

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Tính thể tích khối tròn xoay

Câu 1. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quanh trục hoành:

a) $y = \cos \frac{x}{2}, y = 0, x = 0, x = \pi$;

b) $y = x^2 - 2x, y = 0, x = 0, x = 2$.

Câu 2. Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng đó quay quanh trục Ox .

Câu 3. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau xung quanh trục Ox :

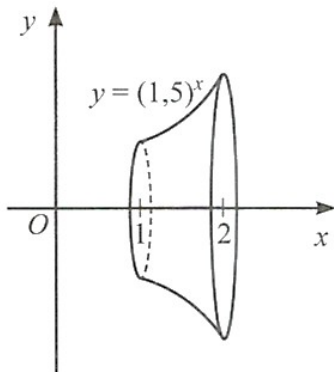
a) $y = 2\sqrt{x}, y = 0, x = 1, x = 4$;

b) $y = 4x, y = x^3, x = 0, x = 2$.

Câu 4. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 1$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

Câu 5. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh Ox hình phẳng giới hạn bởi đường parabol $y = x^2 - 3x + 2$, trục hoành và các đường thẳng $x = 1; x = 2$.

Câu 6. Cho đồ thị hàm số $y = (1,5)^x$ và khối tròn xoay như Hình.



a) Hình phẳng được giới hạn bởi các đường nào để khi quay quanh trục Ox ta được khối tròn xoay như Hình?

b) Tính thể tích khối tròn xoay đó.

Giải

a) Hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (1,5)^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 1, x = 2$.

b) Thể tích khối tròn xoay đó là:

$$V = \pi \int_1^2 \left[(1,5)^x \right]^2 dx = \pi \int_1^2 \left[(1,5)^{2x} \right] dx = \frac{1,5^{2x} \pi}{2 \ln(1,5)} \Big|_1^2 = \frac{45\pi}{32 \ln(1,5)}.$$

~!Câu 7. Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \cos \frac{x}{2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x = \frac{\pi}{2}$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng đó quay quanh trục Ox .

Câu 8. Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$.

a) Tính diện tích S của hình phẳng H .

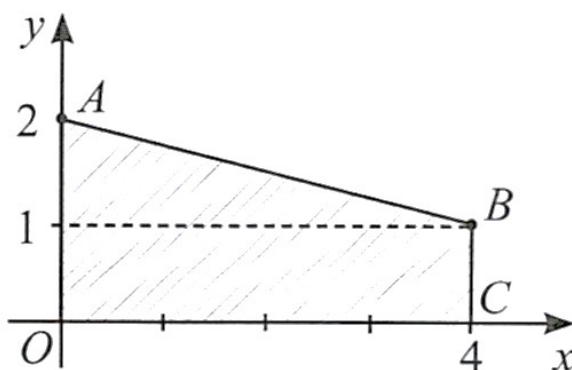
b) Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng H quay quanh trục Ox .

Câu 9. Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^2 - 2x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=2$.

a) Tính diện tích S của hình phẳng H .

b) Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng H quay quanh trục Ox .

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $OABC$ có $A(0;2), B(4;1)$ và $C(4;0)$ như Hình.



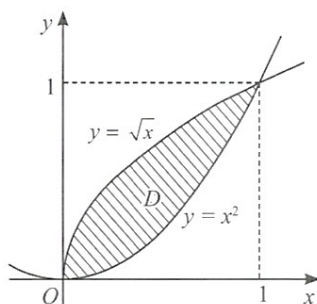
Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tứ giác $OABC$ quanh trục Ox .

Câu 11. Cho D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 2x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 1$.

a) Tính diện tích của D .

b) Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox .

Câu 12. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$ (Hình).



a) Tính diện tích của D .

b) Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox .

Câu 13. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 1 + x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 1$ quanh trục Ox .

