

**SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ**

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC PTTH
NĂM HỌC 2000-2001.**

**ĐỀ CHÍNH THỨC
SBD:**

**MÔN: TOÁN BẢNG A VÒNG 1.
(180 phút, không kể thời gian giao đề)**

Bài 1: (2 điểm)

a/ Chứng minh rằng mỗi phương trình sau đây có một nghiệm thực duy nhất

$$\cos x = x \quad (1); \quad \sin(\cos x) = x \quad (2); \quad \cos(\sin x) = x \quad (3).$$

b/ Gọi α là nghiệm của (1), gọi β là nghiệm của (2), gọi γ là nghiệm của (3).

Chứng minh rằng: $\gamma \cdot \alpha \cdot \ln \beta < \beta \cdot \gamma \cdot \ln \alpha < \alpha \cdot \beta \cdot \ln \gamma$.

Bài 2: (2 điểm) Định m để giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$f(x, y, z) = (x - y + mz + 1)^2 + [x + (m + 1)y - 2z + 2]^2 + [2x + 2y + (m - 4)z + 1]^2$$

là lớn nhất.

Bài 3: (2 điểm) Cho hình vuông cố định. Tìm tập hợp những điểm M trong hình vuông đó và thỏa mãn điều kiện: Tích hai khoảng cách từ điểm M đến hai cạnh của hình vuông cùng xuất phát từ một đỉnh bằng bình phương khoảng cách từ điểm M đến đường chéo của hình vuông không đi qua đỉnh đó.

Bài 4: (4 điểm)

a/ Tìm tham số a để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} a(x - a)^2(x - 2\sqrt{2}) + 1 \leq 0 \\ x > a > 0 \end{cases}$$

b/ Tìm m, n $\in \mathbb{N}^*$ để phương trình: $\left(\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{cotg} x}{4} \right)^m = \sin^n x + \cos^n x$ có nghiệm.

SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC PTTH
NĂM HỌC 2000-2001.

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI MÔN TOÁN
BẢNG A – VÒNG 1

Bài 1: (2.0 điểm)

Câu a (1đ)

- $\cos x = x \Leftrightarrow x - \cos x = 0$. Xét $f(x) = x - \cos x$. Do $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên chỉ cần xét $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- $f'(x) = 1 + \sin x > 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên f đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- $f(0) < 0$; $f(1) > 0$.
- Vậy phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm và chỉ có một nghiệm.
- Các phương trình còn lại chứng minh tương tự.

Câu b (1đ)

- Nhận xét $\alpha, \beta, \gamma \in (0;1)$. Viết lại $\frac{\ln \beta}{\beta} < \frac{\ln \alpha}{\alpha} < \frac{\ln \gamma}{\gamma}$.
- Xét $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ với $x \in (0;1)$. $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \quad \forall x \in (0;1)$, g đồng biến trên $(0;1)$.
- Chứng minh: $\beta < \alpha < \gamma$:
Giả sử $\beta \geq \alpha$ lúc đó $\beta = \sin(\cos \beta) < \cos \beta \leq \cos \alpha = \alpha$ vô lý.
Giả sử $\gamma \leq \alpha$ lúc đó $\gamma = \sin(\cos \gamma) > \cos \gamma \geq \cos \alpha = \alpha$ vô lý.
Vậy ta có: $\beta < \alpha < \gamma$.

Bài 2: (2.0 điểm)

- $f(x,y,z) = (x - y + mz + 1)^2 + [x + (m + 1)y - 2z + 2]^2 + [2x + 2y + (m - 4)z + 1]^2 \geq 0$,
 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - $f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + mz + 1 = 0 & (1) \\ x + (m + 1)y - 2z + 2 = 0 & (2) \\ 2x + 2y + (m - 4)z + 1 = 0 & (3) \end{cases}$ có nghiệm $(x;y;z)$.
 - Lấy (2) trừ (1) ta có: $(m + 2)y - (m + 2)z + 1 = 0$ (4)
Nhân (1) với (2) ta có: $2x - 2y + 2mz + 2 = 0$ (5)
Lấy (3) trừ (5) suy ra: $4y - (m + 4)z - 1 = 0$ (6)
Từ (4) và (6) suy ra: $m(m + 2) \neq 0$ có nghiệm y và z .
Rồi thế vào (1) có nghiệm x . Hệ (1), (2), (3) có nghiệm.
Do đó: khi $m \neq 0$ và $m \neq 2$ thì $\min(x,y,z) = 0$.
 - Nếu $m = -2$, khi đó: áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpki ta có:
 $f(x,y,z) = (x - y - 2z + 1)^2 + [x - y - 2z + 2]^2 + [2x + 2y - 6z + 1]^2$
 $= \frac{1}{2} [1^2 + (-1)^2 + 0^2][(x - y - 2z + 1)^2 + [x - y - 2z + 2]^2 + [2x + 2y - 6z + 1]^2] \geq \frac{1}{2} (-1)^2 = \frac{1}{2}$.
- Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \frac{x - y - 2z + 1}{1} = \frac{x - y - 2z + 2}{-1} \\ 2x + 2y - 6z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 5z - 2 \\ 2y = z + 1 \end{cases}$

Chọn $(x = -1; y = \frac{1}{2}; z = 0)$. Vậy tồn tại $f(-1; \frac{1}{2}; 0) = \frac{1}{2}$ hay khi $m = -2$ ta có $\min f(x; y; z) = \frac{1}{2}$.

