ĐỀ ĐỀ XUẤT DUYÊN HẢI BẮC BỘ NĂM 2023

MÔN TOÁN LỚP 11

TRƯỜNG THPT CHUYÊN HẠ LONG

Câu 1. (4 điểm) Cho số thực $a > 0$ và số nguyên $k \geq 2$. Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = a$ và $u_{n+1} = u_n + \frac{\sqrt[k]{u_n}}{n^2}$, $\forall n \geq 1$ hội tụ.

Câu 2. (4 điểm) Với mỗi số nguyên dương k, kí hiệu $S(k)$ là tổng các chữ số của k. Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$ sao cho với mọi số nguyên $n \geq 2023$ thì $P(n) \geq 0$ và $S(P(n)) = P(S(n))$.

Câu 3: (4 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Các đường cao BE, CF của tam giác ABC. T là giao của tiếp tuyến tại B và tiếp tuyến tại C của (O). TE, TF cắt tiếp tuyến tại A của (O) tại Q, P.

(a) Chứng minh $OP = OQ$

(b) Lấy (AQC) cắt AB tại điểm $Q_1 \neq A$; (APB) cắt AC tại điểm $P_1 \neq A$. Gọi J là giao của PP_1 và QQ_1. Chứng minh rằng $JBP = JCQ$

Câu: (4 điểm) Một số nguyên dương n được gọi là ***số biểu diễn*** nếu với mọi số nguyên dương a nguyên tố cùng nhau với n và với mọi ước nguyên tố lẻ p của $a^2 + n$, phương trình $x^2 + ny^2 = p$ có nghiệm nguyên. Tìm số nguyên dương biểu diễn lớn nhất.

Câu 5. (4 điểm) Với mỗi số nguyên $n \geq 3$, ta gọi tập $F = \{A_1; A_2; ...; A_{2^{n-1}}\}$ là *n-tốt* nếu $A_t \subset \{1;2;...;n\}$ và $A_i \cap A_j \cap A_k \neq \varnothing$ với mọi $1 \leq t \leq 2^{n-1}$ và $1 \leq i < j < k \leq 2^{n-1}$.

a) Giả sử $F = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ là một tập 3-tốt và $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{1\}$. Chứng minh rằng $1 \in A_4$.
b) Giả sử F là một tập *n-tốt,* chứng minh rằng tồn tại $k \in \{1;2;...;n\}$ sao cho $k \in A$ với mọi $A \in F$.

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ ĐỀ XUẤT DUYÊN HẢI BẮC BỘ NĂM 2023

Câu 1. (4 điểm) Cho số thực $a>0$ và số nguyên $k\geq 2$. Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=a$ và $u_{n+1}=u_n+\dfrac{\sqrt[k]{u_n}}{n^2}$, $\forall n\geq 1$ hội tụ.

Câu	Nội dung chấm	Điểm
1	Rõ ràng dãy (u_n) là dãy tăng	1,0
	Ta có $$u_{n+1}=u_n+\frac{\sqrt[k]{u_n}}{n^2}<\sqrt[k]{u_{n+1}u_n^{k-1}}+\frac{\sqrt[k]{u_{n+1}}}{n^2},$$ Suy ra $\sqrt[k]{u_{n+1}^{k-1}}<\sqrt[k]{u_n^{k-1}}+\dfrac{1}{n^2}$, $\forall n\geq 1.$	1,0
	Từ đây ta suy ra $$\sqrt[k]{u_n^{k-1}}<\sqrt[k]{a^{k-1}}+1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2},\ \forall n\geq 2.$$	0,5
	Dễ dàng chứng minh được $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2}<2,\ \forall n\geq 2.$$ Từ đó suy ra $$u_n<\sqrt[k-1]{\left(\sqrt[k]{a^{k-1}}+2\right)^k},\ \forall n\geq 2.$$ Vậy dãy số đã cho bị chặn trên, kết hợp với tính tăng được chứng minh ở trên ta suy ra dãy đã cho hội tụ.	1,5

