

1. MỞ ĐẦU

- **Lý do chọn đề tài**

Trong những năm qua trường THPT Như Thanh rất coi trọng việc bồi dưỡng, nâng cao năng lực nghiên cứu khoa học cho giáo viên thông qua nhiều hình thức như: đổi mới sinh hoạt tổ nhóm chuyên môn theo hướng nghiên cứu bài học, ứng dụng công nghệ thông tin trong các tiết dạy, phát động phong trào viết chuyên đề, sáng kiến kinh nghiệm giảng dạy, nghiên cứu các đề tài khoa học sư phạm ứng dụng, tổ chức hoạt động ngoại khóa.

Đối với môn toán có nhiều đơn vị kiến thức giáo viên phải tích cực trau dồi, bồi dưỡng đổi mới phương pháp thì mới đạt hiệu quả khi truyền tải kiến thức cho học sinh. Hiện nay cấu trúc đề thi THPT Quốc Gia có những câu hỏi phân loại rất khó, vì vậy mỗi giáo viên phải tìm tòi, tìm ra phương pháp mới để học sinh có thể giải quyết các bài toán khó này một cách hiệu quả nhất trong các đề thi học sinh giỏi, thi THPT Quốc Gia.

Bài toán tìm cực trị của biểu thức nhiều biến là bài toán khó nhất trong các đề thi học sinh giỏi và thi THPT Quốc Gia, phần lớn học sinh không giải quyết được, nguyên nhân chính là vì dạng toán này quá khó chỉ có một phần nhỏ có thể làm được, tuy nhiên nếu giáo viên hướng dẫn cho học sinh một cách hệ thống và phương pháp rõ ràng, tôi tin rằng sẽ có nhiều học sinh làm được bài toán này. Với lý do như vậy, tôi mạnh dạn chọn đề tài ***“Kỹ năng dồn biến để giải bài toán tìm cực trị của biểu thức, nhằm nâng cao hiệu quả của việc ôn tập học sinh giỏi và thi THPT Quốc Gia tại trường THPT Như Thanh”***.

- **Mục đích nghiên cứu**

Rèn luyện kỹ năng tìm cực trị của biểu thức nhiều biến, kỹ năng đánh giá biểu thức bằng bất đẳng thức trong bài toán tìm cực trị.

- **Đối tượng nghiên cứu**

Nghiên cứu bất đẳng thức, các hệ quả của các bất đẳng thức AM-GM, Bunhiacopski, Cauchy – Schwarz.

Nghiên cứu các bài toán tìm cực trị của hàm số, của biểu thức.

- **Phương pháp nghiên cứu**

Nghiên cứu tài liệu, tự nghiên cứu.

2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

2.1. Cơ sở lý luận

Có nhiều cách định nghĩa khác nhau về kỹ năng. Tuy nhiên hầu hết chúng ta đều thừa nhận rằng kỹ năng được hình thành khi chúng ta áp dụng kiến thức vào thực tiễn, kỹ năng học được do quá trình lặp đi lặp lại một hoặc một nhóm hành động nhất định nào đó.

Trong hoạt động dạy học môn toán nói riêng thì kỹ năng được thể hiện qua phương pháp dạy - học, kỹ năng trình bày, kỹ năng thuyết trình... Trong môn toán ngoài những kỹ năng chung về dạy học nó còn được thể hiện qua những yếu tố đặc thù của bộ môn chẳng hạn: kỹ năng giải toán, kỹ năng tính toán... kỹ năng dồn biến trong bài toán tìm cực trị cũng không phải là ngoại lệ.

2.2. Thực trạng của vấn đề nghiên cứu

Trong giảng dạy toán lâu nay tại trường THPT Như Thanh đa số giáo viên thực hiện rất tốt công tác chuyên môn như: Đổi mới sinh hoạt tổ, nhóm chuyên môn theo hướng nghiên cứu bài học; phát động phong trào viết chuyên đề, các đề tài ... Tuy nhiên chuyên đề “*Kỹ năng dồn biến để giải bài toán tìm cực trị của biểu thức*” thì đa số giáo viên trong tổ chưa nghiên cứu một cách có hệ thống.