- Nếu $m = 0$, khi đó: áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpki ta có:

$$f(x, y, z) = (x - y + 1)^2 + [x + y - 2z + 2]^2 + [2x + 2y - 4z + 1]^2$$

$$= \frac{1}{2} [0^2 + 1^2 + (\frac{1}{2})^2] [(x + y + 1)^2 + [x + y - 2z + 2]^2 + [2x + 2y - 4z + 1]^2] \geq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{9}{5}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} \frac{x - y - 2z + 2}{1} = \frac{2x + 2y - 4z + 1}{-1/2} \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x = 10z - 9 \\ 10y = 10z + 1 \end{cases}$$

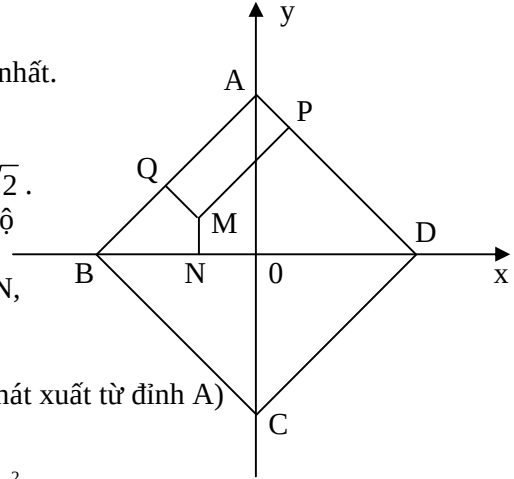
Chọn $(x = -\frac{9}{5}; y = \frac{1}{10}; z = 0)$. Vậy tồn tại $f(-\frac{9}{5}; \frac{1}{10}; 0) = \frac{9}{5}$ hay khi $m = 0$ ta có

$$\min f(x; y; z) = \frac{9}{5}.$$

- Kết luận: $m = 0$ thì giá trị nhỏ nhất của $f(x, y, z)$ là lớn nhất.

Bài 3: (2.0 điểm)

- Không giảm tính tổng quát, xét hình vuông có cạnh $\sqrt{2}$.
Đặt hình vuông ABCD lên mặt phẳng có hệ trục tọa độ Oxy sao cho $A(0;1)$, $B(-1;0)$, $C(0;-1)$, $D(1;0)$.
Gọi $M(x; y)$ là điểm ở trong hình vuông ABCD, hạ MN, MP, MQ lần lượt vuông góc với BD, DA, AB tại N, P, Q.
- Do đó: $MP \cdot MQ = MN^2$ (1) (xét 2 cạnh hình vuông phát xuất từ đỉnh A)
- AB: $x - y + 1 = 0$, AD: $x + y - 1 = 0$.
- (1) $\Leftrightarrow \frac{|x - y + 1|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|x + y - 1|}{\sqrt{2}} = |y|^2 \Leftrightarrow |x^2 - (y - 1)^2| = 2y^2$
- $M(x; y)$ ở trong hình vuông nên $x - y + 1 > 0$, và $x + y - 1 < 0$.
- Do đó: $x^2 - (y - 1)^2 = (x - y + 1)(x + y - 1) < 0$ nên (1) $\Leftrightarrow x^2 - (y - 1)^2 = -2y^2 \Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 2$
- Vậy tập hợp các điểm M là cung BD, cung $\frac{1}{4}$ đường tròn C, bán kính $R = \sqrt{2}$.
- Từ kết quả trên ta kết luận: Tập hợp các điểm M là 4 cung $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm là các đỉnh của hình vuông và có bán kính bằng cạnh của hình vuông.



Bài 4: (4.0 điểm)

Câu a (2 đ)

- $\begin{cases} a(x - a)^2(x - 2\sqrt{2}) + 1 \leq 0 \\ x > a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - a)^2 ax - 2\sqrt{2}a(x - a)^2 + 1 \leq 0 \\ x > a > 0 \end{cases}$
- $\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{(x - a)^2 a} \leq 2\sqrt{2} \\ x > a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(x - a) + \frac{1}{2}(x - a) + a + \frac{1}{(x - a)^2 a} \leq 2\sqrt{2} \\ x > a > 0 \end{cases} \quad (1)$
- Do (2) nên $x - a$ và a là hai số dương, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 4 số dương ta được:
- $\frac{1}{2}(x - a) + \frac{1}{2}(x - a) + a + \frac{1}{(x - a)^2 a} \geq 4\sqrt{\frac{1}{4}} = 2\sqrt{2} \quad (3)$

- Do đó (1) chỉ đúng khi dấu đẳng thức xảy ra tại (3) tức là:

$$\frac{1}{2}(x-a) = a = \frac{1}{(x-a)^2 a} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ a = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

- Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và nghiệm của hệ là: $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu b (2 đ)

- $n > 2$: $|\sin^n x + \cos^n x| \leq 1$ dấu đẳng thức khi $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ và $|\operatorname{tg} x + \frac{1}{4} \cot x|^m \geq 1$ với $x \neq \frac{k\pi}{2}$ nên phương trình vô nghiệm.

- $n = 2$: Phương trình trở thành: $(\operatorname{tg} x + \frac{1}{4} \cot x)^m = 1$ có nghiệm x_0 ; $\operatorname{tg} x_0 = \frac{1}{2}, \forall m \in \mathbb{N}^*$.

- $n = 1$: Đặt $f(x) = (\operatorname{tg} x + \frac{1}{4} \cot x)^m - (\sin x + \cos x), x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

f liên tục trên $(0; \frac{\pi}{2})$. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$. Gọi $x_0 \in (0; \frac{\pi}{2})$, $\operatorname{tg} x_0 = \frac{1}{2}$, và ta tính được:

$$f(x_0) = 1 - (\sin x_0 + \cos x_0) = 1 - (\frac{1}{2} \cos x_0 + \cos x_0) = 1 - \frac{3}{2} \cos x_0 = 1 - \frac{3}{\sqrt{5}} < 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm.

- Kết luận: phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $m \in \mathbb{N}^*$ và $n \in \{1, 2\}$.
-

**SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ****ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC PTTH
NĂM HỌC 2000 - 2001.****ĐỀ CHÍNH THỨC****SBD:****MÔN: TOÁN BẢNG A VÒNG 2.**
(180 phút, không kể thời gian giao đề)**Bài 1:** (2 điểm)

Cho dãy số (a_n) , $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$. Chứng minh: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$.