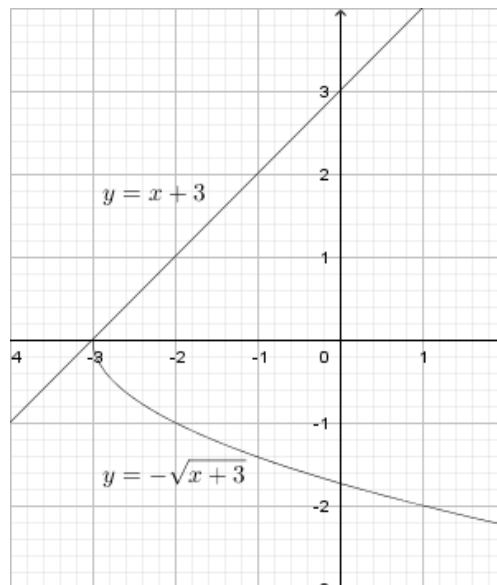
Câu 14. (Mã 110 2017) Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

Câu 15. (THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019) Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2, y = 0, x = 0$ và $x = 3$ quanh trục Ox

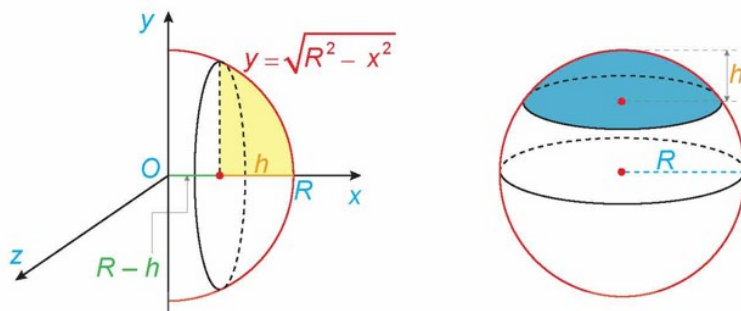
Câu 16. (THPT Cẩm Giàng 2 2019) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox .

Câu 17. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi hai đường $y = 2(x^2 - 1); y = 1 - x^2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành do (D) quay quanh trục Ox .

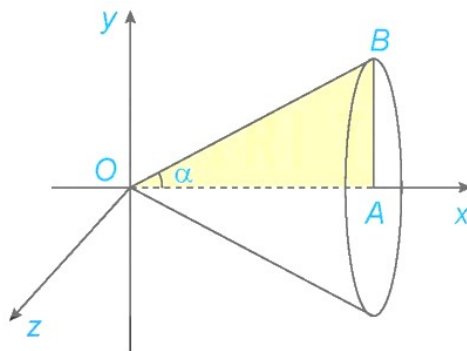
Câu 18. Tính thể tích vật tròn xoay tạo bởi miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x + 3, y = -\sqrt{x + 3}, x = 1$ xoay quanh trục Ox .



Câu 19. Khối chỏm cầu có bán kính R và chiều cao $h(0 < h \leq R)$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = R - h, x = R$ xung quanh trục Ox . Tính thể tích của khối chỏm cầu này.



Câu 20. Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA = a$ nằm trên trục Ox và $\angle AOB = \alpha \left(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4} \right)$. Gọi B là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox .

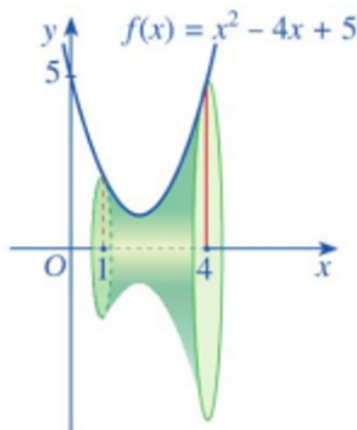


a) Tính thể tích V của B theo a và α .

b) Tìm α sao cho thể tích V lớn nhất.

Câu 21. Hãy sử dụng tích phân để chứng minh công thức tính thể tích khối trụ có chiều cao h và bán kính đáy bằng r (khối trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ kể cả hình trụ đó).