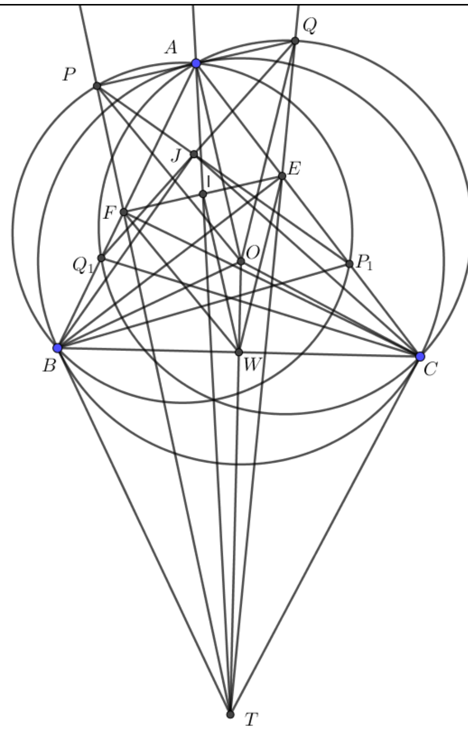
Câu 2. (4 điểm) Với mỗi số nguyên dương k, kí hiệu $S(k)$ là tổng các chữ số của k. Tìm tất cả các đa thức $P(x)\in \mathbf{Z}[x]$ sao cho với mọi số nguyên $n\geq 2023$ thì $P(n)\geq 0$ và $S(P(n))=P(S(n))$.

Câu	Nội dung chấm	Điểm
2	Giả sử $P(x)$ là đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài. Do $P(x)>0$ với mọi n đủ lớn nên hệ số cao nhất của $P(x)$ là một số nguyên dương.	0,5
	Đặt $P(x)=\sum_{i=0}^{d} a_i x^i$, với $n=10^k$, ta có $S(P(10^k))=P(S(10^k))=P(1)$ là một hằng số	0,5
	Nếu tồn tại $a_i<0$ thì với k đủ lớn, $P(10^k)$ sẽ có một dãy các chữ số 9 đủ dài. Vậy $S(P(10^k))$ có thể lớn tùy ý (mâu thuẫn).	1,0
	Với các hệ số của $P(x)$ đều không âm, cho $n=9.10^k$ với k đủ lớn thì $\sum_{i=0}^{d} S(a_i.9^i)=S(P(9.10^k))=P(S(9.10^k))=\sum_{i=0}^{d} a_i 9^i$	1,0
	Ta biết rằng với mọi số nguyên dương m thì $m\ge s(m)$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi m có 1 chữ số.	0,5
	Vậy $a_i 9^i \in \{1;2;...;9\}$ với mọi i . Từ đây suy ra $P(x)\equiv c$ với $c\in\{1;2;...;9\}$ hoặc $P(x)=x$	0,5

Câu 3: (4 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Các đường cao BE, CF của tam giác ABC. T là giao của tiếp tuyến tại B và tiếp tuyến tại C của (O). TE, TF cắt tiếp tuyến tại A của (O) tại Q, P.

(a) Chứng minh $OP=OQ$

(b) Lấy (AQC) cắt AB tại điểm $Q_1\neq A$; (APB) cắt AC tại điểm $P_1\neq A$. Gọi J là giao của PP_1 và QQ_1. Chứng minh rằng $JBP=JCQ$

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Nội dung chấm</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>Ý (a)</td><td>(+) Chỉ ra $PQ \parallel EF$

Bởi BE, CF là các đường cao của ΔABC nên $BEFC$ nội tiếp đường tròn đường kính BC.

