

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN

Năm học : 2012-2013

Bài 1. (4 điểm)

Cho biểu thức : $A = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3} \quad (x \neq \pm 1)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = -1\frac{2}{3}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$.

Bài 2 (3 điểm)

Cho $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 4.(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

Chứng minh rằng $a = b = c$

Bài 3 (3 điểm) Giải bài toán bằng cách lập phương trình:

Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị thì sẽ được phân số nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó

Bài 4 (2 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 4a + 5$

Bài 5 (3 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có góc ABC bằng 60° , phân giác BD . Gọi M, N, I theo thứ tự là trung điểm của BD, BC, CD

a) Tứ giác $AMNI$ là hình gì ? Chứng minh.

b) Cho $AB = 4cm$. Tính các cạnh của tứ giác $AMNI$

Bài 6. (5 điểm)

Hình thang $ABCD$ ($AB // CD$) có hai đường chéo cắt nhau tại O . Đường thẳng qua O và song song với đáy AB cắt các cạnh bên AD, BC theo thứ tự ở M, N

a) Chứng minh rằng $OM = ON$

b) Chứng minh rằng $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$

c) Biết $S_{AOB} = 2008^2$ (dvdt); $S_{COD} = 2009^2$ (dvdt). Tính S_{ABCD}

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) Với $x \neq \pm 1$ thì:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1-x^3-x+x^2}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)-x(1+x)} \\ &= \frac{(1-x)(1+x+x^2-x)}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-2x+x^2)} \\ &= (1+x^2) : \frac{1}{1-x} = (1+x^2).(1-x) \end{aligned}$$

b) Tại $x = -1\frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$ thì

$$A = \left[1 + \left(-\frac{5}{3} \right)^2 \right] - \left[1 - \left(-\frac{5}{3} \right) \right] = \left(1 + \frac{25}{9} \right) \cdot \left(1 + \frac{5}{3} \right) = 10\frac{2}{27}$$

c) Với $x \neq \pm 1$ thì $A < 0$ khi và chỉ khi $(1+x^2)(1-x) < 0$ (1)

Vì $1+x^2 > 0$ với mọi x nên (1) xảy ra khi và chỉ khi $1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Bài 2.

Biến đổi đẳng thức để được

$$a^2 + b^2 - 2ab + b^2 + c^2 - 2bc + c^2 + a^2 + 2ac = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab - 4ac - 4bc$$

Biến đổi để có: $(a^2 + b^2 - 2ac) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (a^2 + c^2 - 2ac) = 0$

Biến đổi để có: $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 0$ (*)

Vì $(a-b)^2 \geq 0; (b-c)^2 \geq 0; (a-c)^2 \geq 0$ với mọi a, b, c

Nên (*) xảy ra khi và chỉ khi $(a-b)^2 = 0; (b-c)^2 = 0; (a-c)^2 = 0$

Từ đó suy ra $a = b = c$

Bài 3.

Gọi tử số của phân số cần tìm là x thì mẫu số của phân số cần tìm là $x + 11$

Phân số cần tìm là $\frac{x}{x+11}$ ($x \neq -11$)

Khi bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị thì ta được phân số $\frac{x-7}{x+15}$

Theo bài ta có phương trình : $\frac{x}{x+11} = \frac{x+15}{x-7}$

Giải phương trình và tìm được $x = -5$ (tm)

Từ đó phân số cần tìm là $-\frac{5}{6}$

Bài 4.

Biến đổi để có:

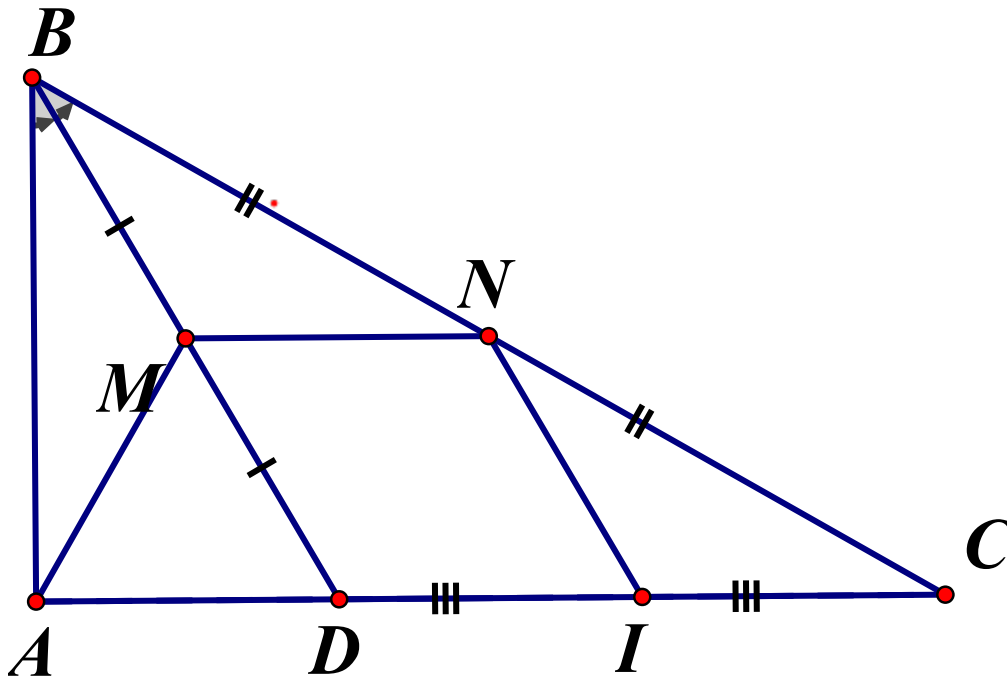
$$\begin{aligned} A &= a^2(a^2 + 2) - 2a(a^2 + 2) + (a^2 + 2) + 3 \\ &= (a^2 + 2)(a^2 - 2a + 1) + 3 = (a^2 + 2)(a - 1)^2 + 3 \end{aligned}$$