Bài 2: (3 điểm)

a/ Tìm $p \in \mathbb{N}^*$ sao cho hệ
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^p x_i = 4 \\ \sum_{i=1}^p x_i^{-1} = 4 \\ x_i > 0, \forall i \in \overline{1, p} \end{cases}$$
 có nghiệm.

b/ Với p tìm được ở câu a/, hãy xác định tập hợp tất cả các giá trị của tổng:

$$\sum_{i=1}^p \frac{a_i}{1-a_i^2} \quad \text{với } a_i > 0 \text{ và } \sum_{i=1}^p a_i^2 = 1.$$

Bài 3: (3 điểm) Với hai đường thẳng MN , PQ chéo nhau trong không gian, kí hiệu $d(MN, PQ)$ và (MN, PQ) lần lượt là khoảng cách và góc giữa hai đường thẳng MN , PQ .

a/ Chứng minh rằng nếu tứ diện $ABCD$ thỏa điều kiện:

$$d(AB, CD) = d(AC, BD) = d(AD, BC)$$

thì trong ba số: $\cotg(AB, CD)$; $\cotg(AC, BD)$; $\cotg(AD, BC)$ có một số bằng tổng hai số còn lại.

b/ Chứng minh rằng nếu tứ diện $ABCD$ thỏa điều kiện:

$$d(AB, CD) = d(AC, BD) = d(AD, BC)$$

$$\text{và } (AB, CD) = (AC, BD) = (AD, BC)$$

thì nó là hình chóp tam giác đều.

Bài 4: (3 điểm) Tìm số nhỏ nhất trong các cặp tập hợp có giao khác tập $\emptyset$ trong 2000 tập hợp phân biệt sao cho với 3 tập hợp bất kì trong 2000 tập hợp đó đều có ít nhất một cặp tập hợp có giao khác tập $\emptyset$.

SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC PTTH
NĂM HỌC 2000-2001.

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI MÔN TOÁN
BẢNG A – VÒNG 2.

Bài 1: (2.0 điểm)

- $a_{k+1}^2 = a_k^2 + \frac{1}{a_k^2} + 2 \Rightarrow \sum_{i=2}^n a_i^2 = \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{a_j^2} + 2(n-1).$
- $a_n^2 = 2n-1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{a_j^2}$. Vậy $a_n > \sqrt{2n-1}$, $\forall n \geq 2$.
- $a_k^2 > 2k-1 \quad \forall k \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{a_k^4} < \frac{1}{(2k-1)^2} < \frac{1}{(2k-1)^2 - 1} = \frac{1}{4k(k+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right).$
- Suy ra: $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{a_k^4} < \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n-1} \right) < \frac{1}{4} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{a_j^4} < 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$
- Suy ra: $\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{a_j^2} \leq \sqrt{(n-1) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{a_j^4}} < \sqrt{(n-1) \frac{5}{4}} \quad (n \geq 2).$
- Vậy: $a_n^2 < 2n-1 + \frac{\sqrt{5(n-1)}}{2} \quad (n \geq 2).$
- Suy ra: $n \geq 2; \sqrt{2n-1} < a_n < \sqrt{2n-1 + \frac{\sqrt{5(n-1)}}{2}} \Rightarrow \sqrt{2 - \frac{1}{n}} < \frac{a_n}{\sqrt{n}} < \sqrt{2n-1 + \frac{\sqrt{5(n-1)}}{2}}.$
- Do đó: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}.$

Bài 2: (2.0 điểm)

Câu a (1 đ)

- Do: $16 = \left(\sum_{i=1}^p x_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^p \frac{1}{x_i} \right) \geq p^2 \Rightarrow p \leq 4.$
- $p = 4$: Khi đó: $x_i = 1, i \in \overline{1, 4}$. Vậy hệ có nghiệm.
- $p = 3$: Chọn $x_1 = 1$ và $\begin{cases} x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 \cdot x_3 = 1 \end{cases}$ có nghiệm. Nên (x_1, x_2, x_3) là nghiệm của hệ.
- $p = 2$: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$ có nghiệm. Nên (x_1, x_2) là nghiệm của hệ.
- $p = 1$: Vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm khi $p = 2, p = 3, p = 4$.

Câu b (2 đ)

- Ta có: $f(a_1, a_2, \dots, a_p) = \sum_{i=1}^p \frac{a_i^2}{a_i(1-a_i^2)}.$
- Xét hàm: $g(x) = x(1-x^2), 0 < x < 1; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$ Ta có: $\max_{(0;1)} g(x) = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$
- Do đó: $f(a_1, a_2, \dots, a_p) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \sum_{i=1}^p a_i^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi: $\frac{p}{3} = 1$ hay $p = 3$.

- $p = 2$: $f(a_1, a_2) = \frac{a_1}{a_2^2} + \frac{a_2}{a_1^2} \geq 2 \frac{1}{\sqrt{a_1 \cdot a_2}} \geq 2\sqrt{2}$ vì $a_1^2 + a_2^2 = 1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(a_1, a_2) = \frac{a_1}{1-a_1^2} + \frac{\sqrt{1-a_1^2}}{a_1^2}$ liên tục trên $(0;1)$. Khi $a_1 \rightarrow 0$ thì $f(a_1, a_2) \rightarrow +\infty$.
Vậy $p = 2$, tập giá trị là: $[2\sqrt{2}; +\infty)$.
- $p = 3$: Chọn $a_1 = \sqrt{1-2x}$; $a_2 = \sqrt{x}$; $a_3 = \sqrt{x}$, $0 < x < \frac{1}{2}$. Thỏa giả thiết:
 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 - 2x + x + x = 1$. $f(a_1, a_2, a_3) = \frac{\sqrt{1-2x}}{2x} + \frac{\sqrt{x}}{1-x} + \frac{\sqrt{x}}{1-x} = g(x)$ liên tục trên $(0; \frac{1}{2})$; $g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$. Vậy tập giá trị là: $\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$.
- $p = 4$: $f(a_1, a_2, \dots, a_p) > \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Chọn $a_1 = \sqrt{1-2x}$; $a_2 = \sqrt{x}$; $a_3 = \sqrt{x}$, $a_4 = \sqrt{x}$ thỏa giả thiết: $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1 - 3x + x + x + x = 1$ với $0 < x < \frac{1}{3}$;
 $f(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{\sqrt{1-2x}}{2x} + \frac{\sqrt{x}}{1-x} + \frac{\sqrt{x}}{1-x} + \frac{\sqrt{x}}{1-x} = g(x)$ liên tục trên $(0; \frac{1}{3})$;
 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} g(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$. Tập giá trị là: $\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$.

