CHỦ ĐỀ 06 : TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

LÍ THUYẾT

❖ **Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:**

- **Phương pháp:** Cho 2 hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C').
  - Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C'): $f(x) = g(x) \quad (*)$
  - Giải phương trình tìm x từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.
  - Số nghiệm của (*) là số giao điểm của (C) và (C').

❖ **Tương giao của đồ thị hàm bậc 3**

- **Phương pháp 1: Bảng biến thiên (phương pháp đồ thị)**
  - Lập phương trình hoành độ giao điểm dạng $F(x,m) = 0$ (phương trình ẩn x tham số m)
  - Cô lập m đưa phương trình về dạng $m = f(x)$
  - Lập bảng biến thiên cho hàm số $y = f(x)$.
  - Dựa và giả thiết và bảng biến thiên từ đó suy ra m.

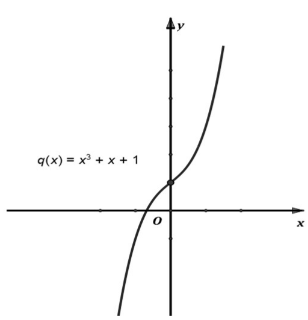
➢ **Dấu hiệu:** Sử dụng phương pháp bảng biến thiên khi m độc lập với x.

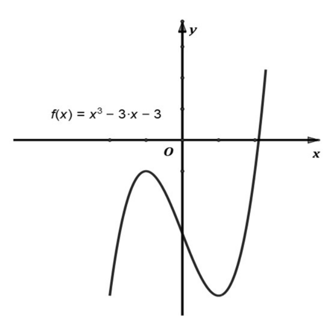
❖ **Phương pháp 2: Nhẩm nghiệm – tam thức bậc 2.**

  - Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x,m) = 0$
  - Nhẩm nghiệm: (Khử tham số). Giả sử $x = x_0$ là 1 nghiệm của phương trình.
  - Phân tích: $F(x,m) = 0 \Leftrightarrow (x - x_0).g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$ (là $g(x) = 0$ là phương trình bậc hai ẩn x tham số m).
  - Dựa vào yêu cầu bài toán đi xử lý phương trình bậc hai $g(x) = 0$.

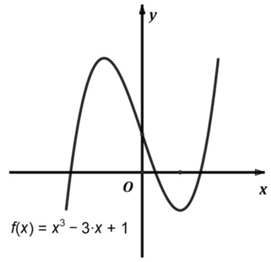
❖ **Phương pháp 3: Cực trị**

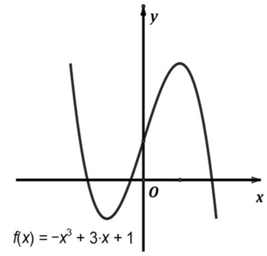
- **Nhận dạng:** Khi bài toán không cô lập được m và cũng không nhẩm được nghiệm.
- **Quy tắc:**
  - Lập phương trình hoành độ giao điểm $F(x,m) = 0 \quad (1)$. Xét hàm số $y = F(x,m)$
  - Để (1) có đúng 1 nghiệm thì đồ thị $y = F(x,m)$ cắt trục hoành tại đúng 1 điểm.
  - Hoặc hàm số luôn đơn điệu trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \le 0$
  - Hoặc hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd}.y_{ct} > 0$ (tham khảo hình vẽ)



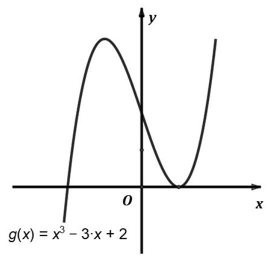


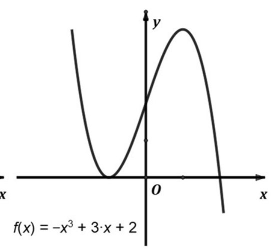
- Để (1) có đúng 3 nghiệm thì đồ thị $y = F(x,m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd}.y_{ct} < 0$ (tham khảo hình vẽ).





