải

Dưới đây liệt kê một số dạng hệ phương trình thường gặp

- Hệ bậc nhất hai ẩn: $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

Ta sử dụng phương pháp cộng đại số hoặc phương pháp thế để giải và biện luận hệ phương trình trên.

- Hệ đối xứng loại 1 hai ẩn: là hệ khi ta thay đổi vai trò của x và y thì mỗi phương trình không thay đổi: *Thông thường ta đặt* $S=x+y, P=xy$ *với* $S^2 \ge 4P$
- Hệ đối xứng loại 1 hai ẩn: là hệ khi ta thay đổi vai trò của x và y thì hệ không đổi: *Thông thường ta giải hệ bằng cách trừ từng vế*
- Hệ phương trình đẳng cấp: là hệ mà các số hạng của các phương trình có cùng bậc: *Thông thường ta kiểm tra* $y \ne 0$ *và đặt* $x=ky$.
- Hệ phương trình không mẫu mực: thông thường ta giải bằng cách nhận xét, đánh giá các vế của mỗi phương trình.

Trong chuyên đề này, chúng ta phân loại hệ phương trình theo cách thứ 3, tức là theo phương pháp giải. Tùy theo bà tập cụ thể ta giải bằng phương pháp thế, phương pháp cộng đại số, phương pháp đặt ẩn phụ hoặc phương pháp đánh giá.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN QUA CÁC VÍ DỤ

I. PHƯƠNG PHÁP THẾ

Tùy theo từng hệ phương trình ta có thể thay thế một hằng số, một ẩn hoặc một biểu thức của ẩn vào một phương trình của hệ

1. Thay một hằng số bởi một biểu thức

Trong rất nhiều bài toán giải hệ phương trình, ta có thể thay một hằng số bởi một biểu thức, từ đó ta dễ dàng giải được hệ đã cho. Dưới đây là các ví dụ

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \ (1) \\ x^3+3(y-x)=1 \ (2) \end{cases}$

(THPT Chuyên Ngoại Ngữ - Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2010 – 2011)

Hướng dẫn giải

Thay $3=x^2+xy+y^2$ vào (2) ta được:

$$x^3+(x^2+xy+y^2)(y-x)=1 \Leftrightarrow x^3+(y^3-x^3)=1 \Leftrightarrow y^3=1 \Leftrightarrow y=1$$

Thay $y=1$ vào (1) ta được: $x^3+x-2=0 \Rightarrow x=-2$ hoặc $x=1$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)\in\{(-2;1),(1;1)\}$

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+4y^2=5 \ (1) \\ (x+2y)(5+4xy)=27 \ (2) \end{cases}$

(THPT Chuyên Ngoại Ngữ - Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2011 – 2012)

Hướng dẫn giải

Thay $5=x^2+4y^2$ vào (2) ta được:

$$(x+2y)(x^2+4xy+4y^2)=27 \Leftrightarrow (x+2y)^3=27 \Leftrightarrow x+2y=3 \Rightarrow x=3-2y$$

Thay vào (1) ta được: $8y^2-12y+4=0 \Rightarrow y=1$ hoặc $y=\frac{1}{2}$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)\in\left\{(1;1),\left(2;\frac{1}{2}\right)\right\}$

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(x-3y)=-16 \ (1) \\ y^3+16=3xy^2 \ (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Thay (1) vào (2) ta được : $(y-x)^3 = 0 \Rightarrow x = y.$

Khi đó hệ có nghiệm $x = y = 2$.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3 + y^3 - xy^2 = 1 & (1) \\ 4x^4 + y^4 = 4x + y & (2) \end{cases}$

(*Vòng 2,THPT chuyên – Đại học Quốc gia Hà Nội , năm học 2005 – 2006)*

Hướng dẫn giải

Thay $1 = x^3 + y^3 - xy^2$ vào (2) ta được :

$4x^4 + y^4 = (4x + y)(x^3 + y^3 - xy^2) \Leftrightarrow xy(3y^2 - 4xy + x^2) = 0$

Nếu $x = 0$ thì $y = 1$. Nếu $y = 0$ thì $x = 1$.

Nếu $3y^2 - 4xy + x^2 = 0 \Leftrightarrow (3y - x)(y - x) = 0 \Leftrightarrow x = 3y$ hoặc $x = y.$

Khi đó hệ có nghiệm $x = \dfrac{3}{\sqrt[3]{25}}; y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$ hoặc x=y=1

Vậy hệ có nghiệm $(x;y) \in \left\{(0;1),(1;0),(1;1),\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{25}};\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}\right)\right\}.$

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^7 + y^7 = 1 & (1) \\ x^9 + y^9 = x^2 + y^2 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Thay (1) vào (2) ta được $x^9 + y^9 = (x^7 + y^7)(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2y^2(x^5 + y^5) = 0.$

Nếu $x = 0$ thì $y = 1$ .Nếu $y = 0$ thì $x = 1$.

Nếu $x^5 + y^5 = 0 \Rightarrow x = -y$, thay vào (1) ta được 0=1 (vô lí) .

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y) \in \{(0;1),(1;0)\}.$

Chú ý: *Từ bài toán trên ta dễ dàng giải được bài toán tổng quát hơn: Cho m,n là các số tự nhiên lẻ thỏa mãn m < n, giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^m + y^m = 1 \\ x^n + y^n = x^{n-m} + y^{n-m} \end{cases}$$

2. Thay một ẩn số bởi một biểu thức

Ta có thể rút một ẩn từ phương trình nào đó rồi thay vào các phương trình còn lại.Khi đó số ẩn của phương trình được giảm đi , từ đó ta có thể tìm được *nghiệm của hệ .*

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-2y=2 & (1) \\ x^2-y^2-3xy+x+4y-3=0 & (2) \end{cases}$

Từ (1) : $x=2y+2$, thay vào (2) ta được $3y^2-8y-3=0$.

Hệ đã cho có nghiệm $(x;y)\in\left\{(8;3),\left(\frac{4}{3};\frac{-1}{3}\right)\right\}$.

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+xy-y^2-5x+y+2=0 & (1) \\ x^2+y^2+x+y-4=0 & (2) \end{cases}$

(*Vòng 2,THPT chuyên – Đại học Quốc gia Hà Nội , năm học 2003 – 2004)*

Hướng dẫn giải

$(1)\Leftrightarrow 2x^2+(y-5)x-y^2+y+2=0$

$\Delta=9(y-1)^2$

Do đó: $x=\frac{5-y+3y-3}{4}=\frac{y+1}{2}$ hoặc x= 2 – y

Thay vào (2) ta được nghiệm của hệ là $(x;y)\in\left\{(1;1),\left(\frac{-4}{5};\frac{-13}{5}\right)\right\}$.

Chú ý:

- *Ta cũng có thể coi (1) là phương trình bậc hai ẩn y, từ đó ta tìm được ẩn y theo x*

- *Dùng phương pháp biến đổi tổng thành tích thì (1) tương đương với* $(2x-y-1)(x+y-2)=0$*, tuy nhiên nếu vế trái cồng kềnh thì phương pháp này gặp nhiều khó khăn .*

Ví dụ 8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-\frac{1}{x}=y-\frac{1}{y-1}-1 & (1) \\ 2y=x^3+3 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $x\neq 0$, $y\neq 1$.

Ta có: $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=y-1-\dfrac{1}{y-1} \\ 2(y-1)=x^3+1 \end{cases}$

Đặt t = y – 1, ta được: $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=t-\dfrac{1}{t} & (3) \\ 2t=x^3+1 & (4) \end{cases} \Rightarrow (x-t)\left(1+\dfrac{1}{xt}\right)=0.$

Nếu $x-t=0 \Leftrightarrow x=t$, thay vào (4) ta được $x^3-2x+1=0$

$\Rightarrow x=1$ hoặc $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Nếu $1+\dfrac{1}{xt}=0 \Rightarrow t=\dfrac{-1}{x}$, thay vào (4) ta được $x^4+x+2=0$ (5)

$\Leftrightarrow -x=x^4+2\ge 2 \Rightarrow x\le -2$

(5) $\Leftrightarrow x(x^3+1)+2=0$, do $x\le -2, x^3+1\le -7$ nên

$x(x^3+1)+2\ge 16$ nên (5) vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)\in\left\{(1;2),\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$

Ví dụ 9. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+z=12 & (1) \\ x(y+z)=20 & (2) \\ y(x+z)=32 & (3) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Từ (1) , (2) ta có: $\begin{cases} x=12-(y+z) \\ x=\dfrac{20}{y+z} \end{cases}$ (do $y+z\ne 0$)

$\Rightarrow 12-(y+z)=\dfrac{20}{y+z} \Rightarrow y+z=2$ hoặc $y+z=10$.