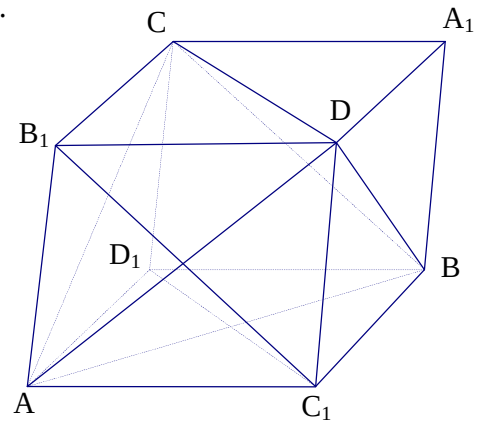
Bài 3: (3 điểm)

Câu a (2 đ)

- Dựng hình hộp ngoại tiếp tứ diện $AC_1BD_1B_1DA_1C$.
- Giả thiết $d(AB, CD) = d(AC, BD) = d(AD, BC)$ suy ra các mặt của hình hộp cùng diện tích. Đặt $a = AB$, $a_1 = CD$, $AC = b$, $BC = b_1$, $AD = c$, $BC = c_1$, $AD_1 = z$, $AC_1 = y$, $AB_1 = x$.
- Từ hình bình hành AC_1BD_1 ta có:

$$a^2 + a_1^2 = 2(y^2 + z^2); \quad \cos(AB, CD) = \frac{\left| \frac{a^4}{4} + \frac{a_1^4}{4} - y^2 \right|}{\frac{1}{2} a \cdot a_1}$$

$$\cos(AB, CD) = \frac{|y^2 - z^2|}{a \cdot a_1}$$



- Chú ý: $S = dtAC_1BD_1 = a_1 a \cdot \sin(AB, CD)$. Do đó: $\cotg(AB, CD) = \frac{|y^2 - z^2|}{2S}$

$$\text{Tương tự: } \cotg(AC, BD) = \frac{|z^2 - x^2|}{2S}; \quad \cotg(AD, BC) = \frac{|x^2 - y^2|}{2S}$$

- Nếu $x \leq y \leq z$ thì $\cotg(AB, CD) + \cotg(AC, BD) + \cotg(AD, BC) = \cotg(AD, BD)$.
- Các trường hợp khác cũng có kết quả như thế.

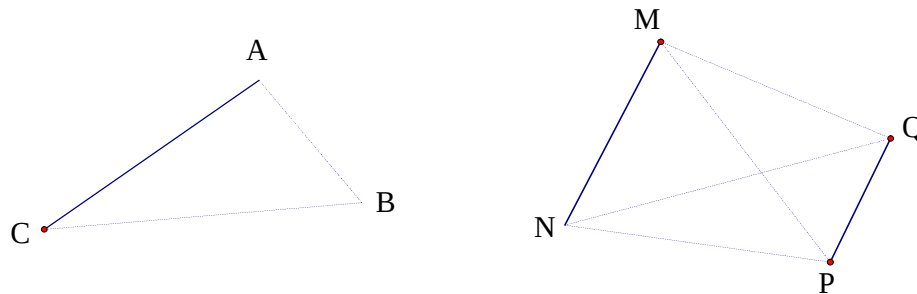
Câu b (1 đ)

- Từ các kết quả câu a/ nếu thêm $(AB, CD) = (AC, BD) = (AD, BC)$ thì $\cotg(AB, CD) = \cotg(AC, BD) = \cotg(AD, BC) = 0$.
- Suy ra các cặp cạnh đối của tứ diện ABCD vuông góc đôi một.

- Lúc này ta cũng có: $\begin{cases} a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2 \\ a.a_1 = b.b_1 = c.c_1 \end{cases}$ (Do $x = y = z$)
- Suy ra $\{a, a_1\} = \{b, b_1\} = \{c, c_1\}$. Vì vậy phải có ít nhất một mặt của tứ diện ABCD là một tam giác đều. Từ đó ABCD là hình chóp tam giác đều.

Bài 4: (2 điểm)

- Giải tổng quát đối với n tập hợp (trong bài $n = 2000$).
Ta có hình biểu diễn (K) của n tập hợp như sau: n tập hợp được biểu diễn bởi n điểm phân biệt trong mặt phẳng (không có 3 điểm nào thẳng hàng), hai tập hợp có giao khác $\emptyset$ biểu diễn bởi 1 đường liền nét (—) nối với hai điểm biểu diễn, hai tập hợp có giao bằng $\emptyset$ biểu diễn 1 đường không liền nét (---) nối hai điểm biểu diễn.
Kí hiệu P là tập hợp n điểm, $k(n)$ là số đoạn nối liền nét của một biểu diễn (K) thỏa giả thiết bài toán (tức là: với 3 điểm bất kỳ của P có ít nhất một đoạn liền nét). Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất $d(n)$ của $k(n)$.