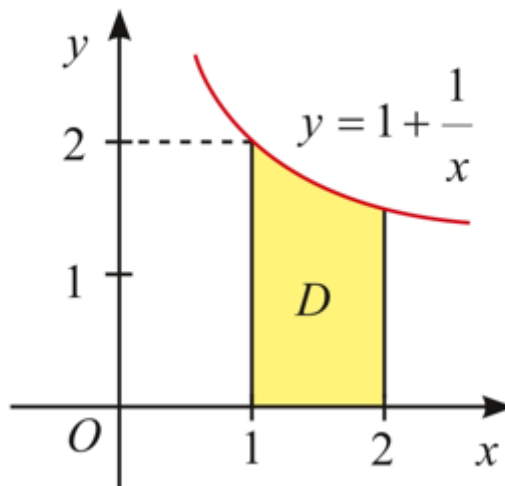
Câu 22. Cho khối tròn xoay như Hình.



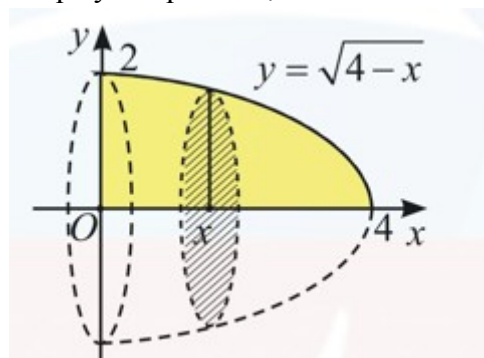
a) Hình phẳng được giới hạn bởi các đường nào để khi quay quanh trục Ox ta được khối tròn xoay như Hình?

b) Tính thể tích khối tròn xoay đó.

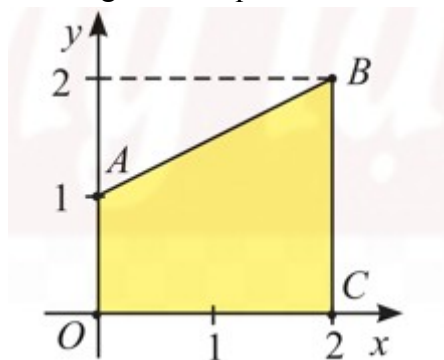
Câu 23. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 1 + \frac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox .



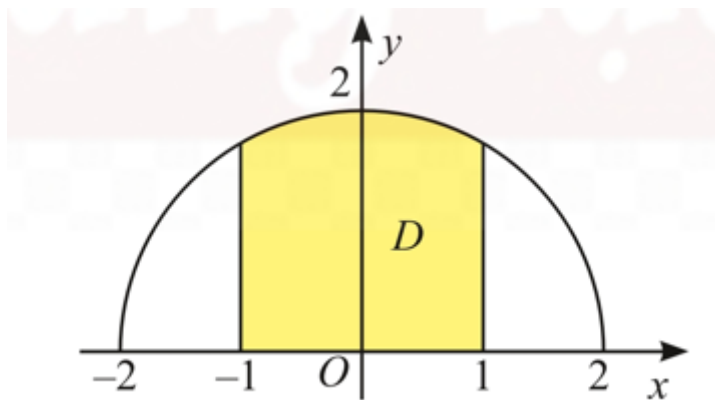
Câu 24. Cho D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4-x} (x \leq 4)$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox .



Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $OABC$ có $A(0;1)$, $B(2;2)$ và $C(2;0)$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình thang $OABC$ quanh trục Ox .



Câu 26. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ nửa đường tròn tâm O , bán kính $r = 2$ nằm phía trên trục Ox . Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1, x = 1$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox .

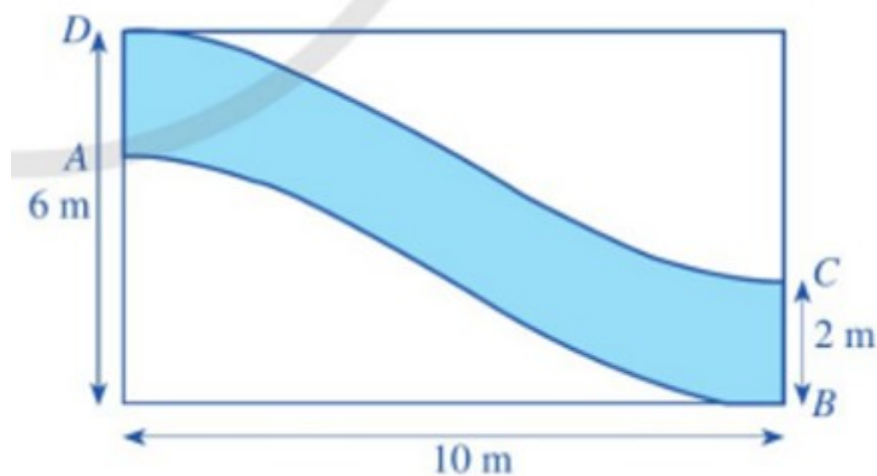


Dạng 2. Ứng dụng toán thực tế

Câu 27. Nghệ thuật làm gốm có lịch sử phát triển lâu đời và vẫn còn tồn tại cho đến ngày nay. Giả sử một bình gốm có mặt trong của bình là một mặt tròn xoay sinh ra khi cho phần đồ thị của hàm số

$y = \frac{1}{175}x^2 + \frac{3}{35}x + 5 (0 \leq x \leq 30)$ (tính theo cm) quay tròn quanh trục tung với trục hoành Ox . Hỏi để hoàn thành bình gốm đó ta cần sử dụng bao nhiêu cm^3 đất sét, biết rằng bình gốm đó có độ dày không đổi là $1cm$.

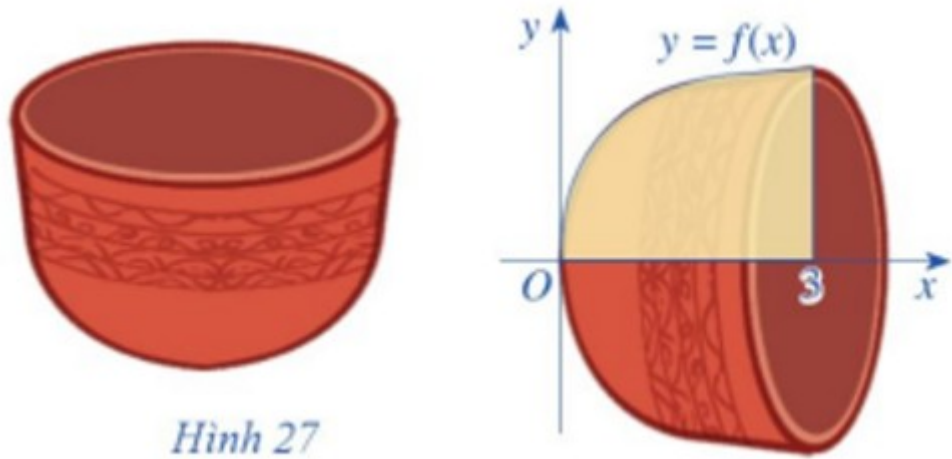
Câu 28. Cô Hạnh đổ bê tông một đường đi trong vườn (phần được tô màu) với kích thước được cho trong Hình. Biết rằng đường cong AB được cho bởi đồ thị của một hàm số liên tục và đường cong DC nhận được từ đường cong AB bằng cách tịnh tiến theo phương thẳng đứng lên phía trên $2m$.



Ngoài ra, cô Hạnh quyết định đổ lớp bê tông dày $15cm$ và giá tiền $1m^3$ bê tông là 1080000 đồng. Tính số tiền cô Hạnh cần dùng để đổ bê tông con đường đó.

Câu 29. Xét chiếc chén trong bộ ấm chén uống trà ở phần mở đầu, bạn Dương ước lượng được rằng chiếc chén được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

$f(x) = 0,14x^3 - 0,87x^2 + 1,92x + 0,85$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3$ quay quanh trục Ox (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là centimet).



Hình 27

Tính thể tích của chiếc chén (làm tròn đến hàng đơn vị của centimet khối).