Nếu $y+z=2$ ta có $x=10$, do vậy $\begin{cases} y+z=2 \\ y(10+z)=32 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=4, z=-2 \\ y=8, z=-6 \end{array}\right.$

Nếu $y+z=10$ ta có $x=2$, do vậy $\begin{cases} y+z=10 \\ y(2+z)=32 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=8, z=2 \\ y=4, z=6 \end{array}\right.$

Vậy hệ có nghiệm $(x,y,z)\in\{(10;4;-2),(10;8;-6),(2;8;2),(2;4;6)\}$

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} xz = x + 4 & (1) \\ 2y^2 = 7xz - 3x - 14 & (2) \\ x^2 + y^2 = 35 - z^2 & (3) \end{cases}$

(Vòng 1,Khối THPT Chuyên – Đại học Sư phạm Hà Nội , năm học 2006 – 2007)

Hướng dẫn giải

Từ (1) ta có: $x = xz - 4$, thay vào (2) ta được:

$2y^2 = 7xz - 3(xz - 4) - 14 \Leftrightarrow y^2 = 2xz - 1$ thay vào (3) ta có

$x^2 + z^2 = 36 - 2xz \Leftrightarrow (x + z)^2 = 36 \Leftrightarrow x + z = \pm 6.$

Nếu $x + z = 6 \Leftrightarrow z = 6 - x$ thay vào (1) ta có $x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1; x = 4.$

Nếu $x + z = -6 \Rightarrow z = -6 - x$ thay vào (1) ta có $x^2 + 7x + 4 = 0$

Vậy $(x;y;z) \in \left\{ \begin{array}{l} (1;-3;5),(1;3;5),(4;\sqrt{15};2),(4;-\sqrt{15};2), \\ \left(\dfrac{-7+\sqrt{33}}{2};\sqrt[4]{33};\dfrac{-5-\sqrt{33}}{2}\right),\left(\dfrac{-7+\sqrt{33}}{2};-\sqrt[4]{33};\dfrac{-5-\sqrt{33}}{2}\right) \end{array} \right\}$

3. Thay một biểu thức bởi một hằng số

Đối với một số hệ phương trình ,ta có thể thay thế một biểu thức chứa ẩn bởi một hằng số vào các phương trình đã cho.

Ví dụ 11. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 61 & (1) \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 1281 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

$(2) \Leftrightarrow (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = 1281.$

Thay (1) vào (2) ta có : $61(x^2 - xy + y^2) = 1281 \Rightarrow x^2 - xy + y^2 = 21.$

Khi đó ta có: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 61 \\ x^2 - xy + y^2 = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 81 \\ xy = 20 \end{cases}$

$\Rightarrow (x;y) \in \{(5;4),(4;5),(-5;-4),(-4;-5)\}$

Ví dụ 12. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ xy + yz - zx = 7 & (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 & (3) \end{cases}$

(Vòng 1,Khối THPT Chuyên , Đại học Sư phạm Hà Nội , năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

Từ (1) và (3) ta có: $(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)=36$

$\Leftrightarrow 14+2(xy+yz+zx)=36 \Leftrightarrow xy+yz+zx=11 \quad (4)$

Từ (2) và (4) ta có: $xz=2$, thay vào (1), (2) ta được:

$$\begin{cases} y+(x+z)=6 \\ y.(x+z)=9 \end{cases} \Rightarrow y=3, x+z=3.$$

Từ đó suy ra hệ có nghiệm $(x;y;z) \in \{(2;3;1),(1;3;2)\}$.

Ví dụ 13. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)(y+1)=42 & (1) \\ (x-1)^2+(y-1)^2=145 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Hệ đã cho tương đương với :

$\begin{cases} xy+x+y=41 \\ (x+y)^2-2(xy+x+y)=143 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy+x+y=41 \\ (x+y)^2-82=143 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=15 \\ xy=26 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x+y=-15 \\ xy=56 \end{cases}$

Vậy $(x;y) \in \{(13;2),(2;13),(-7;-8),(-8;-7)\}$

II. PHƯƠNG PHÁP CỘNG

Một trong các phương pháp thường sử dụng để giải hệ phương trình là phương pháp cộng.Dưới đây ta xét một số ví dụ:

Ví dụ 14. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2+y^2+2(xy+x+y)=0 & (1) \\ x^2+y^2+4x-2y+4=0 & (2) \end{cases}$

(*THPT Chuyên Ngoại ngữ - Đại học Quốc gia Hà Nội , năm học 2009- 2010)*

Hướng dẫn giải

Trừ từng vế của hai phương trình ta được :

$2xy+2x+2y-4x+2y-4=0 \Leftrightarrow (y-1)(x+2)=0$

+) Nếu $y-1=0 \Rightarrow y=1$ thay vào (2) :$x^2+4x+3=0 \Rightarrow x=-1, x=-3.$

+) Nếu $x+2=0 \Rightarrow x=-2$ thay vào (2) : $y^2-2y=0 \Rightarrow y=0; y=2.$

Vậy hệ có nghiệm :$(x;y) \in \{(-1;1),(-2;2),(-2;0),(-3;1)\}$

Chú ý: *Ta cũng có thể giải như sau:*

$$(1) \Leftrightarrow (x+y)^2+2(x+y)=0 \Rightarrow (x+y)[(x+y)+2]=0$$

Nên $x+y=0$ hoặc $x+y=-2$.

Từ đó dễ dàng tìm được các nghiệm của hệ

Ví dụ 15. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+4y^2=5 \\ 4xy+x+2y=7 \end{cases}$

(Vòng 2,THPT Chuyên – Đại học Quốc gia Hà Nội , năm học 2007-2008)

Hướng dẫn giải

Cộng vế theo vế các phương trình của hệ ta được :

$$(x+2y)^2+(x+2y)-12=0 \Rightarrow x+2y=3; x+2y=-4$$

Hệ có nghiệm $(x;y) \in \left\{(1;1), \left(2;\frac{1}{2}\right)\right\}$

Ví dụ 16. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2)=15 \\ (x-y)(x^2-y^2)=3 \end{cases}$

(Vòng 2,THPT Chuyên – Đại học Quốc gia Hà Nội , năm học 2004-2005)

Hướng dẫn giải

Hệ đã cho tương đương với: $\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2)=15 \\ 5(x+y)(x-y)^2=15 \end{cases}$

Trừ vế theo vế các phương trình của hệ ta có: $(x+y)[x^2+y^2-5(x-y)^2]=0$

Vì $x+y \neq 0$ nên $2x^2-5xy+2y^2=0 \Leftrightarrow (2x-y)(x-2y)=0$

+) Nếu $2x-y=0 \Rightarrow y=2x$, ta có ngiệm $x=1, y=2$.

+) Nếu $x-2y=0 \Rightarrow x=2y$, ta có nghiệm $x=2, y=1$.

Vậy $(x;y) \in \{(1;2),(2;1)\}$

Ví dụ 17. Cho x, y là các số thực thỏa mãn: $\begin{cases} x+1=y+z \\ xy+z^2-7z+10=0 \end{cases}$ (I)

a) Chứng minh rằng: $x^2+y^2=-z^2+12z-19$

b) Tìm $(x;y;z)$ thỏa mãn hệ (I) sao cho $x^2+y^2=17$

(Vòng 1, THPT Chuyên Đại học Sư phạm , năm học 2010 – 2011)

Hướng dẫn giải

a) Hệ đã cho tương đương với: $\begin{cases} x-y=z-1 \\ 2xy=-2z^2+14z-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2=z^2-2z+1 \\ 2xy=-2z^2+14z-20 \end{cases}$

Cộng vế với vê ta được $x^2+y^2=-z^2+12z-19$

b) Ta có: $-z^2+12z-19=x^2+y^2=17\Rightarrow z^2-12z+36=0\Rightarrow z=6$

Thay vào hệ ta được $(x;y;z)\in\{(4;-1;6),(1;-4;6)\}$

Ví dụ 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2y-y^2x=1\\8x^3-y^3=7\end{cases}$

(Vòng 2,THPT Chuyên – Đại học Quốc gia Hà Nội , năm học 2008-2009)

Hướng dẫn giải

Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases}12x^2y-6y^2x=6 & (1)\\8x^3-y^3=7 & (2)\end{cases}$