- Ta luôn luôn có thể giả thiết rằng : Trong biểu diễn (K) tồn tại hai điểm A, B mà đoạn nối AB là không liền nét. Đặt $Q = P \setminus \{A, B\}$, như vậy, Q có $n-2$ điểm, trong biểu diễn (K) ta bỏ đi đoạn AB và tất cả các đoạn nối với A, nối với B và ta được biểu diễn (K^*) của tập Q thỏa điều kiện bài toán. Gọi $k(n-2)$ là số các đoạn liền nét trong biểu diễn (K^*).
- Lấy $C \in Q$, suy ra các đoạn CA, CB phải có ít nhất một đoạn liền nét (vì đoạn AB không liền nét). Vì Q có $n-2$ điểm, nên suy ra : $k(n) \geq n-2 + k(n-2)$ (*).
- Công thức truy hồi (*) cho ta : $k(n) \geq (n-2) + (n-4) + \dots + 4 + k(4)$ vì n chẵn.
- Suy ra : $k(n) \geq (n-2) + (n-4) + \dots + 4 + d(4) \geq (n-2) + (n-4) + \dots + 4 + 2 = \frac{n(n-2)}{4}$ (do $d(4) = 2$).

Chứng tỏ : Tồn tại $d(n) = \frac{n(n-2)}{4}$.

- Chọn n tập hợp để có $d(n) = \frac{n(n-2)}{4}$ như sau : Nhóm X gồm $\frac{n}{2}$ tập hợp giao nhau khác $\emptyset$ từng đôi một, nhóm Y gồm $\frac{n}{2}$ tập hợp giao nhau khác $\emptyset$ từng đôi một. Mỗi tập hợp của nhóm này thì không có giao khác $\emptyset$ với bất kỳ một tập hợp của nhóm kia. Cách chọn trên thỏa giả thiết bài toán.
- Số đoạn nối liền nét giữa $\frac{n}{2}$ điểm của X là : $(\frac{n}{2}-1) + (\frac{n}{2}-2) + (\frac{n}{2}-3) + \dots + 1 = \frac{n(n-2)}{8}$
- Số đoạn nối liền nét giữa n điểm của X và Y là : $\frac{n(n-2)}{4}$.
- Vậy $d(n) = \frac{n(n-2)}{4}$. Thế $n = 2000$ ta được số cần tìm là : $\frac{2000 \cdot 1998}{4} = 999000$.

SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC PTTH
NĂM HỌC 2000-2001.

ĐỀ CHÍNH THỨC
SBD: _____

MÔN: TOÁN BẢNG B VÒNG 1.
(180 phút, không kể thời gian giao đề)

Bài 1: (2.5 điểm) Cho phương trình: $\sin 2x + \cos 2x + 4\sin^3 x - 4\sin x + 2m\cos x + 1 = 0$.
Tìm giá trị của m để cho phương trình có tập nghiệm là:

$$T = \left\{ x / x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Bài 2: (2.5 điểm) Giải phương trình: $16^{x^2(2x-1)} - 2.4^{2x-1} = 0$.

Bài 3: (2.5 điểm) Cho tứ diện ABCD có hai cạnh đối bằng b, c và các cạnh còn lại bằng a.

a/ Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ một điểm tùy ý trong không gian đến các đỉnh của tứ diện.

b/ Giả sử tứ diện ABCD thay đổi vị trí trong không gian nhưng có ba đỉnh A, B, C lần lượt ở trên mặt cầu cố định và đồng tâm.

Chứng minh rằng đỉnh D luôn ở trong một hình cầu cố định khi độ dài a, b, c thay đổi thỏa các giả thiết cho.

Bài 4: (2.5 điểm) Tìm tham số a để cho hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} a(x-a)^2(x-2\sqrt{2})+1 \leq 0 \\ x > a > 0 \end{cases}$$

**SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC PTTH
NĂM HỌC 2000-2001.**

**HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI MÔN TOÁN
BẢNG B – VÒNG 2.**

Bài 1: (2.5 điểm)

- $\sin 2x + \cos 2x + 4\sin^3 x - 4\sin x + 2m\cos x + 1 = 0$ (1)
 $\Leftrightarrow 2\sin x \cos x + 2\cos^2 x + 4\sin x(\sin^2 x + 1) + 2m\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\sin x + \cos x - 2\sin x \cos x + m) = 0$
- $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x - 2\sin x \cos x + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x + \cos x - 2\sin x \cos x + m = 0 \end{cases}$ (2)
- Do đó (1) có tập nghiệm $T = \{ x / x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ khi chỉ khi (2) chỉ có nghiệm thuộc T hoặc (2) vô nghiệm.

- Xét phương trình (2): $\sin x + \cos x - 2\sin x \cos x + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \\ f(t) = t^2 - t - m \\ |t| \leq \sqrt{2} \end{cases}$ (3) (I)

- Phương trình (2) có nghiệm thuộc T $\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$

- Thử lại: $m = 1$: Khi đó (3) $\Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ hoặc $t = 2$.

$$\text{Hệ (I) trở thành: } \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = -1 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

Vậy T không phải là tập nghiệm của phương trình đã cho.

- Thử lại: $m = -1$: Khi đó (3) $\Leftrightarrow t^2 - t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = 1$.

$$\text{Hệ (I) trở thành: } \begin{cases} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy T không phải là tập nghiệm của phương trình đã cho.

- Phương trình (2) vô nghiệm:

- $f(t)$ là tam thức bậc hai có $\Delta = 5 + 4m$, $\frac{S}{2} = \frac{1}{2}$, kí hiệu t_1, t_2 là hai nghiệm của $f(t) = 0$.

- Do $-\sqrt{2} < \frac{S}{2} < \sqrt{2}$ nên hệ (1) vô nghiệm khi chỉ khi:

- $\Delta < 0$ hoặc $\begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 < -\sqrt{2} < \sqrt{2} < t_2 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{5}{4}$ hay $\begin{cases} f(-\sqrt{2}) < 0 \\ f(\sqrt{2}) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{5}{4}$ hay $m > 1 + \sqrt{2}$

- Vậy các giá trị m thỏa đề bài là: $m < -\frac{5}{4}$ hay $m > 1 + \sqrt{2}$.