- Để (1) có đúng 2 nghiệm thì đồ thị $y = F(x,m)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{cd}.y_{ct} = 0$ (tham khảo hình vẽ)





❖ **Tương giao của hàm số phân thức**

- Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}(C)$ và đường thẳng $d: y = px + q$. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d): $\dfrac{ax+b}{cx+d} = px + q \Leftrightarrow F(x,m) = 0$ (phương trình bậc 2 ẩn x tham số m).
- Các câu hỏi thường gặp:
- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{d}{c}$.
- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh phải của (C) $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn : $-\dfrac{d}{c} < x_1 < x_2$.
- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt cùng thuộc nhánh trái của $(C) \Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 < x_2 < -\dfrac{d}{c}$.
- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc hai nhánh của $(C) \Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và thỏa mãn $x_1 < -\dfrac{d}{c} < x_2$.
- Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A và B thỏa mãn điều kiện hình học cho trước:
  - ✓ Đoạn thẳng $AB = kS$
  - ✓ Tam giác ABC vuông.
  - ✓ Tam giác ABC có diện tích S_0

- **Quy tắc:**
  - Tìm điều kiện tồn tại A, B $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt.
  - Xác định tọa độ của A và B (chú ý Vi ét)
  - Dựa vào giả thiết xác lập phương trình ẩn m. Từ đó suy ra m.
- **Chú ý:** Công thức khoảng cách:
  - $A\left(x_A;y_A\right),B\left(x_B;y_B\right): AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$
  - $\begin{cases} M\left(x_0;y_0\right) \\ \Delta: Ax_0+By_0+C=0 \end{cases} \Rightarrow d\left(M,\Delta\right)=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

❖ **Tương giao của hàm số bậc 4**

- Nghiệm của phương trình bậc bốn trùng phương: $ax^4+bx^2+c=0\ \left(1\right)$
- **Nhẩm nghiệm:**
  - Nhẩm nghiệm: Giả sử $x=x_0$ là một nghiệm của phương trình.
  - Khi đó ta phân tích: $f\left(x,m\right)=\left(x^2-x_0^2\right)g\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm x_0 \\ g\left(x\right)=0 \end{array}\right.$
  - Dựa vào giả thiết xử lý phương trình bậc hai $g\left(x\right)=0$
- **Ẩn phụ - tam thức bậc 2:**
  - Đặt $t=x^2,\left(t\ge 0\right)$. Phương trình: $at^2+bt+c=0\ \left(2\right)$.
  - Để $\left(1\right)$ có đúng 1 nghiệm thì $\left(2\right)$ có nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn: $\left[\begin{array}{l} t_1<0=t_2 \\ t_1=t_2=0 \end{array}\right.$
  - Để $\left(1\right)$ có đúng 2 nghiệm thì $\left(2\right)$ có nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn: $\left[\begin{array}{l} t_1<0<t_2 \\ 0<t_1=t_2 \end{array}\right.$
  - Để $\left(1\right)$ có đúng 3 nghiệm thì $\left(2\right)$ có nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn: $0=t_1<t_2$
  - Để $\left(1\right)$ có đúng 4 nghiệm thì $\left(2\right)$ có nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn: $0<t_1<t_2$

- Bài toán: tìm m để $\left(C\right): y=ax^4+bx^2+c\ \left(1\right)$ cắt Ox tại bốn điểm có hoành độ lập thành một cấp số cộng.
  - Đặt $t=x^2,\left(t\ge 0\right)$. Phương trình: $at^2+bt+c=0$ (2).
  - Để $\left(1\right)$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt thì $\left(2\right)$ phải có 2 nghiệm dương $t_1,t_2\left(t_1<t_2\right)$ thỏa mãn $t_2=9t_1$.
  - Kết hợp $t_2=9t_1$ vơi định lý vi – ét tìm được m.

VÍ DỤ MINH HỌA

Lời giải

VÍ DỤ 1: Gọi m là số thực dương sao cho đường thẳng $y=m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2-2$ tại hai điểm phân biệt M,N thỏa mãn tam giác OMN vuông tại O (O là gốc tọa độ). Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $m\in\left(\frac{11}{4};\frac{15}{4}\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$. **C.** $m\in\left(\frac{7}{4};\frac{9}{4}\right)$. **D.** $m\in\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$.

Chọn D

Ta có $y=m+1\ (d)$ và $y=x^4-3x^2-2\ (C)$.

Xét phương trình tương giao: $x^4-3x^2-2=m+1 \Leftrightarrow x^4-3x^2-(m+3)=0$. (1)

Đặt $t=x^2\geq 0$, phương trình (1) trở thành: $t^2-3t-(m+3)=0$. (2)

Phương trình (2) có tích $a.c=-m-3<0$ khi m là số thực dương.