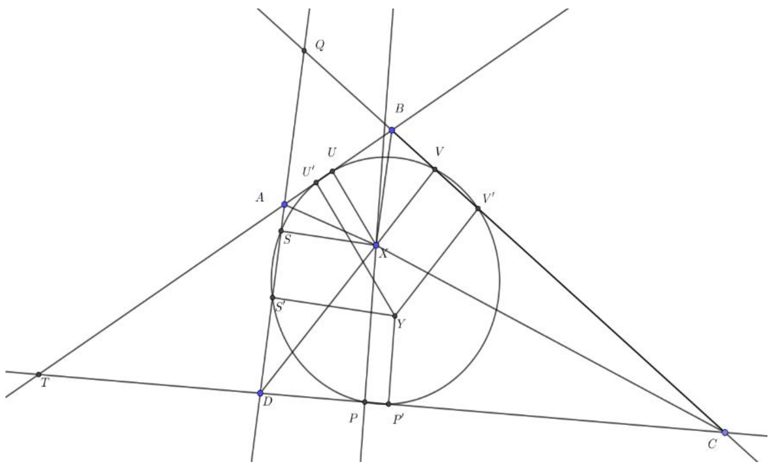
Do đó $AEF = ABC$. Bởi AQ tiếp xúc với (O) nên $ABC = QAC$. Suy ra $AEF = QAC \Rightarrow EF \parallel QP$.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td>(+) Chứng minh A là trung điểm của PQ.

Gọi I là trung điểm của EF; W là trung điểm của BC.

Khi đó $\Delta AEF \backsim \Delta ABC(g.g)$ nên $IAC = IAE = WAB$

Suy ra AI là đường đối trung của tam giác ABC và do đó nên AI đi qua T.

Ta có $EF \parallel QP$ và TA đi qua trung điểm I của EF nên A là trung điểm của PQ</td><td>1,0</td></tr>
</table>

	(+) Chứng minh $OP = OQ$ Ta có $OA \perp PQ$ và A là trung điểm của PQ nên $OP = OQ$	0.5
Ý (b)	Trước hết ta có bổ đề: **<u>Bổ đề:</u>** Cho tứ giác lồi $ABCD$ và một điểm X nằm trong tứ giác. Khi đó tồn tại Y liên hợp đẳng giác với X trong tứ giác khi và chỉ khi $BXC + DXA = 180^0$. (**Chỉ nêu mà không chứng minh bổ đề chỉ được 0.25 điểm**) **<u>Chứng minh:</u>**  Gọi U, V, P, S lần lượt là hình chiếu vuông góc của X lên AB, BC, CD, DA. $U^{'}, V^{'}, P^{'}, S^{'}$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của Y lên AB, BC, CD, DA. **<u>Chứng minh chiều xuôi:</u>** Bởi Y liên hợp đẳng giác với X trong tứ giác nên ta có U, V, P, S ; $U^{'}, V^{'}, P^{'}, S^{'}$ cùng thuộc 1 đường tròn. Khi đó ta có biến đổi góc: $180^0 = SUV + SPV = SUX + XUV + XPS + XPV$ $= XAD + XBC + XDA + XCB = 360^0 - AXD - BXC$ Suy ra $BXC + DXA = 180^0$	1,0