Trừ từng vế của (2) cho (1) ta được: $(2x-y)^3=1\Rightarrow 2x-y=1\Rightarrow y=2x-1$

Từ đó dễ dàng tìm được nghiệm của hệ là: $(x;y)\in\left\{(1;1),\left(\frac{-1}{2};-2\right)\right\}$

Ví dụ 19. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^3+3x^2y=5 & (1)\\y^3+6xy^2=7 & (2)\end{cases}$

(Vòng 2,THPT Chuyên – Đại học Quốc gia Hà Nội , năm học 2003-2004)

Hướng dẫn giải

Nhân hai vế của (1) với 4 ta được hệ $\begin{cases}8x^3+12x^2y=20\\y^3+6xy^2=7\end{cases}$

Cộng từng vế ta được $(2x+y)^3=27\Leftrightarrow 2x+y=3\Leftrightarrow y=3-2x$

Thay vào (1) ta được $4x^3-9x^2+5=0\Leftrightarrow (x-1)(4x^2-5x-5)=0$

Hệ có nghiệm: $(x;y)\in\left\{(1;1),\left(\frac{5-\sqrt{105}}{8};\frac{7+\sqrt{105}}{4}\right),\left(\frac{5+\sqrt{105}}{8};\frac{7-\sqrt{105}}{4}\right)\right\}$

Ví dụ 20. Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x=\dfrac{x^2+20}{y^2} & (1)\\[2mm]3y=\dfrac{y^2+20}{x^2} & (2)\end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x,y\neq 0$ từ đó suy ra x >0 , y > 0.

Hệ tương đương với: $\begin{cases} 3x^2y = y^2 + 20 \\ 3xy^2 = x^2 + 20 \end{cases}$

Trừ từng vế ta được: $3xy(x-y) = (y-x)(y+x) \Leftrightarrow (x-y)(3xy+x+y) = 0$

Do x > 0, y > 0 nên $3xy + x + y > 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$

Thay vào (1) ta được $3x^3 - x^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(3x^2+5x+10) = 0 \Rightarrow x = y = 2$

Ví dụ 21. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3xy = 2(x+y) \\ 5yz = 6(y+z) \\ 4xz = 3(z+x) \end{cases}$

(THPT Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa , năm học 2007-2008)

Hướng dẫn giải

Nếu xyz=0 thì x = y = z = 0 là một nghiệm của hệ.

Nếu xyz≠0 , hệ trở thành: $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{y+z}{yz} = \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{z+x}{zx} = \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

Cộng từng vế ta được $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{11}{6}$

Từ đó ta suy ra: $\dfrac{1}{x} = 1, \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x = 1, y = 2, z = 3$

Hệ có nghiệm $(x;y;z) \in \{(0;0;0),(1;2;3)\}$

Ví dụ 22. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy + xz = 48 \\ xy + y^2 + yz = 12 \\ xz + yz + z^2 = 84 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Cộng từng vế của các phương trình ta được

$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 144 \Leftrightarrow (x+y+z)^2 = 144 \Leftrightarrow x + y + z = \pm 12$

Nếu $x+y+z=12$ ta có: $\begin{cases} x(x+y+z)=48 \\ y(x+y+z)=12 \\ z(x+y+z)=84 \end{cases} \Rightarrow x=4, y=1, z=7$

Tương tự nếu $x+y+z=-12$ ta được $x=-4, y=-1, z=-7$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y;z)\in\{(4;1;7),(-4;-1;-7)\}$

Ví dụ 23. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x+y+1}+x+\sqrt{y^2+x+y+1}+y=18 \quad (1) \\ \sqrt{x^2+x+y+1}-x+\sqrt{y^2+x+y+1}-y=2 \quad (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Cộng và trừ từng vế của (1) và (2) ta được :

$$\begin{cases} x+y=8 \\ \sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8-x \\ x^2+9=100+(y^2+9)-20\sqrt{y^2+9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 41-4x\ge 0 \\ 25(x^2-16x+73)=16x^2-328x+1681 \end{cases} \Rightarrow x=4 \Rightarrow y=4$$

Vậy hệ có nghiệm x = y = 4.

Ví dụ 24. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2+91}=\sqrt{y-2}+y^2 \quad (1) \\ \sqrt{y^2+91}=\sqrt{x-2}+x^2 \quad (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x\ge 2, y\ge 2$ .Trừ từng vế của (1) và (2) ta được:

$$\sqrt{x^2+91}-\sqrt{y^2+91}=\sqrt{y-2}-\sqrt{x-2}+y^2-x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+91}+\sqrt{y^2+91}}=\frac{y-x}{\sqrt{y-2}+\sqrt{x-2}}+(y-x)(y+x)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\frac{x+y}{\sqrt{x^2+91}+\sqrt{y^2+91}}+\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}+(x+y)\right]=0$$

Do biểu thức trong dấu ngoặc vuông tương đương nên ta có: $x-y=0 \Rightarrow x=y$, thay vào (2) ta có:

$$\sqrt{x^2+91}=\sqrt{x-2}+x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+91}-10=(\sqrt{x-2}-1)+(x^2-9)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+91}+10}=\frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+(x-3)(x+3)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[(x+3)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+91}+10}-1\right)-\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}\right]=0 \Rightarrow x=3, y=3$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(3;3)$

III. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Tương tự như giải phương trình, phương pháp đặt ẩn phụ là một trong những phương pháp tôt nhất để giải hệ phương trình, đưa hệ phương trình về hệ mới đơn giản hơn. Tùy theo từng hệ ta chọn ẩn cho phù hợp.

Ví dụ 25. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=23 \\ x+y+xy=11 \end{cases}$

(Vòng 1, THPT Chuyên Đại học Vinh ,năm học 2009 – 2010)

Hướng dẫn giải

Đặt $a=x+y, b=xy$ với $a^2 \ge 4b$ ta có: $\begin{cases} a^2+2a-2b=23 \\ a+b=11 \end{cases}$

$\Rightarrow a=-9, b=20$ hoặc $a=5, b=6$.

Nếu $a=-9, b=20$ ta có $\begin{cases} x+y=-9 \\ xy=20 \end{cases}$

$\Rightarrow x=-5,\ y=-4$ hoặc $x=-4,\ y=-5$

Nếu $a=5, b=6$ ta có $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$

$\Rightarrow x=2,\ y=3$ hoặc $x=3,\ y=2$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x; y) $\in \{(-5;-4),(-4;-5),(2;3),(3;2)\}$

Ví dụ 26. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)(y+1)=8 \\ x(x+1)+y(y+1)+xy=17 \end{cases}$

(Vòng 1, THPT Chuyên – Đại học Quốc Gia Hà Nội, năm học 2002 – 2002)

Hướng dẫn giải

Hệ đã cho tương đương với: $\begin{cases} (x+y)+xy=7 \\ (x+y)^2+(x+y)-xy=17 \end{cases}$

Đặt $a = x + y, b = xy$ (điều kiện $a^2 \ge 4b$) ta có: $\begin{cases} a + b = 7 \\ a^2 + a - b = 17 \end{cases}$

$\Rightarrow a = -6, b = 13$ (loại) hoặc $a = 4, b = 3$

Khi $a = 4, b = 3$ ta có $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$ có nghiệm $(x;y) \in \{(1;3),(3;1)\}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y) \in \{(1;3),(3;1)\}$

Ví dụ 27. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x^2y^2 \\ (x + y)(1 + xy) = 4x^2y^2 \end{cases}$

(Vòng 2, THPT Chuyên – Đại học Quốc Gia Hà Nội, năm học 2011 – 2012)

Hướng dẫn giải

Đặt $a = x + y, b = xy$

Hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} a^2 - 2b = 2b^2 \\ a(1 + b) = 4b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 2b(b + 1) \ (1) \\ 4b^2 = a(b + 1) \ (2) \end{cases}$

Dễ thấy $a = b = 0$ thỏa mãn (1) và (2) nên $x = y = 0$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Nếu $a \ne 0$ thì từ (1) suy ra $b \ne 0, b \ne -1$, khi đó từ (1) và (2) ta có:

$$\frac{a^2}{4b^2} = \frac{2b}{a} \Leftrightarrow a^3 = 8b^3 \Leftrightarrow a = 2b$$

Thay vào (2) ta được $2b^2 - 2b = 0 \Rightarrow b = 0$ (loại), $b = 1 \Rightarrow a = 2$.