Câu 30. Sau khi đo kích thước của thùng rượu vang (Hình), bạn Quân xác định thùng rượu vang có dạng hình tròn xoay được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

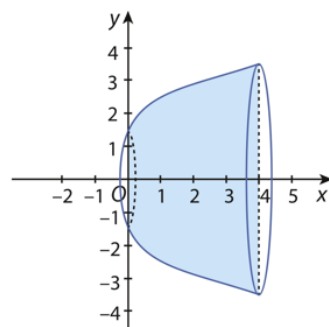


$y = -0,011x^2 - 0,071x + 40$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -35, x = 35$ quay quanh trục Ox . Tính thể tích thùng rượu vang đó, biết đơn vị trên mỗi trục tọa độ là centimet.

Câu 31. Hình b mô phỏng phần bên trong của một chậu cây có dạng khối tròn xoay tạo thành khi quay một phần của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x} + \frac{3}{2}$ với $0 \leq x \leq 4$ quanh trục hoành. Tính thể tích phần bên trong (dung tích) của chậu cây, biết đơn vị trên các trục Ox, Oy là decimet.

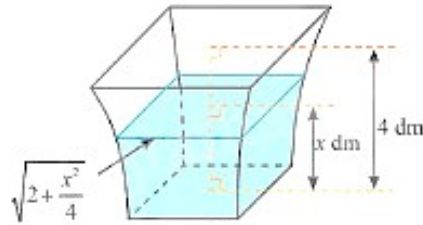


a)



b)

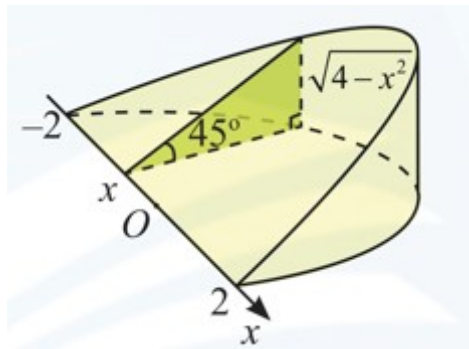
Câu 32. Một bình chứa nước có hình dạng như Hình.



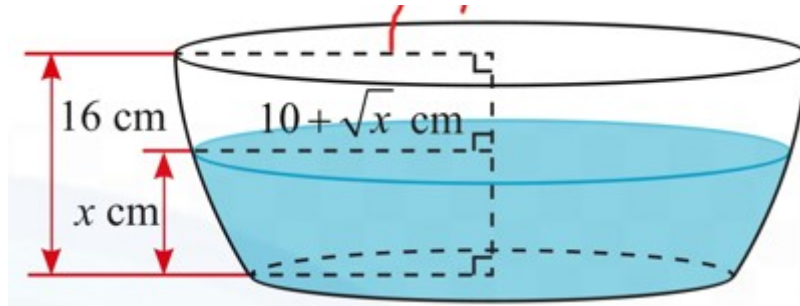
Hình 11

Biết rằng khi nước trong bình có chiều cao $x(dm)(0 \leq x \leq 4)$ thì mặt nước là hình vuông có cạnh $\sqrt{2 + \frac{x^2}{4}}(dm)$. Tính dung tích của bình.

Câu 33. Khi cắt một vật thể hình chóp nôm bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(-2 \leq x \leq 2)$, mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45° và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{4 - x^2}(dm)$. Tính thể tích của vật thể.



Câu 34. Nếu cắt chậu nước có hình dạng như Hình bằng mặt phẳng song song và cách mặt đáy $x(cm)(0 \leq x \leq 16)$ thì mặt cắt là hình tròn có bán kính $(10 + \sqrt{x})(cm)$. Tính dung tích của chậu.



Câu 35. Một chiếc lều mái vòm có hình dạng như Hình. Nếu cắt lều bằng mặt phẳng song song với mặt đáy và cách mặt đáy một khoảng $x(m)(0 \leq x \leq 3)$ thì được hình vuông có cạnh $\sqrt{9 - x^2}(m)$. Tính thể tích của lều.