Đối với học sinh chỉ có một số ít có ý thức tự học, phần còn lại học tập thụ động, không sáng tạo, dựa chủ yếu vào thầy (cô) giáo. Đa số học sinh còn chưa có ý thức về nghiên cứu toán học. Trong học toán phần lớn học sinh còn rất yếu về phần bất đẳng thức, các hoạt động của học sinh ở phần này chủ yếu là chứng minh các bất đẳng thức hay áp dụng các bất đẳng thức có sẵn. Đó là những điều hạn chế trong cách học của học sinh tại trường THPT Như Thanh nói riêng và tại các trường THPT nói chung.

2.3. Các giải pháp thực hiện để giải quyết vấn đề

2.3.1. Định nghĩa giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

Định nghĩa 1: Xét hàm số $f(x)$ với $x \in D$. Ta nói rằng M là giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên D , nếu như thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $f(x) \leq M, \forall x \in D$
2. Tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$

Khi đó ta kí hiệu: $M = \max_{x \in D} f(x)$

Định nghĩa 2: Xét hàm số $f(x)$ với $x \in D$. Ta nói rằng m là giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên D , nếu như thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $f(x) \geq m, \forall x \in D$
2. Tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$

Khi đó ta kí hiệu: $m = \min_{x \in D} f(x)$

2.3.2. Các bất đẳng thức cơ bản thường sử dụng

• *Bất đẳng thức Cauchy (hay AM – GM)*

Cho n số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ ta có $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

• *Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (hay còn gọi Bunhiacopski)*

Cho hai bộ số $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}; b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

Ta có $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

• *Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz thường sử dụng*

Cho $a, b, c > 0$ và $x, y, z > 0$ khi đó $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$

2.3.3. Sử dụng điều kiện ban đầu để đánh giá đưa về hàm số một biến

* *Điều kiện ban đầu thường gặp:*

- $x \in [a; b] \Rightarrow (x - a)(x - b) \leq 0$
- $x, y \in [a; b] \Rightarrow \begin{cases} (x - a)(y - b) \leq 0 \\ (x - a)(y - a) \geq 0 \\ (x - b)(y - b) \geq 0 \end{cases}$
- $x, y, z \in [a; b] \Rightarrow (x - a)(y - a)(z - a) + (x - b)(y - b)(z - b) \geq 0$
- $x \leq y \leq z \Rightarrow (y - x)(y - z) \leq 0$

Nhận xét: Việc đánh giá điều kiện ban đầu của bài toán là rất quan trọng trong việc giải bài toán cực trị của biểu thức, giúp chúng ta rèn luyện kỹ năng chuyển bài toán cực trị nhiều biến thành bài toán cực trị của hàm số với một biến.

Bài 1 (Đề THPT QG 2015): Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn $[1; 3]$ và thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc$$

Lời giải

Ta có: $(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc$

Đặt $x = ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 12$

Ta có: $a, b, c \in [1; 3] \Rightarrow (a - 1)(b - 1)(c - 1) \geq 0 \Rightarrow abc - (ab + bc + ca) + a + b + c - 1 \geq 0$
 $\Rightarrow abc - x + 5 \geq 0 \Rightarrow abc \geq x - 5$

Lại có: $(a - 3)(b - 3)(c - 3) \leq 0 \Rightarrow abc - 3(ab + bc + ca) + 9(a + b + c) - 27 \leq 0$
 $\Rightarrow abc \leq 3x - 27$. Do đó: $3x - 27 \geq abc \geq x - 5 \Rightarrow 2x \geq 22 \Rightarrow x \geq 11$.