Từ đó tìm được x = y = 1.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y) \in \{(0;0),(1;1)\}$

Nhận xét: *Các hệ phương trình ở các ví dụ* **25, 26, 27** *là các hệ phương trình đối xứng loại 1, tức là các hệ mà ta thay đổi vai trò của x và y thì mỗi phương trình của hệ không đổi. Thông thường ta đặt* $a = x + y, b = xy$*, với điều kiện* $a^2 \ge 4b$*, được hệ phương trình mới đơn giản hơn, ta tìm được* a, b *rồi sau đó tìm* x, y

Ví dụ 28. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x - 1} + \sqrt{y - 4} = 3 \\ x + y - \sqrt{(x - 1)(y - 4)} = 8 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Đặt $a=\sqrt{x-1}, b=\sqrt{y-4} \quad (a\ge 0, b\ge 0)$, ta có: $\begin{cases} a+b=3 \\ a^2+b^2-ab=3 \end{cases}$

$\Rightarrow a=1, b=2$ hoặc $a=2, b=1$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)\in\{(2;8),(5;5)\}$

Ví dụ 29. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 5x^2+2y^2+2xy=26 \\ 3x+(2x+y)(x-y)=11 \end{cases}$

(Vòng 2, THPT Chuyên – Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2010 – 2011)

Hướng dẫn giải

Đặt $a=2x+y, b=x-y$ thì $a+b=3x,\ a^2+b^2=5x^2+2y^2+2xy$

Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} a^2+b^2=26 \\ a+b+ab=11 \end{cases}$

$\Rightarrow a=5,\ b=1$ hoặc $a=1,\ b=5$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)\in\{(2;1),(2;-3)\}$

Ví dụ 30. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{y}{x}=12 \\ y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{y}{x}=8 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $x, y\ne 0$

Đặt $a=y+\dfrac{1}{x},\ b=\dfrac{y}{x}$ ta được: $\begin{cases} a^2-b=12 \\ a+b=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-5,\ b=13 \\ a=4,\ b=4 \end{cases}$

Với $a=-5,\ b=13$ thay vào suy ra hệ vô nghiệm

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};2\right)$

Ví dụ 31. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y+xy^3+x+y^2+xy=-5 \\ x^2+y^4+xy(1+2y)=7 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Đặt $a = y^2 + x,\ b = xy$ ta có $\begin{cases} a + ab + b = -5 \\ a^2 + b = 7 \end{cases}$

Giải hệ trên ta được $a = 3, b = -2$ hoặc $a = -2, b = 3$

+) Nếu $a = 3, b = -2$ ta có $\begin{cases} y^2 + x = 3 \\ xy = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2; y = -1 \\ x = -1, y = 2 \end{cases}$

+) Nếu $a = -2, b = 3$ ta có: $\begin{cases} y^2 + x = -2 \\ xy = 3 \end{cases} \Rightarrow x = -3; y = -1$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y) \in \{(2;-1),(-1;2),(-3;-1)\}$

Ví dụ 32. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3xy + y + 1 = 21x \\ 9x^2y^2 + 3xy + 1 = 117x^2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Dễ thấy *x = 0* không thỏa mãn hệ, vậy $x \neq 0$, nên ta có:

$$\begin{cases} 3y + \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x} = 21 \\ 9y^2 + 3\dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 117 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(3y + \dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{y}{x} = 21 \\ \left(3y + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 3\dfrac{y}{x} = 117 \end{cases}$$

Đặt $a = 3y + \dfrac{1}{x},\ b = \dfrac{y}{x}$, ta có $\begin{cases} a + b = 21 \\ a^2 - 3b = 117 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -15, b = 36 \\ a = 12, b = 9 \end{cases}$

Với $a = -15, b = 36$: hệ vô nghiệm

Với $a = 12, b = 9$ ta có $\begin{cases} 3y + \dfrac{1}{x} = 12 \\ \dfrac{y}{x} = 9 \end{cases}$ hoặc $x = \dfrac{1}{9}, y = 1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y) \in \left\{\left(\dfrac{1}{3};3\right),\left(\dfrac{1}{9};1\right)\right\}$

Ví dụ 33. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2 \\ \dfrac{2}{xy} - \dfrac{1}{z^2} = 4 \end{cases}$

(THPT Chuyên Lê Khiết – Quảng Ngãi, năm học 2006 – 2007

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x, y, z \neq 0$

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ ta được: $\begin{cases} a+b+c=2 \\ 2ab-c^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2-c \\ 2ab=4+c^2 \end{cases}$

Do đó *a, b* là các nghiệm của phương trình: $t^2-(2-c)t+\frac{4+c^2}{2}=0$

$$\Delta=-(c+2)^2 \leq 0 \Rightarrow c=-2 \Rightarrow a=b=2$$

Do đó hệ có nghiệm $(x;y;z)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{-1}{2}\right)$

Ví dụ 34. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2-5xy-3y^2=-38 \\ 3x^2+9xy-5y^2=-15 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Dễ thấy x = 0 không là nghiệm của hệ, đặt *y = kx.*

Ta có: $\frac{x^2\left(3k^2+5k-4\right)}{x^2\left(5k^2-9k-3\right)}=\frac{38}{15} \Rightarrow k=3, k=\frac{-18}{145}$

Thay *k = 3* vào ta được $x=\pm 1, y=\pm 3$.

Thay $k=\frac{-18}{145}$, hệ vô nghiệm

IV. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

Đối với một lớp rất rộng các bài toán giải hệ phương trình, thường gọi là hệ phương trình không mẫu mực, ta không thể giải chúng bằng phương pháp biến đổi thông thường mà phải nhận xét, đánh giá hai vế của phương trình. Đối với từng bài tập cụ thể, ta có thể dung tính chất đơn điệu tang hay giảm của hàm số, dung các bất đẳng thức đã biết hoặc điều kiện tồn tại nghiệm của phương trình bậc hai… Dưới đây ta xét một số ví dụ.

Ví dụ 35. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x^2+1\right)y=2x^2 \\ \left(y^2+1\right)z=2y^2 \\ \left(z^2+1\right)x=2z^2 \end{cases}$

(Vòng 2,THPT Chuyên – TP Hà Nội, năm học 2009 – 2010)

Hướng dẫn giải

Nếu một trong ba số *x, y, z* có một số bằng 0, chẳng hạn x= 0, thì dễ dàng suy ra *y = z = 0*

Vậy *x = y = z = 0* là một nghiệm của hệ.

Nếu $x,y,z\neq 0$ suy ra *x > 0, y > 0, z > 0* và nhân vế với vế các phương trình của hệ ta được: $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)=8xyz \quad (1)$

Mặt khác, $x^2+1\geq 2x, y^2+1\geq 2y, z^2+1\geq 2z$ nên $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)=8xyz$

Theo (1) thì dấu bằng ở bất đẳng thức trên phải xảy ra. Từ đó suy ra $x=y=z=1$

Vậy hệ có nghiệm $\left(x;y;z\right)\in\left\{\left(0;0;0\right),\left(1;1;1\right)\right\}$

Ví dụ 36. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & (1) \\ \sqrt[1999]{x}-\sqrt[1999]{y}=\left(\sqrt[2000]{y}-\sqrt[2000]{x}\right)\left(x+y+xy+2001\right) & (2) \end{cases}$$

(THPT Chuyên Ngoại Ngữ– Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2000 – 2001)

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x\geq 0, y\geq 0\Rightarrow x+y+xy+2001>0$

Nếu x > y thì vế trái của (2) lớn hơn 0, vế phải nhỏ hơn 0, vô lí.

Nếu y > x thì vế trái của (2) nhỏ hơn 0, vế phải lớn hơn 0, vô lí.

Vậy x = y thì thay vào (1) ta được $2x^2=1$

Vậy hệ có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Ví dụ 37. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^3=2y^2+y+1 & (1) \\ 4y^3=2z^2+z+1 & (2) \\ 4z^3=2x^2+x+1 & (3) \end{cases}$

(THPT Chuyên – tỉnh Hà Tây (cũ) , năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

Ta có $4x^3=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+y^2+\frac{3}{4}>0\Rightarrow x>0$ tương tự ta có y > 0, z > 0.

Nếu x > y $\Rightarrow 4x^3>4y^3$ hay $2y^2+y+1>2z^2+z+1\Rightarrow y>z\Rightarrow 4y^3>4z^3$

hay $2z^2+z+1>2x^2+x+1\Rightarrow z>x$, vôlis

Tương tự *y* > *x* vô lí. Vậy *x* = *y*

Chứng minh tương tự ta có *y* = *z*, do đó *x* = *y* = *z*.