	<u>Chứng minh chiều ngược:</u> Ta có : $SUV + SPV = SUX + XUV + XPS + XPV$ $= XAD + XBC + XDA + XCB = 360^0 - AXD - BXC = 180^0$ Do đó nên S, U, P, V cùng thuộc 1 đường tròn Ω. Gọi Q là giao của AD và BC. Gọi Y_1 liên hợp đẳng giác với X trong tam giác QAB; Y_2 liên hợp đẳng giác với X trong tam giác QDC. Gọi $V_1^';V_2^'$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của Y_1, Y_2 lên BC. Gọi $S_1^', S_2^'$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của Y_1, Y_2 lên AD. Khi đó bởi Y_1 liên hợp đẳng giác với X trong tam giác QAB nên $V_1^', V, S_1^', S, U$ cùng thuộc một đường tròn và suy ra $V_1^';S_1^'$ là giao khác V, S của Ω với lần lượt AD, BC. Tương tự $V_2^';S_2^'$ là giao khác V, S của Ω với lần lượt AD, BC. Suy ra $V_1^' \equiv V_2^'$ và $S_1^' \equiv S_2^'$.Do đó nên $Y_1 \equiv Y_2 \equiv Y$ Khi này Y liên hợp đẳng giác với X trong tứ giác.	
	<u>Trở lại bài toán:</u> (+) Chứng minh $AOP = OBC$ Ta có : $AEF + OAC = ABC + OAC = 90^0$ nên $OA \perp EF$. Ta lại có : $MI \perp EF$ nên $WI \parallel OA$. Chú ý thêm $EF \parallel PQ$ nên dùng định lý Thales ta có $\frac{AP}{IF} = \frac{TA}{TI} = \frac{TO}{TW}$. Bởi $\Delta AEF \backsim \Delta ABC \Rightarrow \frac{IF}{WB} = \frac{AF}{AC} = \cos A$ Suy ra $\frac{AP}{WB} = \frac{TO}{TW}.\cos A = OA.\frac{1}{WB} \Rightarrow \frac{AP}{OA} = \frac{WB}{TW}$	0,5

	$\Rightarrow \Delta APO \backsim \Delta WBT(c.g.c) \Rightarrow POA = WTB = OBC$	
	(+) Chứng minh $JBP = JCQ$ Ta có : $BOC + POQ = 2\left(BAC + OBC\right) = 180^0$ Chú ý thêm: $QPO = 90^0 - POA = BAC = BAP_1 = BPP_1$ nên PO, PP_1 đẳng giác trong QPB. Tương tự QO, QQ_1 đẳng giác trong PQC. Áp dụng bổ đề thì O, J liên hợp đẳng giác trong tứ giác $BPQC$. Do đó nên : $$JBP = OBC = OCB = JCQ$$	0,5

Câu 4: (4 điểm) Một số nguyên dương n được gọi là ***số biểu diễn*** nếu với mọi số nguyên dương a nguyên tố cùng nhau với n và với mọi ước nguyên tố lẻ p của $a^2 + n$, phương trình $x^2 + ny^2 = p$ có nghiệm nguyên. Tìm số nguyên dương biểu diễn lớn nhất.

Câu	**Nội dung chấm**	**Điểm**
	(+) Bổ đề 1: Phương trình $2^x + 1 = 3^y$ có đúng 2 nghiệm nguyên dương là $(x, y) = (3,2); (1,1)$. Chứng minh: Từ điều kiện đề bài ta có x lẻ. Theo bổ đề LTE: $y = v_3\left(2^x + 1\right) = v_3\left(2+1\right) + v_3(x) = v_3(x) + 1$ Suy ra $2^x + 1 = 3^{v_3(x)}.3 \mid 3x \Rightarrow 2^x + 1 \le 3x$ Bằng quy nạp, ta có $2^n + 1 > 3n, \forall n \ge 4$	1,0