Ta có: $P = \frac{x^2 + 72}{x} - \frac{1}{2}abc \leq \frac{x^2 + 72}{x} - \frac{1}{2}(x - 5) = \frac{x}{2} + \frac{72}{x} + \frac{5}{2}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{72}{x} + \frac{5}{2}$, $x \in [11; 12]$

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{72}{x^2} \leq 0 \quad \forall x \in [11; 12]$ nên $P \leq f(x) \leq f(11) = \frac{160}{11}$

Vậy $\max P = \frac{160}{11}$ khi $a = 1; b = 2; c = 3$

Nhận xét: Đây là bài toán rất hay. Ta phải dùng hai lần giả thiết của các biến $a, b, c \in [1; 3]$ để tìm ra miền giá trị của $x = ab + bc + ca$ và đánh giá được P thông qua biến x . Cũng từ bài toán trên phải chăng bằng việc đánh giá điều kiện ban đầu chúng ta sẽ giải quyết được một lớp các bài toán dạng này bằng cách đưa về hàm số một biến, chính vì vậy qua chuyên đề này tác giả muốn rèn luyện cho học sinh kỹ năng giải toán cực trị bằng phương pháp dồn biến.

Bài 2: Cho $x, y, z \in [1; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = \frac{2(x+y+z)}{yz+2(x+y)+z} + \frac{8}{2(x+y)+yz+4} + \frac{y+z+4}{yz+4}$$

Lời giải

Vì $x, y, z \in [1; 2]$, nên ta có

$$(x - 1)(y - 2)(z - 2) \geq 0 \Leftrightarrow xyz + 2(2x + y + z) \geq 2(y + z)x + yz + 4$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=1$ hoặc $y=2$ hoặc $z=2$. Do đó

$$A \leq \frac{2(xy+yz+zx)}{2x(y+z)+yz+4} + \frac{8}{2x(y+z)+yz+4} - \frac{y+z+4}{\sqrt{yz}+4} = \frac{2x(y+z)+yz+4+yz+4}{2x(y+z)+yz+4} - \frac{y+z+4}{\sqrt{yz}+1}$$

$$A \leq 1 + \frac{yz+4}{2x(y+z)+yz+4} - \frac{y+z+4}{\sqrt{yz}+1} \leq 1 + \frac{yz+4}{2(y+z)+yz+4} - \frac{y+z+4}{\sqrt{yz}+1}$$

$$A \leq 1 + \frac{yz+4}{yz+4\sqrt{yz}+4} - \frac{2\sqrt{yz}+4}{\sqrt{yz}+1}$$

Đặt $t = \sqrt{yz}$; $t \in [1;2]$

Xét hàm số: $f(t) = 1 + \frac{t^2+4}{(t+2)^2} - \frac{2t+4}{t+1}$ với $t \in [1;2]$

Ta có $f'(t) = \frac{4t-8}{(t+2)^3} + \frac{2}{(t+1)^2} \geq \frac{4}{27} + \frac{2}{9} > 0$, nên $f(t)$ đồng biến trên $[1;2]$.

Suy ra $A \leq f(t) \leq f(2) = -\frac{7}{6}$

Vậy $\max A = -\frac{7}{6}$ khi $x=1; y=z=2$

Bài 3: Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a \leq 1, b \leq 2, c \leq 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$B = \frac{2(2ab+ac+bc)}{1+2a+b+3c} + \frac{8-b}{b+c+b(a+c)+8} + \frac{b}{\sqrt{12a^2+3b^2+27c^2}+8}$$

Lời giải

Ta có $\sqrt{12a^2+3b^2+27c^2} = \sqrt{3(4a^2+b^2+9c^2)} \geq 2a+b+3c$ (1)

Mặt khác $2a+b+3c-b-c-b(a+c) = (a+c)(2-b) \geq 0$

$$\Rightarrow 2a+b+3c \geq b+c+b(a+c) \quad (2)$$

Lại có $2ab+ac+bc-b-c-b(a+c) = (b+c)(a-1) \leq 0$

$$\Rightarrow 2ab+ac+bc \leq b+c+b(a+c) \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta được

$$B \leq \frac{2[b+c+b(a+c)]}{1+b+c+b(a+c)} + \frac{8-b}{b+c+b(a+c)+8} + \frac{b}{b+c+b(a+c)+8}$$

$$B \leq \frac{2[b+c+b(a+c)]}{1+b+c+b(a+c)} + \frac{8}{b+c+b(a+c)+8}$$

Đặt $t = b+c+b(a+c) \Rightarrow 0 \leq t \leq 13$

Xét hàm số $f(t) = \frac{2t}{t+1} + \frac{8}{t+8}$ với $t \in [0;13]$

$$f'(t) = \frac{2}{(t+1)^2} - \frac{8}{(t+8)^2} = \frac{2(3t+10)(6-t)}{(t+1)^2(t+8)^2} = 0 \Leftrightarrow t=6$$

$$f(0)=1, f(6)=\frac{16}{7}, f(13)=\frac{47}{21}$$

Từ đó suy ra $B \leq f(t) \leq \frac{16}{7} \Rightarrow \max B = \frac{16}{7}$ đạt được khi $a=1, b=2, c=\frac{2}{3}$