Thay vào (1) ta được: $4x^3-2x^2-x-1=0\Leftrightarrow (x-1)\left(4x^2+2x+1\right)=0$

Vậy hệ có nghiệm *x* = *y*= *z* = *1*

Ví dụ 38. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x=y^3+y^2+y-12\\ y=z^3+z^2+z-12\\ z=x^3+x^2+x-12\end{cases}$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(t)=t^3+t^2+t-12$ ta chứng minh *f(t)* là hàm số đồng biến.

Với t_1,t_2 bất kì mà $t_1<t_2$, ta có

$$f(t_1)-f(t_2)=t_1^3-t_2^3+t_1^2-t_2^2+t_1-t_2=\left(t_1-t_2\right)\left(t_1^2+t_1t_2+t_2^2+t_1+t_2+1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(t_1-t_2\right)\left[\left(t_1+t_2+1\right)^2+t_1^2+t_2^2+1\right]<0$$

Do đó $f(t_1)<f(t_2)$ nên $f(t_1)$ là hàm số đồng biến.

Nếu *x* < *y* thì *f(x)* < *f(y)* hay $z<x\Rightarrow f(z)<f(x)$ hay *y* < *z* *(vô lí)*

Tương tự tự *y*< *z* vô lí,do đó $x=y\Rightarrow f(x)=f(y)$ hay x = z

Vậy *x* = *y* = *z*, từ đó ta có $x^3+x^2-12=0\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+3x+6\right)=0$

Vậy hệ có nghiệm *x* = *y* = *z* = *2*

Ví dụ 39. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-34x-26y+73=0 & (1)\\ 3x^2-2y^2+5xy-27x+2y+24=0 & (2)\end{cases}$

Hướng dẫn giải

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 10x^2-2(y+17)x+5y^2-26y+73=0$

$\Delta'=-49(y-3)^2\le 0\Rightarrow y=3$, thay vào (2) ta được $3x^2-12x+12=0\Leftrightarrow x=2$

Vậy hệ có nghiệm *(x; y) = (2; 3)*

Ví dụ 40. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^2=6 & (1)\\ x^2+y^2+xy-z-3y+2=0 & (2)\end{cases}$

Hướng dẫn giải

$(2) \Leftrightarrow x^2 + (y-1)x + y^2 - 3y + 2 = 0$

$\Delta = (y-1)^2 - 4(y^2 - 3y + 2) \geq 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 10y + 7 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \dfrac{7}{3}$

Mặt khác (2) $\Leftrightarrow y^2 + (x-3)y + x^2 - x + 2 = 0;$

$\Delta = (x-3)^2 - 4(x^2 - x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \dfrac{1}{3}$

Khi đó $x^3 + y^2 \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{7}{3}\right)^2 < 6$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm

Ví dụ 41. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 36 & (1) \\ x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 216 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\dfrac{x^3 + y^3 + z^3 + t^3}{x^2 + y^2 + z^2 + t^2} = 6 \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 + 6t^2$

$\Leftrightarrow x^2(6-x) + y^2(6-y) + z^2(6-y) + t^2(6-t) = 0$

Mặt khác, theo (1) thì $x \leq 6, y \leq 6, z \leq 6, t \leq 6$

Do đó:

$$\begin{aligned} & x^2(6-x) + y^2(6-y) + z^2(6-z) + t^2(6-t) \geq 0 \\ & \Rightarrow x^2(6-x) = y^2(6-y) = z^2(6-z) = t^2(6-t) = 0 \\ & \Rightarrow (x;y;z;t) \in \{(0;0;0;6),(0;0;6;0),(0;6;0;0),(6;0;0;0)\} \end{aligned}$$

Ví dụ 42. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2y^2}{y^2+1} = z \\ \dfrac{3z^3}{z^4 + z^2 + 1} = x \\ \dfrac{4x^4}{x^6 + x^4 + x^2 + 1} = y \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Dễ nhận thấy rằng nếu mộttrong ba số x, y , z bằng 0 thì hai số còn lại cũng bằng 0

Nếu $xyz \neq 0$, từ đó suy ra x, y, z là các số dương

Ta có $y(y^2+1) = y^3 + y \geq 2y^2 \Rightarrow y \geq \dfrac{2y^2}{y^2+1} = z;$

$z(z^4+z^2+1) = z^5 + z^3 + z \geq 3z \Rightarrow z \geq \dfrac{3z^2}{z^4+z^2+1} = x;$

$x(x^6+x^4+x^2+1) = x^7 + x^5 + x^3 + x \geq 4x \Rightarrow \dfrac{4x^4}{x^6+x^4+x^2+1} = y$

Từ đó suy ra x = y = z, thay vào phương trình đầu ra được x = y = z = 1.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y;z) \in \{(0;0;0),(1;1;1)\}$

Ví dụ 43. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y^2 + z^3 = 14 & (1) \\ \left(\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3y}+\dfrac{1}{6z}\right)\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}\right) = 1 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

$(2) \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{z}\right)(3x+2y+z) = 36 \Leftrightarrow 6\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+3\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\right)+2\left(\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{z}\right) = 22$

Mặt khác so *x, y, z > 0,* áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$6\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)+3\left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\right)+2\left(\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{z}\right) \geq 6.2+3.2+2.2 = 22$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z > 0$. Hệ có nghiệm $(x; y; z) = (2; 2; 2)$

Ví dụ 44. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+z = 6 & (1) \\ x^4+y^4+z^4 = 6xyz & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức $a^2+b^2 \geq 2ab$ ta có $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

$\Rightarrow x^4+y^4+z^4 \geq x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$

Mặt khác $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq xy^2z+yz^2x+zx^2y = xyz(x+y+z)$

$\Rightarrow x^4+y^4+z^4 \geq xyz(x+y+z) = 6xyz$ (do $x+y+z=6$)

Theo đề bài, dấu bằng xảy ra, nên $x = y = z = 2$.

V. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ

Đối với hệ phương trình chứa tham số, ta phải tìm điều kiện của tham số *để hệ phương trình vô nghiệm, có nghiệm, có nghiệm là các số nguyên hoặc hệ phương trình thỏa mãn điều kiện nào đó.*

Ví dụ 45. Tìm *m* để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 - 2(m^2+2m)x + 13(m^2+2m)^2 = 0 \ (1) \\ x^2 - 2x \ + (m+2)^2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Phương trình (1) có $\Delta_1^{'} = -12\left(m^2+2m\right)^2 \le 0$ với mọi *m*

Do đó (1) có nghiệm khi $m^2+2m=0 \Leftrightarrow m=0$ hoặc *m = -2*

+) Nếu *m = 0* thì (2) trở thành $x^2-2x+4=0$ (phương trình vô nghiệm).

+) Nếu *m = -2* thì hệ có nghiệm *x = 0*

Vậy *m = -2* thì hệ phương trình có nghiệm.

Ví dụ 46. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y)^4 + 13 = 6x^2y^2 + m \\ xy(x^2+y^{2)} = m \end{cases}$

a) Giải hệ với *m = -10*

b) Chứng minh rằng không tồn tại giá trị *m* để hệ có nghiệm duy nhất.

(Vòng 2, THPT Chuyên – TP. Hà Nội, năm học 2005 – 2006)

Hướng dẫn giải

a) Đặt $a = x^2+y^2, b = xy \Rightarrow \begin{cases} (a+2b)^2 - 6b = -23 \\ ab = -10 \end{cases}$

$\Rightarrow a=-5, b=2$ (loại) hoặc $a=5, b=-2 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=-2 \end{cases}$

$\Rightarrow (x;y) \in \left\{(1;-2),(-1;2),(2;-1),(-2;1)\right\}$

b) Dễ thấy *x = y = 0* không là nghiệm của hệ. Giả sử $\left(x_0;y_0\right)$ là một nghiệm của hệ thì $\left(-x_0;-y_0\right)$ cũng là nghiệm của hệ. Do đó không tồn tại *m* để hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 47. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} kx - 2y = k - 2 & (1) \\ (k-1)^2x - y = k^2 - 1 & (2) \end{cases}$

a) Tìm k để hệ có nghiệm *x > 0, y > 0*

b) Tìm các giá trị nguyên của k để hệ có nghiệm là các số nguyên.

Hướng dẫn giải

a) Từ hệ phương trình đã cho ta có:

$\left(2k^2-5k+2\right)x=2k^2-k \Leftrightarrow (k-2)(2k-1)x=k(2k-1) \quad (3)$

Nếu k = 2 thì (3) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

Nếu $k=\frac{1}{2}$ thì hệ tương đương với x – 4y = -3, có nghiệm *x > 0, y > 0.*

Nếu $k\neq 2, k\neq \frac{1}{2}$ thì hệ có nghiệm $(x,y)=\left(\frac{k}{k-2};\frac{2k-2}{k-2}\right)$.