Bài 2: (2.5 điểm)

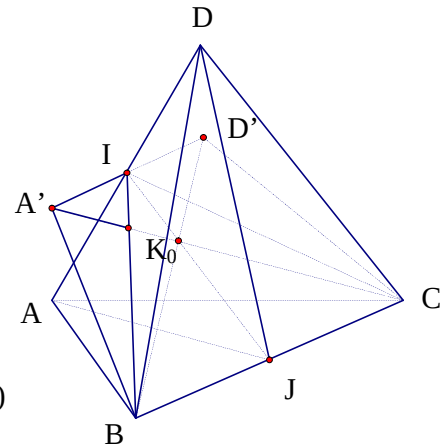
- Biến đổi phương trình: $16^{x^2(2x-1)} - 2 \cdot 4^{2x-1} = 0 \Leftrightarrow 2^{4x^2(2x-1)} = 2^{4x-1} \Leftrightarrow 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$ (1)
- Đa thức $f(t) = 8t^3 - 4t^2 - 4t + 1 = 0$ có tối đa 3 nghiệm và ta có: $f(-1) = -7$; $f(0) = 1$; $f(1/2) = -1$, $f(1) = 1$
 $f(t)$ liên tục trên khoảng $(-1; 1)$ và $f(-1) \cdot f(0) < 0$, $f(0) \cdot f(1/2) < 0$, $f(1/2) \cdot f(1) < 0$ nên $f(x) = 0$ có 3 nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$.
- Do $f(t) = 0$ có đúng 3 nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$, nên ta có thể đặt $x = \cos a$ với $0 < a < \pi$.
- Phương trình (1) trở thành:
 $8\cos^3 a - 4\cos^2 a - 4\cos a + 1 = 0 \Leftrightarrow 4\cos a(2\cos^2 a - 1) = 4(1 - \sin^2 a) - 1$
 $\Leftrightarrow 4\cos a \cdot \cos 2a = 3 - 4\sin^2 a \Leftrightarrow 4\sin a \cdot \cos a \cdot \cos 2a = 3\sin a - 4\sin^3 a$ (do $\sin a > 0$)
 $\Leftrightarrow \sin 4a = \sin 3a \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 3a + k2\pi \\ 4a = \pi - 3a + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (\text{với } 0 < a < \pi)$
 $\Leftrightarrow a = \frac{\pi}{7}$ hay $a = \frac{3\pi}{7}$ hay $a = \frac{5\pi}{7}$.

Câu 3 (2.5 đ)**Câu a** (1.75 đ)

- Ta có thể giả sử $AD = b$, $BC = c$ và các cạnh còn lại bằng a . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC . Ta dễ dàng suy ra I vuông góc với AD và BC và IJ chính là trục đối xứng của tứ diện.
- Lấy M tùy ý trong không gian, M' là điểm đối xứng của M qua IJ suy ra trung điểm K của MM' chính là hình chiếu của M trên đường thẳng IJ và ta có:
- $2(MA + MB + MC + MD) = MA + MB + MC + MD + M'A + M'B + M'C + M'D$
 $= (MA + M'A) + (MB + M'B) + (MC + M'C) + (MD + M'D)$
 $\leq 2KA + 2KB + 2KC + 2KD$ (1).
(Do tính chất: trung tuyến của một tam giác thì bé hơn nửa tổng của hai cạnh cùng xuất phát từ một đỉnh của nó).
- Do đó: $MA + MB + MC + MD \leq KA + KB + KC + KD$. Bài toán trở thành tìm điểm K trên IJ sao cho $KA + KB + KC + KD$ bé nhất.
- Trong mặt phẳng (BCI) dựng hình thang $BCD'A'$ sao cho IJ là trung điểm của hai đáy và $IA = IA'$, $ID = ID'$. Ta thấy rằng: với K tùy ý trên I thì $KA = KA'$ và $KD = KD'$. Do đó:
 $KA + KB + KC + KD = KA' + KB + KC + KD' = (KA' + KC) + (KB + KD') \leq A'C + BD'$.
- Vậy $KA + KB + KC + KD$ nhỏ nhất khi K chính là giao điểm K_0 của hai đường chéo $A'C$ và BD' .
- Tính IJ : $IJ^2 = DJ^2 - ID^2 = DC^2 - JC^2 - ID^2 = a^2 - \frac{c^2}{4} - \frac{b^2}{4} \Rightarrow IJ = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4} - \frac{b^2}{4}}$.
- Tính BD' : $BD'^2 = \left(\frac{BC + A'D'}{2}\right)^2 + IJ^2 = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + a^2 - \frac{c^2}{4} - \frac{b^2}{4} = a^2 + \frac{bc}{2}$.
- Tổng các khoảng cách nhỏ nhất là: $d = 2BD' = \sqrt{4a^2 + 2bc}$.

Câu a (0.75 đ)

- Gọi r_1, r_2, r_3 là bán kính các mặt cầu tâm O và lần lượt đi qua các đỉnh A, B, C . Ta có:
- $OD < OC + DC < OC + AB < OC + OA + OB = r_1 + r_2 + r_3$. Do đó D ở trong hình cầu cố định tâm O , bán kính $R = r_1 + r_2 + r_3$.