Suy ra phương trình (2) luôn có hai nghiệm trái dấu $t_1<0<t_2$.

Từ đó suy ra phương trình (1) có hai nghiệm đối nhau $x_1=-\sqrt{t_2}, x_2=\sqrt{t_2}$ đồng thời (d) và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua Oy là $M\left(-\sqrt{t_2};m+1\right)$, $N\left(\sqrt{t_2},m+1\right)$.

Mặt khác tam giác OMN vuông tại O thì $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=0 \Leftrightarrow t_2=(m+1)^2$.

Thay $t_2=(m+1)^2$ vào phương trình (2) ta được:

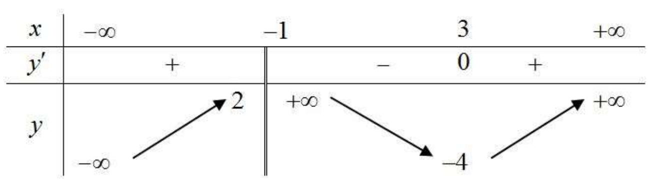
$(m+1)^4-3(m+1)^2-(m+3)=0 \Leftrightarrow (m+1)^4-3(m+1)^2-(m+1)-2=0$.

Đặt $a=m+1>1$ ta được phương trình

$a^4-3a^2-a-2=0 \Leftrightarrow (a-2)(a^3+2a^2+a+1)=0 \Leftrightarrow a=2$ (do $a>1$ nên $a^3+2a^2+a+1>0$).

Từ đó ta được $m+1=2 \Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn $m>0$). Vậy $m=1$.

VÍ DỤ 2: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:



Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x)+1=m$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt.

A. $(-4;2)$. **B.** $(-\infty;2]$. **C.** $[-4;2)$. **D.** $(-3;3)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $f\left(x\right)+1=m \Leftrightarrow f\left(x\right)=m-1$ có đúng ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=m-1$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt.

Căn cứ vào bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ ta được $-4<m-1<2 \Leftrightarrow -3<m<3$.

Vậy $m\in\left(-3;3\right)$.

VÍ DỤ 3: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+3x^2+mx+1$. Gọi S là tổng tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt đường thẳng $y=1$ tại ba điểm phân biệt $A\left(0;1\right)$, B, C sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại B, C vuông góc với nhau. Gía trị của S bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{9}{5}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{11}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoàn độ giao điểm của $y=x^3+3x^2+mx+1$ và $y=1$ là:

$$x^3+3x^2+mx+1=1 \Leftrightarrow x\left(x^2+6x+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+6x+m=0\ \left(*\right) \end{array}\right.$$

Để đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt đồ thị hàm số $y=1$ tại ba điểm phân biệt $A\left(0;1\right)$, $B\left(x_1;y_1\right)$, $C\left(x_2;y_2\right)$ thì phương trình $\left(*\right)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Rightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta=9-4m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m<\frac{9}{4} \end{cases}$$. Theo hệ thức Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=-3 \\ x_1.x_2=m \end{cases}$.

Để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại B, C vuông góc với nhau thì

$$f'\left(x_1\right).f'\left(x_2\right)=-1 \Leftrightarrow \left(3x_1^2+6x_1+m\right).\left(3x_2^2+6x_2+m\right)=-1$$

$$\Leftrightarrow 9x_1^2x_2^2+18x_1x_2\left(x_1+x_2\right)+3m\left(x_1^2+x_2^2\right)+6m\left(x_1+x_2\right)+36x_1x_2+m^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2-9m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{9+\sqrt{65}}{8} \\ m=\frac{9-\sqrt{65}}{8} \end{array}\right. \Rightarrow S=\frac{9+\sqrt{65}}{8}+\frac{9-\sqrt{65}}{8}=\frac{9}{4}.$$

VÍ DỤ 4: Cho hàm số $y=\frac{x}{1-x}$ $\left(C\right)$ và điểm $A\left(-1;1\right)$. Tìm m để đường thẳng $d: y=mx-m-1$ cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt M,N sao cho AM^2+AN^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m=-1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là: $\dfrac{x}{1-x}=mx-m-1$ (đk: $x\neq 1$)

$\Rightarrow x=(1-x)(mx-m-1)\Leftrightarrow x=mx-m-1-mx^2+mx+x\Leftrightarrow mx^2-2mx+m+1=0$ (*)