Để $x>0, y>0$ thì $\begin{cases}\frac{k}{k-2}>0\\ \frac{2k-2}{k-2}>0\end{cases} \Leftrightarrow k<0$ hoặc $k>2.$

Vậy $k<0; k=\frac{1}{2}; k>2.$ thì hệ có nghiệm $x>0, y>0$

b) $\begin{cases}x=1+\frac{2}{k-2}\\ y=2+\frac{2}{k-2}\end{cases}$ $(k\in Z)$, để $x,y\in Z$ thì $2\,\vdots\,(k-2)$. Vậy $k\in\{0;1;3;4\}$

Ví dụ 48. Tìm k để hệ phương trình sau có ít nhất một nghiệm $x>0, y>0$:

$$\begin{cases}x+xy+y=k+3\\ x^2y+xy^2=k+2\end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Đặt $a=x+y, b=xy$, hệ phương trình trở thành: $\begin{cases}a+b=k+3\\ ab=k+2\end{cases}$

Giải hệ trên ta được $a=1, b=k+2$ thì x,y là nghiệm của phương trình $t^2-t+k+2=0,$ phương trình này có hai nghiệm dương khi $-2<k\le\frac{-7}{4}$

Nếu $a=k+2, b=1$ thì x, y là nghiệm của phương trình: $t^2-(k+2)t+1=0,$ phương trình này có hai nghiệm dương khi $k\ge 0.$

Vậy $-2 < k \le \frac{-7}{4}$ hoặc $k \ge 0$. Thì hệ phương trình có nghiệm $x > 0, y > 0$.

Ví dụ 49. Tìm tham số k để mỗi hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a) $\begin{cases} x^2 + xy = (k+2)(y-1) \\ y^2 + xy = (k+2)(x-1) \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x+1)^2 = y + k - 5 \\ (y+1)^2 = x + k - 5 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Ta nhận thấy nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm của hệ.

Do đó để hệ có nghiệm duy nhất thì $x_0 = y_0$.

Khi đó phương trình $2x^2 - (k-2)x + k + 2 = 0$ phải có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \Delta = (k+2)(k-6) = 0 \Leftrightarrow k = -2 \text{ hoặc } k = 6$$

Nếu $k = -2$ hệ trở thành $\begin{cases} x^2 + xy = 0 \\ y^2 + xy = 0 \end{cases}$, hệ có vô số nghiệm $y = -x$.

Nếu $k = 6$ hệ trở thành $\begin{cases} x^2 + xy = 8(y-1) \\ y^2 + xy = 8(x-1) \end{cases}$, hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 2$.

Vậy $k = 6$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

b) Tương tự câu a).

Ví dụ 50. Tìm a, b để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} (2a + b + 1)x + (a - 2b - 2)y = 5a \\ (3a^2 + 4b^2 + 2)x + (2a^2 - 8b^2 - 4)y = 8a^2 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Dễ thấy, với mọi giá trị của a và b thì $x = 2, y = 1$ luôn là một nghiệm của hệ. Do đó hệ luôn có nghiệm với mọi giá trị của a, b.

Ví dụ 51. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11 \\ xy(x+2)(y+2) = m \end{cases}$

a) Giải hệ khi *m = 24.*

b) Tìm *m* để hệ có nghiệm

(THPT Chuyên – TP. Hồ Chí Minh, năm học 2007 – 2008)

Hướng dẫn giải

Đặt $a = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \ge 0, b = y^2 + 2y + 1 \ge 0$, hệ trở thành: $\begin{cases} a + b = 13 \\ (a-1)(b-1) = m \end{cases}$

a) Khi $m = 24$ dễ thấy $a = 4, b = 9$ hoặc $a = 9, b = 4$.

Do đó hệ có nghiệm $(x, y) \in \{(1;2),(1;-4),(-3;-4),(2;1),(-4;1),(-4;-3)\}$.

b) $\begin{cases} a + b = 13 \\ ab - (a+b) + 1 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 13 \\ ab = m + 12 \end{cases}$

a, b là nghiệm không âm của phương trình $t^2 - 13t + m + 12 = 0 \Leftrightarrow -12 \le m \le \dfrac{121}{4}$

Ví dụ 52. Giả sử (x, y) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = k - 1 \\ x^2 + y^2 = 5 + 2k - k^2 \end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $A = xy + 8(x+y) - 25$

Hướng dẫn giải

Đặt $a = x + y, b = xy$, hệ trở thành $\begin{cases} a = k - 1 \\ a^2 - 2b = 5 + 2k - k^2 \end{cases}$

Để hệ có nghiệm thì $a^2 \ge 4b \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 \ge 4k^2 - 8k - 8$

$$\Leftrightarrow k^2 - 2k - 3 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le k \le 3.$$

Với $a = k - 1, b = k^2 - 2k - 2$ thì $A = k^2 + 6k - 35 = (k+3)^2 - 44.$

Vậy Max $A = -8$ khi $k = 3$; Min $A = -40$ khi $k = -1$.

Chú ý: *Một số học sinh mắc sai lầm như sau: "Từ $A = (k+3)^2 - 44 \ge -44$ kết luận Min $A = -44$ khi $k = -3$". Tuy nhiên, khi $k = -3$ thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.*

Ví dụ 53. Giả sự hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$.

Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$

Hướng dẫn giải

Gọi (x_0, y_0, z_0) là một nghiệm của hệ phương trình.

Khi đó $a^3 + b^3 + c^3 = a^2(bx_0 + cy_0) + b^2(cx_0 + ay_0) + c^2(ax_0 + by_0)$.

$= a^2bx_0 + a^2cy_0 + b^2cx_0 + b^2ay_0 + c^2ax_0 + c^2by_0$.

$= ab(ax_0 + by_0) + bc(bx_0 + cy_0) + ac(ay_0 + cx_0) = 3abc$.

BÀI TẬP

Bài 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x \\ (x-1)^3 + y^3 = 1 \end{cases}$

(Vòng 1, THPT Chuyên – Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2008 – 2009)

Hướng dẫn giải

Hệ tương đương với: $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ (x-1)^3 + y^3 = 1 \end{cases}$

Đặt $a = x - 1$ ta được $\begin{cases} a^2 + y^2 = 1 \\ a^3 + y^3 = 1 \end{cases}$

Trừ từng vế $a^2(1-a) + y^2(1-y) = 0$. Mặt khác do $a^2 + y^2 = 1$ nên

$-1 \le a \le 1; -1 \le y \le 1$, suy ra $a = 0, y = 1,$ hoặc $a = 1, y = 0.$

Hệ có nghiệm: $(x;y) = \{(1;1);(2;0)\}$.

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = \sqrt{4z-1} \quad (1) \\ y + z = \sqrt{4x-1} \quad (2) \\ z + x = \sqrt{4y-1} \quad (3) \end{cases}$

(Vòng 1, Hệ THPT Chuyên Toán – Tin, Trường Đại học sư phạm Hà Nội, năm học 2002 – 2003)

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \ge \frac{1}{4}, y \ge \frac{1}{4}, z \ge \frac{1}{4}$

Nếu $x > y \Rightarrow x + z > y + z$ hay $\sqrt{4y-1} > \sqrt{4x-1} \Leftrightarrow y > x$ vô lý

Tương tự: Nếu $y > x$ vô lý, do đó $x = y$

Tương tự ta có $y = z$.

Vậy $x = y = z$ thay vào (1): $2x = \sqrt{4x-1} \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y;z) = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Bài 3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt[3]{x+103} + \sqrt{y-22} = 5 \\ \sqrt[3]{y+103} + \sqrt{z-22} = 5 \\ \sqrt[3]{z+103} + \sqrt{x-22} = 5 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \ge 22; y \ge 22; z \ge 22$

Với $x > 22$ hoặc $y > 22$ hoặc $z > 22$: Không thỏa mãn.

Với $x = y = z = 22$ thỏa mãn hệ phương trình.

Vậy hệ có nghiệm $x = y = z = 22$.