Bài 4: (4.0 điểm)

- $\begin{cases} a(x-a)^2(x-2\sqrt{2})+1 \leq 0 \\ x > a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2ax - 2\sqrt{2}a(x-a)^2 + 1 \leq 0 \\ x > a > 0 \end{cases}$
 - $\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{(x-a)^2a} \leq 2\sqrt{2} \\ x > a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(x-a) + \frac{1}{2}(x-a) + a + \frac{1}{(x-a)^2a} \leq 2\sqrt{2} \\ x > a > 0 \end{cases} \quad (1)$
 - Do (2) nên $x-a$ và a là hai số dương, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 4 số dương ta được:
 - $\frac{1}{2}(x-a) + \frac{1}{2}(x-a) + a + \frac{1}{(x-a)^2a} \geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{4}} = 2\sqrt{2} \quad (3)$
 - Do đó (1) chỉ đúng khi dấu đẳng thức xảy ra tại (3) tức là:
- $$\frac{1}{2}(x-a) = a = \frac{1}{(x-a)^2a} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ a = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$
- Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và nghiệm của hệ là: $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

**SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ****ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC PTTH
NĂM HỌC 2000-2001.****ĐỀ CHÍNH THỨC****SBD:****MÔN: TOÁN BẢNG B VÒNG 2.**
(180 phút, không kể thời gian giao đề)**Bài 1:** (2.5 điểm) Tính các giới hạn sau:

$$a/ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 5^3 + 9^3 + \dots + (4n-3)^3}{[1+5+9+\dots+(4n-3)]^2} \quad b/ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 5x}{\cos 3x} \right)^{\frac{1}{x \sin x}}.$$

Bài 2: (2.5 điểm) Cho $P(x)$ là đa thức bậc n ($n > 1$) và có n nghiệm phân biệt $x_1, x_2, \dots, x_n$. $P'(x)$ là đạo hàm của $P(x)$.a/ Chứng minh phương trình $P'(x) = 0$ có $n-1$ nghiệm phân biệt.b/ Kí hiệu $P_i(x)$ là đa thức sao cho: $P(x) = (x - x_i) \cdot P_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$\text{Rút gọn biểu thức: } \frac{P_1(x)}{P'(x_1)} + \frac{P_2(x)}{P'(x_2)} + \dots + \frac{P_n(x)}{P'(x_n)}.$$

Bài 3: (3 điểm) Cho đường thẳng cố định a và một điểm A cố định trên a . Gọi (C) là đường tròn lưu động ở trong một nửa mặt phẳng (α) có bờ a . (C) có bán kính không đổi R và luôn tiếp xúc với a , gọi M là tiếp điểm. Gọi I là tâm của đường tròn (C) . Chứng minh rằng trong mặt phẳng chứa đường tròn (C) , có một parabol (P) cố định sao cho trục đẳng phương của (C) và đường tròn đường kính AI luôn luôn tiếp xúc (P) khi M thay đổi trên a .**Bài 4:** (2 điểm) Tìm số nhỏ nhất trong các cặp tập hợp có giao khác tập $\emptyset$ trong 2000 tập hợp phân biệt sao cho với 3 tập hợp bất kì trong 2000 tập hợp đó đều có ít nhất một cặp tập hợp có giao khác tập $\emptyset$.

SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC PTTH
NĂM HỌC 2000-2001.

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI MÔN TOÁN
BẢNG B – VÒNG 2.

Bài 1: (2.5 điểm)

Câu a (1.50 đ)

- $1^3 + 5^3 + 9^3 + \dots + (4n-3)^3 = \sum_{i=1}^n (4i-3)^3 = \sum_{i=1}^n (64i^3 - 144i^2 + 108i - 27)$

$$= 64 \sum_{i=1}^n i^3 - 144 \sum_{i=1}^n i^2 + 108 \sum_{i=1}^n i - 27n.$$
- $1+5+9+\dots+(4n-3) = \frac{n(4n-2)}{2} = 2n^2 - n.$
- Mà ta có các công thức: $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}; \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$
- Do đó: $P(x) = 1^3 + 5^3 + 9^3 + \dots + (4n-3)^3$ là một đa thức bậc 4 có hệ số bậc 4 là $64/4 = 16.$
- Và $Q(x) = [1+5+9+\dots+(4n-3)]^2$ là một đa thức bậc 4 có hệ số bậc 4 là 4
- Do đó: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 5^3 + 9^3 + \dots + (4n-3)^3}{[1+5+9+\dots+(4n-3)]^2} = \frac{16}{4} = 4.$

Câu b (1 đ)

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 5x}{\cos 3x} \right)^{\frac{1}{x \sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\cos 3x} \right)^{\frac{\cos 3x}{\cos 5x - \cos 3x}} \right]^{\frac{\cos 5x - \cos 3x}{x \sin x \cdot \cos 3x}}$
- Vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{x \sin x \cdot \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 4x \sin x}{x \sin x \cdot \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{-8}{\cos 3x} \right] = -8.$
- Vì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\cos 3x} = 0$ và áp dụng công thức $\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$, nên $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 5x}{\cos 3x} \right)^{\frac{1}{x \sin x}} = e^{-8}.$

Bài 2: (2.5 điểm)

Câu a (1.0 đ)

- Ta có thể giả sử: $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$, áp dụng định lý Lagrange đối với hàm số liên tục $P(x)$ trên các đoạn $[x_1; x_2], [x_2; x_3], \dots, [x_i; x_{i+1}], \dots, [x_{n-1}; x_n]$ ta tồn tại $n-1$ số:
 $c_i \in (x_i; x_{i+1}), i \in \overline{1, n-1}$ sao cho $P'(c_i) = 0$. Vậy phương trình $P'(x) = 0$ có $n-1$ nghiệm phân biệt.

Câu a (1.0 đ)

- $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) \quad (a' \neq 0)$
 $P'(x) = a(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n) + a(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n) + \dots + a(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})$
 Do đó: $P'(x) = P_1(x) + P_2(x) + \dots + P_n(x).$
 $P'(x_i) = P_i(x_i) \neq 0 \quad (1)$ vì $P_k(x_i) = 0$ với $k \neq i, i \in \overline{1, n}.$
- $Q(x) = \frac{P_1(x)}{P'(x_1)} + \frac{P_2(x)}{P'(x_2)} + \dots + \frac{P_n(x)}{P'(x_n)}$ là đa thức bậc nhỏ hơn hay bằng $n-1.$
- Theo (1) ta có: $Q(x) = 1$, với $i \in \overline{1, n}.$ Điều này chứng tỏ $Q(x) = 1.$

Bài 3: (3 điểm)

- Trong mặt phẳng chọn hệ trục tọa độ Đề-các vuông góc Oxy, với Ox trùng với a, nửa mặt phẳng α là nửa mặt phẳng $y > 0$, O trùng A. Đặt $M(m;0)$ có tâm $I(m;R)$.