Bài 4: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $y+z=x(y^2+z^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $x(y+z)^2 \leq 2x(y^2+z^2) = 2(y+z) \Leftrightarrow y+z \leq \frac{2}{x}$

$$\text{Do đó: } (1+y)(1+z) \leq \frac{1}{4}(2+y+z)^2 \leq \frac{1}{4}\left(2+\frac{2}{x}\right)^2 = \frac{(1+x)^2}{x^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $P \geq \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+y)(1+z)} + \frac{4}{(1+x)(1+y)(1+z)}$

$$P \geq \frac{2x^2+1}{(1+x)^2} + \frac{4x^2}{(1+x)^3} = \frac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}$$

$$\text{Xét hàm số: } f(x) = \frac{2x^3+6x^2+x+1}{(1+x)^3}$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{2(5x-1)}{(1+x)^4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta được: } P \geq f(x) \geq f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{91}{108}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{91}{108}$. Khi $x = \frac{1}{5}, y = z = 5$.

Bài 5: Cho $a > b > c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right]$$

Lời giải

Nhận xét: Giả thiết đã cho chính là gợi ý của bài toán. Cách làm giảm số biến thuộc là đặt $a = c + x, b = c + y \Rightarrow x > y > 0$

$$\text{Khi đó: } \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &= (c+x)^2 + (c+y)^2 + c^2 - (c+x)(c+y) - (c+y)c - c(c+x) \\ &= x^2 + y^2 - xy \end{aligned}$$

$$\text{Do đó ta viết lại P dưới dạng } P = (x^2 - xy + y^2) \left[\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} \right]$$

Như vậy với cách đặt ẩn phụ này, ta đã làm giảm số biến của P thành hai biến. Thậm chí là P là đồng bậc giữa x và y. Ta chỉ việc đặt ẩn phụ quen thuộc

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y} > 1 \text{ ta được } P = (t^2 - t + 1) \left[\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t^2} + 1 \right] = f(t);$$

Xét hàm $f(t)$ trên $(1; +\infty)$ ta có:

$$\begin{aligned} f'(t) &= (2t-1) \left[\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t^2} + 1 \right] + (t^2 - t + 1) \left[-\frac{2}{(t-1)^3} - \frac{2}{t^3} \right] \\ f'(t) &= \frac{(2t-1)[t^3(t-1) + t(t-1)^3 + t^3(t-1)^3] - 2(t^2-t+1)[t^3+(t-1)^3]}{t^3(t-1)^3} \end{aligned}$$

Cách đặt này khá phức tạp. Ta có thể đặt theo cách khác sau đây

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow t > 2. \text{ Khi đó ta có}$$

$$P = \left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x} \right) \left[\frac{xy}{(x-y)^2} + \frac{xy}{y^2} + \frac{xy}{x^2} \right] = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1 \right) \left[\frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right]$$

$$P = (t-1) \left(\frac{1}{t-2} + t \right) = \frac{(t-1)^3}{t-2} = f(t)$$

Xét hàm $f(t)$ trên $(2; +\infty)$ ta được: $\ln f(t) = 3 \ln(t-1) - \ln(t-2)$

$$\Rightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{3}{t-1} - \frac{1}{t-2} = \frac{2t-5}{(t-1)(t-2)}$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{(2t-5)(t-1)^2}{(t-2)^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$$

Lập bảng biến thiên ta được $P = f(t) \geq f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{27}{4}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = t = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 2y \Rightarrow a = b + d = c + 2d, \forall d > 0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{27}{4}$

Bài 6: Cho $x, y, z > 0; xyz(x+y+z)=20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của
 $P = (x+y)(x+z) + y^2z^2$

Lời giải

Nhận xét: Có một chú ý quan trọng của bài 6 là một phép biến đổi nhỏ

$$(x+y)(x+z) = x^2 + xy + xz + yz = x(x+y+z) + yz = \frac{20}{yz} + yz$$

Như vậy biến mới được hình thành.