	$\Rightarrow x \le 3 \Rightarrow x \in \{1;3\}$ Nếu $x=1 \Rightarrow y=1$ Nếu $x=3 \Rightarrow y=2$	
	Bổ đề 2: (Bổ đề THUE) Cho p nguyên tố và a nguyên tố cùng nhau với p. Khi đó tồn tại $x, y \in \left\{0;1;2;...;\left[\sqrt{p}\right]\right\}$ thoả mãn $x^2+y^2>0; x \equiv \pm ay (\bmod p)$ Chứng minh: Xét tập $A=\left\{a.x+y \mid x, y \in \left\{0;1;2;...;\left[\sqrt{p}\right]\right\}\right\}$ Số phần tử của A bằng $\left(\left[\sqrt{p}\right]+1\right)^2>p$ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại $x_1, y_1, x_2, y_2; (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2): a.x_1+y_1 \equiv a.x_2+y_2 (\bmod p)$. Đặt $x=\lvert x_1-x_2\rvert; y=\lvert y_1-y_2\rvert$ Khi đó $y \equiv \pm a.x (\bmod p)$ và $x, y \in \left\{0;1;2;...\left[\sqrt{p}\right]\right\}; x^2+y^2>0$.	1,0
	Trở lại bài toán: (*) Chứng minh mọi số nguyên dương biểu diễn đều không vượt quá 7. Giả sử tồn tại $n>7$ là số nguyên dương biểu diễn. Ta xét hai trường hợp: Trường hợp 1: $n+1=2^t$ với t nguyên dương. Xét $n+9=8\left(2^{t-3}+1\right)$. Nếu $\left(2^{t-3}+1\right)$ là luỹ thừa của 3 thì theo bổ đề 1 ta có $t=4$ hoặc $t=6$. Suy ra $n \in \{15;63\}$. (1) Nếu $n=15: \left(\frac{-15}{23}\right)=\left(\frac{8}{23}\right)=\left(\frac{2}{23}\right)=1;$ phương trình $x^2+15y^2=23$ không có nghiệm nguyên (2) Nếu $n=63: \left(\frac{-63}{23}\right)=\left(\frac{6}{23}\right)=\left(\frac{2}{23}\right).\left(\frac{3}{23}\right)=1.1=1;$ phương trình	0,5

	$x^2+63y^2=23$ không có nghiệm nguyên. Do đó nên tồn tại ước nguyên tố $p>3, p\mid n+9 \Rightarrow \exists x, y\in \mathbb{Z}: x^2+ny^2=p$ Nếu $y=0: p=x^2$, vô lý. Do đó nên $y>0\Rightarrow y=1; p=n+x^2<\dfrac{n+9}{8}$. Đến đây ta có điều vô lý do $n>7$	
	Trường hợp 2: Có 1 ước nguyên tố $p\mid n+1$ thoả mãn $p\geq 3$. $\Rightarrow \exists x, y\in \mathbb{Z}: x^2+ny^2=p$ Nếu $y=0: p=x^2$, vô lý. Vậy nên $y>0\Rightarrow y=1; p=x^2+n$. Bởi $p\mid n+1\Rightarrow x=1\Rightarrow p=n+1$ Suy ra n chẵn. Nếu tồn tại ước nguyên tố $p\mid n+4$, p lẻ thì ta có: $$\exists x', y': p=x'^2+ny'^2$$ Rõ ràng $p\mid \dfrac{n+4}{2}\Rightarrow n\leq \dfrac{n+4}{2}$, vô lý. Do đó nên $n+4=2^k$ với $k\in \mathbb{N}^*$. Bởi $n>7$ nên $k\geq 4$ Có $n+16=2^k+12=4\left(2^{k-2}+3\right)$ Xét ước nguyên tố $p\mid 2^{k-2}+3$ thì có : $\Rightarrow p\mid n+16\Rightarrow \left(\dfrac{-n}{p}\right)=1\Rightarrow \exists x_1; y_1\in \mathbb{Z}: p=x_1^2+ny_1^2$ $\Rightarrow \dfrac{n+16}{4}\geq p\geq n\Rightarrow 16\geq 3n\geq 24$, vô lý. Do đó nên mọi số nguyên dương biểu diễn đều không vượt quá 7.	0,5
	(*) Chứng minh $n=7$ là số nguyên dương biểu diễn. Xét số nguyên dương a nguyên tố cùng nhau với 7 và với mọi ước nguyên tố lẻ p của a^2+7, Theo bổ đề 2; tồn tại các số nguyên dương $x, y<\sqrt{p}$ thoả mãn	1,0