- Phương trình của (C) là:

$$(C): (x - m)^2 + (y - R)^2 = R^2 \text{ hay}$$

$$(C): x^2 + y^2 - 2mx - 2Ry + m^2 = 0.$$

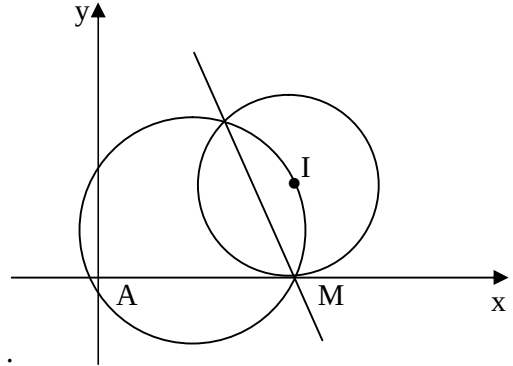
- Phương trình đường tròn đường kính AI là:

$$(C'): (x - m/2)^2 + (y - R/2)^2 = \frac{m^2 + R^2}{4} \text{ hay}$$

$$(C'): x^2 + y^2 - mx - Ry = 0.$$

- Phương trình trục đẳng phương của hai đường tròn (C) và (C') là:

$$(d): mx + Ry - m^2 = 0 \Leftrightarrow (d): y = f(x) = -\frac{m}{R}x + \frac{m^2}{R}.$$



- Xét hàm số $y = g(x) = -\frac{1}{4R}x^2$.

$$\text{Hệ } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{m}{R}x + \frac{m^2}{R} = -\frac{1}{4R}x^2 \\ -\frac{m}{R} = -\frac{x}{2R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2m)^2 = 0 \\ x = 2m \end{cases} \Leftrightarrow x = 2m.$$

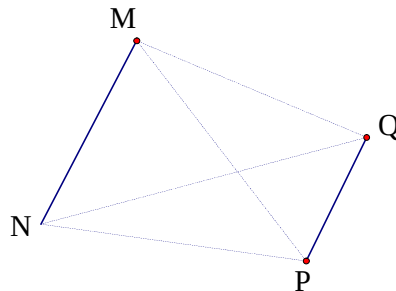
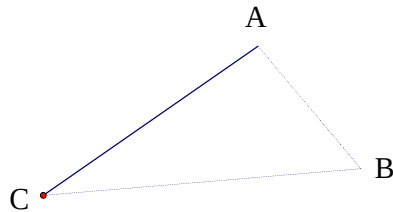
- Vậy Parabol $y = f(x) = -\frac{1}{4R}x^2$ luôn tiếp xúc với trục đẳng phương (d).

Bài 4: (2 điểm)

- Giải tổng quát đối với n tập hợp (trong bài n = 2000).

Ta có hình biểu diễn (K) của n tập hợp như sau: n tập hợp được biểu diễn bởi n điểm phân biệt trong mặt phẳng (không có 3 điểm nào thẳng hàng), hai tập hợp có giao khác $\emptyset$ biểu diễn bởi 1 đường liền nét (—) nối với hai điểm biểu diễn, hai tập hợp có giao bằng $\emptyset$ biểu diễn 1 đường không liền nét (---) nối hai điểm biểu diễn.

Kí hiệu P là tập hợp n điểm, k(n) là số đoạn nối liền nét của một biểu diễn (K) thỏa giả thiết bài toán (tức là: với 3 điểm bất kỳ của P có ít nhất một đoạn liền nét). Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất d(n) của k(n).



- Ta luôn luôn có thể giả thiết rằng : Trong biểu diễn (K) tồn tại hai điểm A, B mà đoạn nối AB là không liền nét. Đặt $Q = P \setminus \{A, B\}$, như vậy, Q có n-2 điểm, trong biểu diễn (K) ta bỏ đi đoạn AB và tất cả các đoạn nối với A, nối với B và ta được biểu diễn (K*) của tập Q thỏa điều kiện bài toán. Gọi k(n-2) là số các đoạn liền nét trong biểu diễn (K*).
- Lấy $C \in Q$, suy ra các đoạn CA, CB phải có ít nhất một đoạn liền nét (vì đoạn AB không liền nét). Vì Q có n-2 điểm, nên suy ra : $k(n) \geq n-2 + k(n-2)$ (*).
- Công thức truy hồi (*) cho ta : $k(n) \geq (n-2) + (n-4) + \dots + 4 + k(4)$ vì n chẵn.
- Suy ra : $k(n) \geq (n-2) + (n-4) + \dots + 4 + d(4) \geq (n-2) + (n-4) + \dots + 4 + 2 = \frac{n(n-2)}{4}$
(do d(4) = 2).

Chứng tỏ : Tồn tại $d(n) = \frac{n(n-2)}{4}$.

- Chọn n tập hợp để có $d(n) = \frac{n(n-2)}{4}$ như sau : Nhóm X gồm $\frac{n}{2}$ tập hợp giao nhau khác $\emptyset$ từng đôi một, nhóm Y gồm $\frac{n}{2}$ tập hợp giao nhau khác $\emptyset$ từng đôi một. Mỗi tập hợp của nhóm này thì không có giao khác $\emptyset$ với bất kỳ một tập hợp của nhóm kia. Cách chọn trên thỏa giả thiết bài toán.
 - Số đoạn nối liền nét giữa $\frac{n}{2}$ điểm của X là : $(\frac{n}{2}-1) + (\frac{n}{2}-2) + (\frac{n}{2}-3) + \dots + 1 = \frac{n(n-2)}{8}$
 - Số đoạn nối liền nét giữa n điểm của X và Y là : $\frac{n(n-2)}{4}$.
 - Vậy $d(n) = \frac{n(n-2)}{4}$. Thế $n = 2000$ ta được số cần tìm là: $\frac{2000 \cdot 1998}{4} = 999000$.
-