Để (C) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt M,N thì (*) phải có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta'=m^2-m(m+1)=-m>0\Leftrightarrow m<0\\ m-2m+m+1\neq 0\end{cases}$$

Giả sử $M(x_1;y_1),N(x_2;y_2)$. Theo hệ thức viét : $x_1+x_2=2;\ x_1x_2=\dfrac{m+1}{m}$

$\Rightarrow y_1+y_2=m(x_1+x_2)-2m-2=2m-2m-2=-2$

và $y_1.y_2=(mx_1-m-1)(mx_2-m-1)=m^2x_1x_2-m(m+1)(x_1+x_2)+(m+1)^2$

$=m(m+1)-2m(m+1)+(m+1)^2=m+1$

Ta có: $AM^2+AN^2=(x_1+1)^2+(y_1-1)^2+(x_2+1)^2+(y_2-1)^2$

$=(x_1+x_2+2)^2-2(x_1+1)(x_2+1)+(y_1+y_2-2)^2-2(y_1-1)(y_2-1)$

$=(x_1+x_2+2)^2-2(x_1x_2+x_1+x_2+1)+(y_1+y_2-2)^2-2(y_1y_2-(y_1+y_2)+1)$

$=(2+2)^2-2\left(\dfrac{m+1}{m}+2+1\right)+(-2-2)^2-2(m+1-(-2)+1)$

$=18-2\left(\dfrac{m+1}{m}\right)-2m=18-2-2.\dfrac{1}{m}-2m=16+2.\left[\dfrac{1}{-m}+(-m)\right]\geq 16+2.2=20$ (BĐT Cauchy)

Suy ra: AM^2+AN^2 đạt giá trị nhỏ nhất là 20 khi $\dfrac{1}{-m}=-m\Leftrightarrow m^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-1\end{array}\right.$

Vậy $m=-1$ (vì $m<0$)

VÍ DỤ 5: Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C), có bao nhiêu đường thẳng d có đúng 3 điểm chung với đồ thị (C) và các điểm chung có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-1$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Vì đường thẳng d cắt đồ thị hàm số (C) tại 3 điểm phân biệt nên đường thẳng d là đường thẳng có hệ số góc dạng $y=ax+b$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $x^4-2x^2=ax+b$.

Mà phương trình là phương trình bậc 4 nên phương trình muốn có 3 nghiệm phân biệt thì trong đó sẽ có 1 nghiệm kép gọi là x_1, hai nghiệm còn lại là x_2,x_3.

Suy ra đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị (C), không mất tính tổng quát giả sử đường thẳng d tiếp xúc với đồ thị hàm số (C) tại x_1.

Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ x_1, d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_2, x_3 (\neq x_1)$ thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$. Ta có: $d: y = (4x_1^3 - 4x_1)(x - x_1) + x_1^4 - 2x_1^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là:

$x^4 - 2x^2 = (4x_1^3 - 4x_1)(x - x_1) + x_1^4 - 2x_1^2 (1)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$.

$$(1) \Leftrightarrow (x - x_1)^2(x^2 + 2x_1x + 3x_1^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ f(x) = x^2 + 2x_1x + 3x_1^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$ thì phương trình $f(x) = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt x_2, x_3 khác x_1 và thỏa mãn định lí Vi – ét: $\begin{cases} x_2 + x_3 = -2x_1 \\ x_2.x_3 = 3x_1^2 - 2 \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} \Delta' = x_1^2 - 3x_1^2 + 2 > 0 \\ x_1^2 + 2x_1^2 + 3x_1^2 - 2 \neq 0 \\ x_1^3 + (x_2 + x_3)^3 - 3x_2x_3(x_2 + x_3) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x_1 < 1 \\ 3x_1^2 - 1 \neq 0 \\ x_1^3 + (-2x_1)^3 - 3(3x_1^2 - 2).(-2x_1) = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x_1 = \dfrac{-11 + \sqrt{165}}{22}$. Vậy có đúng 1 đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

VÍ DỤ 6: Có bao nhiêu số thực của tham số m để đường thẳng $y = (m-6)x - 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 - 3x - 1$ tại ba điểm phân biệt có tung độ y_1, y_2, y_3 thỏa mãn $\dfrac{1}{y_1 + 4} + \dfrac{1}{y_2 + 4} + \dfrac{1}{y_3 + 4} = \dfrac{2}{3}$.