Vì $a^2 + 2 > 0 \forall a$ và $(a - 1)^2 \geq 0 \forall a$ nên $(a^2 + 2)(a - 1)^2 \geq 0 \forall a$

Do đó: $(a^2 + 2)(a - 1)^2 + 3 \geq 3 \quad \forall a$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$

Bài 5.



- a) Chứng minh được AMNI là hình thang
 Chứng minh AN = MI từ đó suy ra tứ giác AMNI là hình thang cân

$$AD = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}; BD = 2AD = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

- b) Tính được

$$AM = \frac{1}{2}BD = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$$NI = AM = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

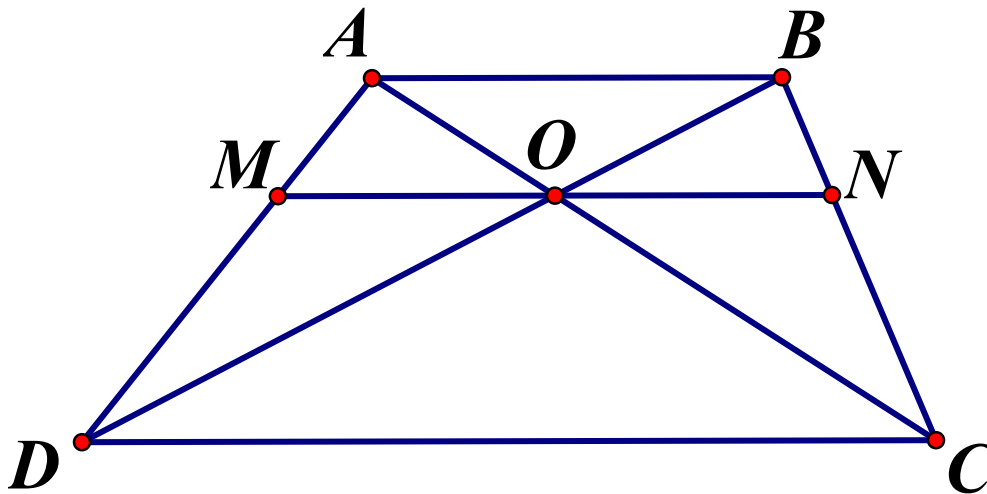
Tính được

$$DC = BC = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}, MN = \frac{1}{2}DC = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

$$AI = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

Tính được

Bài 6.



a) Lập luận để có: $\frac{OM}{AB} = \frac{OD}{BD}$; $\frac{ON}{AB} = \frac{OC}{AC}$; $\frac{OD}{DB} = \frac{OC}{AC}$ (Định lý Ta let)

$$\Rightarrow \frac{OM}{AB} = \frac{ON}{AB} \Rightarrow OM = ON$$

b) Xét $\triangle ABD$ có: $\frac{OM}{AB} = \frac{DM}{AD}$ (1), Xét $\triangle ADC$ có: $\frac{OM}{DC} = \frac{AM}{AD}$ (2)

$$\text{Từ (1),(2)} \Rightarrow OM \cdot \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} \right) = \frac{AM + DM}{AD} = \frac{AD}{AD} = 1$$

$$\text{Chứng minh tương tự: } ON \cdot \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} \right) = 2 \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$$

c)

$$\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \frac{OB}{OD}, \frac{S_{BOC}}{S_{DOC}} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow S_{AOB} \cdot S_{DOC} = S_{BOC} \cdot S_{AOD}$$

$$\text{Chứng minh được: } S_{AOD} = S_{BOC} \Rightarrow S_{AOB} \cdot S_{DOC} = (S_{AOD})^2$$

$$\text{Thay số để có } 2008^2 \cdot 2009^2 = (S_{AOD})^2 \Rightarrow S_{AOD} = 2008 \cdot 2009$$

$$\text{Do đó: } S_{ABCD} = 2008^2 + 2 \cdot 2008 \cdot 2009 + 2009^2 = (2008 + 2009)^2 = 4017^2 \text{ (dvd)}$$