Bài 4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + z = 15 & (1) \\ xy + yz + zx = 75 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

$(1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 225 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 225 - 2.75 = 75$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \Rightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0 \Rightarrow x = y = z = 5$

Bài 5. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 36 \\ xy + yz + zt + tx = 36 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Từ hệ đã cho ta có: $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = xy + yz + zt + tx$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-t)^2 + (t-x)^2 = 0 \Rightarrow x = y = z = t$

Hệ có nghiệm $(x;y;z;t) \in \{(-3;-3;-3;-3),(3;3;3;3)\}$

Bài 6. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{3 - \dfrac{2}{y}} = 2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{3 - \dfrac{2}{x}} = 2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \ge \frac{2}{3}, y \ge \frac{2}{3}$ Đặt $\frac{1}{\sqrt{x}}a, \frac{1}{\sqrt{y}} = b$ ta có:

$$\begin{cases} a + \sqrt{3 - 2b^2} = 2 \\ b + \sqrt{3 - 2a^2} = 2 \end{cases} \Rightarrow a + \sqrt{3 - 2b^2} = b + \sqrt{3 - 2a^2}$$

Dễ dàng chứng minh được $a = b$, thay vào ta được $a = b = 1$ hoặc $a = b = \frac{1}{3}$

Hệ có nghiệm: $(x;y) \in \{(1;1),(9;9)\}$

Bài 7. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 12x = y^3 + 12y \quad (1) \\ x^4 + y^4 = 16 \quad (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Từ (1) có: $(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 12) = 0 \Rightarrow x = y$

Thay vào (2) ta được: $x^4 = 8$ nên hệ có nghiệm $(x,y) \in \left\{\left(\sqrt[4]{8}, \sqrt[4]{8}\right); \left(-\sqrt[4]{8}, -\sqrt[4]{8}\right)\right\}$

Bài 8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 + y^2 = \frac{697}{81} \quad (1) \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 \quad (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

$(2) \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)x + y^2 - 4y + 4 = 0$ là phương trình bậc hai ẩn x

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta_x = -3y^2 + 10y - 7 \ge 0 \Leftrightarrow 1 \le y \le \frac{7}{3}$

$(2) \Leftrightarrow y^2 + (x - 4)y + x^2 - 3x + 4 = 0$ phải có nghiệm đối với y:

Suy ra $\Delta_y = -3x^2 + 4x \ge 0 \Rightarrow 0 \le x \le \frac{4}{3}$

Từ đó suy ra $x^4 + y^2 \le \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{697}{81} \Rightarrow x = \frac{4}{3}, y = \frac{7}{3}$

Các giá trị đó không thỏa mãn (2). Vậy hệ vô nghiệm

Bài 9. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 + z^2 + 8xy - 2xz - 2yz = 12 \quad (1) \\ 4x^2 + 4y^2 + 2yz - 2xz - 8xy = -4 \quad (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

$(1) \Leftrightarrow 4(x + y)^2 - 2(x + y)\ z + z^2 - 12 = 0$

Đặt $t=x+y$ ta có $4t^2-2zt+z^2-12=0$

$\Delta_1^{'}\ge 0\Leftrightarrow -3z^2+48\ge 0\Leftrightarrow -4\le z\le 4$

$(2)\Leftrightarrow 4(x-y)^2-2z(x-y)+4=0$

Đặt $x-y=k$ ta có $4k^2-2zk+4=0$

$\Delta_2^{'}\ge 0\Leftrightarrow z^2-16\ge 0\Leftrightarrow z\le -4$ hoặc $z\ge 4$

Vậy $z=-4$ hoặc $z=4$

Hệ có nghiệm $(x;y;z)\in\{(1;0;4),(-1;0;-4)\}$

Bài 10. Tìm các số $x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0$ thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases}2(x+y)=z^2\\2(y+z)=x^2\\2(z+x)=y^2\end{cases}$

Hướng dẫn giải

Trước hết ta chứng minh $x=y=z\ge 0$

Thay vào ta được $x^2=4x\Rightarrow x=0$ hoặc $x=4$

Vậy hệ có nghiệm: $(x;y;z)\in\{(0;0;0),(4;4;4)\}$

Bài 11. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x,y,z thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases}x^2-3xy+3y^2-z^2=31\\x^2+xy+8z^2=100\end{cases}$

(THPT Chuyên – TP. Hồ Chí Minh, năm học 2009 – 2010)

Hướng dẫn giải

Nhân hai vế của (1) với 8 rồi cộng với (2) ta được:

$$9x^2-23xy+24y^2=348\Leftrightarrow 5\left(2x^2-5xy+5y^2\right)=(x-y)^2+348 \quad (3)$$

Dễ thấy hai vế trái chia hết cho 5 $(x-y)^2$ chia cho 5 dư 0 hoặc dư 1 hoặc dư 4, do đó vế phải chia cho 5 dư 2 hoặc dư 3 hoặc dư 4

Từ đó suy ra hệ phương trình không có nghiệm nguyên

Bài 12. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+2y^2-4y+3=0 & (1)\\x^2+x^2y^2-2y=0 & (2)\end{cases}$

(Thi học sinh giỏi lớp 9 – TP. Hồ Chí Minh, năm học 1995-1996)

Hướng dẫn giải

$(1) \Leftrightarrow x^3 = -1 - 2(y-1)^2 \le -1 \Rightarrow x \le -1$

$(2) \Leftrightarrow x^2y^2 - 2y + x^2 = 0$

Nếu $x = 0$ thì $y = 0$ không thỏa mãn (1)

Nếu $x \ne 0, \Delta' = 1 - x^4 \ge 0 \Rightarrow -1 \le x \le 1$

Từ đó suy ra $x = -1$ thay vào (2) ta được $y = 1$

Hệ có nghiệm $(x;y) = (-1;1)$

Bài 13. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^9 + y^9 = 1 & (1) \\ x^{10} + y^{10} = 1 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Từ (2) ta có: $x^{10} \le 1, y^{10} \le 1 \Rightarrow -1 \le x \le 1; -1 \le y \le 1$

Do $x \le 1$ nên $x^9 \le 1 \Rightarrow y^9 \ge 0 \Rightarrow y \ge 0$ tương tự $x \ge 0$

Do đó $0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1$

Ta có: $x^9 - x^{10} + y^9 - y^{10} = 0 \Rightarrow x^9(1-x) + y^9(1-y) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x^9(1-x) = 0 \\ y^9(1-y) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Hệ có nghiệm $(x;y) \in \{(0;1),(1;0)\}$

Bài 14. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^6 + y^4 = 1 & (1) \\ x^7 + y^5 = 1 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Từ (1) Ta có: $\begin{cases} y^4 \le 1 \Rightarrow -1 \le y \le 1 \Rightarrow y^5 \le 1 \Rightarrow x^7 \ge 0 \Rightarrow x \ge 0. \\ x^6 \le 1 \Rightarrow -1 \le x \le 1 \end{cases}$

Từ đó ta có $0 \le x \le 1$

Tương tự ta có $0 \le y \le 1$

Trừ vế với vế của $(1),(2)$ ta được $x^6(1-x) + y^4(1-y) = 0$

Từ đó suy ra: $\begin{cases} x^6(1-x) = 0 \\ y^4(1-y) = 0 \end{cases}$. Hệ có nghiệm $(x;y) \in \{(1;0),(0;1)\}$

Bài 15. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2 & (1) \\ \dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}=4 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x,y,z\neq 0$

$$(1)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=4=\frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{xy}+\frac{2}{xz}+\frac{2}{yz}-\frac{2}{xy}+\frac{1}{z^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{xz}+\frac{1}{z^2}\right)+\left(\frac{1}{y^2}+\frac{2}{yz}+\frac{1}{z^2}\right)=0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=0\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0\end{cases}\Rightarrow x=y=\frac{1}{2},z=\frac{-1}{2}$$

Bài 16. Tìm x,y dương thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x+y=4 \\ x^4+y^4+\dfrac{12}{xy}=35 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có: $x^4+y^4\geq 32$

$$\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}=2\Rightarrow xy\leq 4\Rightarrow\frac{12}{xy}\geq 3$$

Do đó $x^4+y^4+\dfrac{12}{xy}\geq 35.$ Dấu bằng xảy ra khi $x=y=2$

Vậy hệ phương trình có nghiệm dương là $x=y=2$

Bài 17. TÌm x,y là các số nguyên thỏa mãn hệ điều kiện sau:

$$\begin{cases} 2y^2-x^2-xy+2y-2x=7 & (1) \\ x^3+y^3+x-y=8 & (2) \end{cases}$$

(Vòng 1, THPT Chuyên – Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2004 – 2005)

Hướng dẫn giải

$(1)\Leftrightarrow(y-x)(2y+x+2)=7$, có nghiệm duy nguyên là $x=1,y=2$ hoặc

$x=-5,y=2$

Kết hợp với (2) ta có $x=1, y=2$

5.64.$(2): c=a-b+3,$ thay vào (3): $a^2=b^2+(a-b+3)^2+1 \Leftrightarrow (a-b)(b-3)=5$.