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và đồ thị hàm bậc ba đã cho là

$x^3 + x^2 - 3x - 1 = (m-6)x - 4 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + (3-m)x + 3 = 0$ (1).

Giả sử x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm phân biệt của phương trình (1).

Theo hệ thức viet đối với phương trình bậc ba ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 3 - m \\ x_1x_2x_3 = -3 \end{cases}$.

Nhận thấy tung độ của ba giao điểm thỏa mãn phương trình $y = (m-6)x - 4$ nên ta có được $y_1 + 4 = (m-6)x_1$, $y_2 + 4 = (m-6)x_2$ và $y_3 + 4 = (m-6)x_3$.

Khi đó $\dfrac{1}{y_1 + 4} + \dfrac{1}{y_2 + 4} + \dfrac{1}{y_3 + 4} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{(m-6)x_1} + \dfrac{1}{(m-6)x_2} + \dfrac{1}{(m-6)x_3} = \dfrac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{m-6}.\dfrac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{m-6}.\dfrac{3-m}{-3} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow m = 9$.

Thử lại với $m=9$ suy ra phương trình hoành độ giao điểm $x^3+x^2-6x+3=0$ có ba nghiệm phân biệt thỏa mãn giả thiết cho (Dùng casio để kiểm tra) . Vậy có một số thực m thỏa mãn .

VÍ DỤ 7: Một đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ tại bốn điểm phân biệt có hoành độ là 0 , 1, m và n . Tính $S=m^2+n^2$.

A. $S=0$. **B.** $S=1$. **C.** $S=2$. **D.** $S=3$.

Lời giải

Chọn D

Do đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ tại điểm có hoành độ là 0 nên phương trình đường thẳng có dạng $y=ax$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y=ax$ với đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ là :

$x^4-2x^2=ax \Leftrightarrow x^4-2x^2-ax=0 \Leftrightarrow x\left(x^3-2x-a\right)=0$.

Do phương trình có bốn nghiệm là 0 , 1, m , n nên ta có :

$x\left(x^3-2x-a\right)=x\left(x-1\right)\left(x-m\right)\left(x-n\right) \Rightarrow x^3-2x-a=\left(x^2-mx-x+m\right)\left(x-n\right)$

$\Leftrightarrow x^3-2x-a=x^3-nx^2-mx^2+mnx-x^2+nx+mx-mn$

$\Leftrightarrow x^3-2x-a=x^3+\left(-n-m-1\right)x^2+\left(m+n+mn\right)x-mn$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m-n-1=0 \\ m+n+mn=-2 \\ -mn=-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+n=-1 \\ mn=-1 \end{cases} \Rightarrow S=m^2+n^2=\left(m+n\right)^2-2mn=3.$$

VÍ DỤ 7: Cho phương trình $\left(x^2-3x+m\right)^2+x^2-8x+2m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-20;20\right]$ để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt?

A. 19. **B.** 18. **C.** 17. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left(x^2-3x+m\right)^2+x^2-8x+2m=0 \Leftrightarrow \left[\left(x^2-3x+m\right)^2-x^2\right]+\left(2x^2-8x+2m\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-4x+m\right)\left(x^2-2x+m\right)+2\left(x^2-4x+m\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-4x+m\right)\left(x^2-2x+m+2\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-4x+m=0 & (1) \\ x^2-2x+m+2=0 & (2) \end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm phân biệt không trùng nhau.

Phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_1 > 0 \\ \Delta'_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-m>0 \\ 1-m-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<4 \\ m<-1 \end{cases} \Leftrightarrow m<-1$.

Giả sử phương trình (1) và (2) có nghiệm x_0 trùng nhau

$\Rightarrow$ Hệ sau có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+m=0 & (1) \\ x^2-2x+m+2=0 & (2) \end{cases}$

$\Rightarrow x_0{}^2-4x_0+m-\left(x_0{}^2-2x_0+m+2\right)=0 \Leftrightarrow x_0=-1$.

Với $x_0=-1$ thay vào (1) ta được $m=-5$.

$\Rightarrow$ Với $m\neq -5$ phương trình (1) và (2) không có nghiệm trùng nhau.

Kết hợp m là số nguyên thuộc đoạn $[-20;20]$ $\Rightarrow$ $m\in[-20;-1)\setminus\{-5\}$.

Vậy có 18 số nguyên m thoả mãn yêu cầu bài toán.