	$$x \equiv \pm ay \pmod p \Rightarrow p \mid x^2 + 7y^2$$ Bởi $x, y < \sqrt{p}$ nên $0 < x^2 + 7y^2 < 8p$ Suy ra tồn tại $u \in \{1; 2; ...; 7\} : x^2 + 7y^2 = up$ Bởi $\left(\frac{-7}{3}\right) = \left(\frac{-7}{5}\right) = -1$ nên $u \in \{1; 2; 4; 7\}$ • $u = 1 : p = x^2 + 7y^2$ • $u = 2 : 2p = x^2 + 7y^2 \Rightarrow x, y$ cùng tính chẵn lẻ. Suy ra $x^2 + 7y^2 \vdots 4 \Rightarrow 2p \vdots 4$, vô lý. • $u = 4 : 4 \equiv 4p = x^2 + 7y^2 \equiv x^2 - y^2 \pmod 8$ $\Rightarrow x \vdots 2; y \vdots 2; p = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2$ • $u = 7 : 7p = x^2 + 7y^2 \Rightarrow x \vdots 7 \Rightarrow x = 7x_1, x_1 \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow p = 7x_1^2 + y^2$ Vậy số nguyên dương biểu diễn lớn nhất là số 7.	

Câu 5. (4 điểm) Với mỗi số nguyên $n \geq 3$, ta gọi tập $F = \{A_1; A_2; ...; A_{2^{n-1}}\}$ là *n-tốt* nếu $A_t \subset \{1;2;...;n\}$ và $A_i \cap A_j \cap A_k \neq \varnothing$ với mọi $1 \leq t \leq 2^{n-1}$ và $1 \leq i < j < k \leq 2^{n-1}$.

a) Giả sử $F = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ là một tập 3-tốt và $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{1\}$. Chứng minh rằng $1 \in A_4$.

b) Giả sử F là một tập *n-tốt,* chứng minh rằng tồn tại $k \in \{1;2;...;n\}$ sao cho $k \in A$ với mọi $A \in F$.

Câu	Nội dung chấm	Điểm
5a	Giả sử $1 \notin A_4$ và $2 \in A_1 \cap A_2 \cap A_4$. Do $2 \notin A_3$ nên không mất tính tổng quát ra có thể giả sử thêm $3 \in A_1 \cap A_3 \cap A_4$.	1,0
	Suy ra $A_2 \cap A_3 \cap A_4$ không chứa 1, 2, 3 nên $A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \varnothing$.	0,5
5b	Giả sử tồn tại hai tập hợp trong F mà giao của chúng có đúng 1 phần tử, chẳng hạn $A_1 \cap A_2 = \{1\}$, khi đó bằng điều kiện của F ta dễ dàng chứng	0,5

	minh được $1 \in A_i$ với mọi i.	
	Bổ đề: Gọi G là một họ các tập con đôi một giao nhau khác rỗng của $\{1;2;...;k\}$. Khi đó $\|G\| \le 2^{k-1}$. **Chứng minh:** Gọi S là họ các tập con của $\{1;2;...;k\}$, dễ thấy $\|S\| = 2^k$. Mặt khác với mọi $A \in S$ thì nhiều nhất một trong hai tập A hoặc $\{1;2;...;k\} \setminus A$ thuộc G. Ta có điều phải chứng minh.	0,5
	Giả sử mọi cặp hai tập hợp trong F đều có chung ít nhất hai phần tử. Ta sẽ chứng minh rằng quy nạp rằng số phần tử của F sẽ ít hơn 2^{n-1} từ đó suy ra mâu thuẫn. Với $n = 3$, bằng lập luận tương tự phần a, ta suy ra khẳng định đúng.	0,5
	Giả sử khẳng định đúng tới $n-1$, xóa đi phần tử n trong mọi tập hợp của F, khi đó các tập hợp không chứa n sẽ vẫn giao với các tập hợp khác tại đúng hai phần tử nên số tập hợp như vậy sẽ nhỏ hơn hẳn 2^{n-2}. Các phần tử chứa n sau khi xóa đi n sẽ vẫn là họ các tập con phân biệt đôi một giao nhau khác rỗng của {1;2;...;n-1} nên số lượng của chúng không quá 2^{n-2}. Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.	1,0

Người ra đề: Phạm Xuân Thịnh, Nguyễn Việt Dũng, Đinh Ngọc Tùng

Số điện thoại: 0904165336