Từ đó kết hợp với (1) ta được: $(a,b,c) \in \{(-3;2;-2),(-3;-2;2)\}$

Bài 18. Tìm các số nguyên a,b,c thỏa mãn hệ điều kiện sau: $\begin{cases} a<b \\ a+3=b+c \\ a^2=b^2+c^2+1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Hệ đã cho tương đương với: $\begin{cases} (x+1)^2(x-2)=y+2 (1) \\ (y-1)^2(y+2)=z-4 (2) \\ (z+2)^2(z-4)=2-x (3) \end{cases}$

Nếu $x>2,$ từ (3) ta có $z<4.$ Từ (2) ta có $y<-2$. Từ (1) ta có $x<2$ (vô lý)

Tương tự nếu $x<2$ cũng vô lý.

Vậy $(x;y;z)=(2;-2;4)$

Bài 19. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3=3x+y+4 \\ y^3=3y+z-6 \\ z^3=12z-x+18 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Từ (1) ta có: $y=-mx-1$, thay vào (2) ta được $(1-m)x=1-m$ (3)

Hệ có nghiệm duy nhất nếu (3) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m \neq 1$

Khi đó $x=1, y=-m-1, y^2=x \Leftrightarrow (-m-1)^2=1 \Leftrightarrow m=0$ hoặc $m=-2$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=3 & (1) \\ x^3+y^3=3(x^2+y^2) & (2) \end{cases}$

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+xy=1 & (1) \\ x^3+y^3=3(x^2+y^2) & (2) \end{cases}$

Bài 3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 & (1) \\ 2y^3 + x^2y + 3xy^2 = 3 & (2) \end{cases}$

Bài 4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 + xy - 6x - 2y + 4 = 0 & (1) \\ 2y^2 - xy - 3x + 3y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Bài 5. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2xy + 6x - 10y + 18 = 0 \\ 2x^5 + xy^2 - 3 = 0 \end{cases}$

Bài 6. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 4y^2 - 4x + 4y + 3 = 0 & (1) \\ x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x - 4y - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Bài 7. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 = (5y + 4)(4 - y) & (1) \\ x^2 - 5y^2 - 4xy + 16y - 8x + 16 = 0 & (2) \end{cases}$

Bài 8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 & (1) \\ 2x^2 - 3xy + 5 = 0 & (2) \end{cases}$

(THPT Chuyên Ngoại ngữ - Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2006 – 2007)

Bài 9. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x - y) & (1) \\ x + y = -1 & (2) \end{cases}$

Bài 10. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy + 2 = 3x + y & (1) \\ x^2 + y^2 = 2 & (2) \end{cases}$

(Vòng 1, THPT Chuyên – Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2001 – 2002)

Bài 11. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6x^2 - 3xy + x = 1 - y & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

(THPT Chuyên Ngoại ngữ - Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2004-2006)

Bài 12. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - xy - 6y^2 - 2x + 11y - 3 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 = 5 & (2) \end{cases}$

Bài 13. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4x - 2y - 3 & (1) \\ x^2 + y^2 = 5 & (2) \end{cases}$

(Vòng 2, THPT Chuyên – Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2006 – 2007)

Bài 14. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + x - xy - 2y^2 - 2y = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

(THPT Chuyên Ngoại Ngữ – Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2003 – 2004)

Bài 15. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 & (1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y & (2) \end{cases}$

Bài 16. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+2y} + \sqrt{x-2y} = 2\sqrt{2y} & (1) \\ \sqrt{x} + \sqrt{10y} = 3 & (2) \end{cases}$

Bài 17. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + z = 0 & (1) \\ 2x + 3y + z = 0 & (2) \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 26 & (3) \end{cases}$

Bài 18. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x + y + z = 21 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 189 \\ y^2 = xz \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2(y+z) = yz \\ xy + yz + zx = 108 \\ xyz = 180 \end{cases}$

Bài 19. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 2xy^2 = 24 \\ y^3 + 2x^2y = 24 \end{cases}$

(THPT Chuyên Ngoại Ngữ – Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2007 – 2008)

Bài 20. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^3 = 5y + 66 \\ 3y^3 = 5x + 66 \end{cases}$

Bài 21. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - 3y = \dfrac{4y}{x} & (1) \\ y - 3x = \dfrac{4x}{y} & (2) \end{cases}$

Bài 22 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy + x + y = 4 & (1) \\ (x+y)(1+xy) = 4 & (2) \end{cases}$

(Vòng 1, THPT Chuyên – Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2006 – 2007)

Bài 23. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - y^2 + xy = 1 & (1) \\ 3x + y = y^2 + 3 & (2) \end{cases}$

(Vòng 2, THPT Chuyên – Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 20096 – 2010)

Bài 24. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2-2(x+y)=0 & (1) \\ y^2+z^2-2(y+z)=0 & (2) \\ z^2+x^2-2(z+x)=0 & (3) \end{cases}$

(THPT Chuyên – tỉnh Hà Tây (cũ). Năm học 2003 – 2004)

Bài 25. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x+y+z)=12-yz & (1) \\ y(x+y+z)=15-xz & (2) \\ z(x+y+z)=20-xy & (3) \end{cases}$

Bài 26. Cho x,y,z là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{12}-\dfrac{z}{4}=1 \\ \dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{5}-\dfrac{z}{3}=1 \end{cases}$

Tính giá trị của $A=x+y+z$

(Vòng 2, THPT Chuyên Đại học Sư phạm, năm học 2009 – 2010)

Bài 27. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-1)y^2+x+y=3 & (1) \\ (y-2)x^2+y=x+1 & (2) \end{cases}$

(Vòng 1, THPT Chuyên – Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2011 – 2012)

Bài 28. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+2xy=2x=2y+1=0 \\ 3x^2+xy+4x-y-7=0 \end{cases}$

Bài 29. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+3x+3y+2xy-4=0 \\ x^2y+xy^2=48 \end{cases}$

Bài 30. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x+2)(3x+y)=64 \\ x^2+5x+y=16 \end{cases}$

Bài 31. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x-2y-xy=8+12\sqrt{2} \\ (x-y)^2+2xy=24 \end{cases}$

Bài 32. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4+y^4=16 \\ x^6+y^6=64 \end{cases}$

Bài 33. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2-3xy=-11 \\ x^4+x^2y^2+y^4=931 \end{cases}$

Bài 34. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+4\dfrac{y}{x}=22 \\ \dfrac{3}{x^2+y^2-1}+2\dfrac{x}{y}=1 \end{cases}$

Bài 35. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-y-\sqrt{xy}=15 & (1) \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=8 & (2) \end{cases}$

Bài 36. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^4-xy^3+x^2y^2=16 \\ y^2-xy^3-xy=4 \end{cases}$

Bài 37. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)+8xy=0 & (1) \\ \dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{y^2+1}=-\dfrac{1}{4} & (2) \end{cases}$

(THPT Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương, năm học 2007 – 2008)

Bài 38. Giải hệ phương trình: a) $\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=4 \\ \sqrt{x+4}+\sqrt{y+4}=6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{y+1}=4 \\ \sqrt{x+4}+\sqrt{y+6}=6 \end{cases}$

Bài 39. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy^2+2x+y=4xy \\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{y}{x}=3 \end{cases}$

Bài 40. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy(x+y)=2 \\ x^3+y^3+x+y=4 \end{cases}$

(Vòng 1, THPT Chuyên – Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2007 – 2008)

Bài 41. Giải hệ phương trình: a) $\begin{cases} x^2-2xy+3y^3=9 \\ 2x^2-13xy+15y^2=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ 6x^3-3xy^2+y^3=2 \end{cases}$

Bài 42. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^2+8y^2+12xy=23 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$

(Vòng 1, THPT Chuyên – Đại học Quốc gia Hà Nội, năm học 2010 – 2011)

Bài 43. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 + 2xy + 3y^2 = 7 \\ 4xy - x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$

Bài 44. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 = 13 \\ x^2 + 4xy - 2y^2 = -6 \end{cases}$

Bài 45. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+4} + \sqrt{y-5} = 9 \\ \sqrt{x-5} + \sqrt{y+4} = 9 \end{cases}$

Bài 46. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \quad (1) \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \quad (2) \end{cases}$

(Vòng 2, THPT Chuyên Toán – Tin, Lam Sơn – Thanh Hóa, năm học 2005 – 2006)