Đặt $t = yz > 0$ suy ra $P = \frac{20}{t} + t + t^2 = f(t)$. Xét $f(t) = t^2 + t + \frac{20}{t}$ trên $(0; +\infty)$

$$\text{Ta có: } f'(t) = 2t + 1 - \frac{20}{t^2} = \frac{2t^3 + t^2 - 20}{t^2} = \frac{(t-2)(2t^2 + 5t + 10)}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Lập bảng biến thiên ta suy ra $f(t) \geq f(2) = 16$

Do đó $P \geq 16$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} xyz(x+y+z)=20 \\ yz=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y=2 \\ z=1 \end{cases}$

Kết luận: $\min P = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=2 \\ z=1 \end{cases}$

Lời giải

Bài 7: Cho $a, b, c \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \left| \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right|$$

Nhận xét: Khi gặp bài toán trên, ta chưa thể tìm cách phá giá dấu giá trị tuyệt đối. Do vậy cứ thử quy đồng và tách tung ra xem có gì đặc biệt không. Bởi vì lưu ý rằng: khi cho $a=b, b=c, c=a \Rightarrow P=0$. Nên sau khi biến đổi chắc chắn sẽ chứa nhân tử $(a-b)(b-c)(c-a)$

$$\text{Do đó: } P = \left| \frac{ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)}{abc} \right| = \left| \frac{ab(a-b) - bc(a-b) + bc(a-c) - ca(a-c)}{abc} \right|$$

$$P = \left| \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \right|$$

Đến đây ta giả sử $\frac{1}{2} \leq c \leq b \leq a \leq 1$ để mục tiêu làm mất dấu giá trị tuyệt đối.

$$P = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$$

Nhận xét: rằng có một phép biến đổi làm giảm biến số một cách đơn giản là

$$\text{Đặt: } \begin{cases} x = \frac{a}{c} \\ y = \frac{b}{c} \end{cases} \Rightarrow 1 \leq y \leq x \leq 2$$

$$\text{Ta có: } P = \frac{(x-y)(y-1)(x-1)}{xy} = \frac{x-1}{x} \cdot \left[x+1 - \left(y + \frac{x}{y} \right) \right] = f(x; y)$$

Mục tiêu viết như trên là đạo hàm theo biến y (hoặc biến x).

$$f'_y(x; y) = \frac{x-1}{x} \cdot \left(-1 + \frac{x}{y^2} \right) \Rightarrow f'_y(x; y) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{x} \in [1; x]$$

Lập bảng biến thiên ta thu được

$$P = f(x; y) \leq f(x; \sqrt{x}) = \frac{(x - \sqrt{x})(\sqrt{x} - 1)(x - 1)}{x\sqrt{x}} = \frac{(t^2 - t)(t - 1)(t^2 - 1)}{t^3}, t = \sqrt{x} \in [1; \sqrt{2}]$$

$$\text{hay } P \leq \frac{(t-1)^2(t+1)}{t^2} = g(t)$$

Xét hàm $g(t)$ trên $(1; \sqrt{2})$ ta có: $\ln g(t) = 3 \cdot \ln(t-1) + \ln(t+1) - 2 \cdot \ln t$

$$\Rightarrow \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{3}{t-1} + \frac{1}{t+1} - \frac{2}{t} = \frac{3t^2 + 3t + t^2 - t - 2t^2 + 2}{(t-1)(t+1)t} = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(t-1)(t+1)t} > 0; \forall t \in (1; \sqrt{2})$$

$$\text{Từ đó ta có } g(t) \leq g(\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2}-1)^2(\sqrt{2}+1)}{2} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}.$$

$$\text{Nhu vậy } P \leq g(t) \leq \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \\ z = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{2} \\ z = \sqrt{2} \end{cases}$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2} \Leftrightarrow (a; b; c) = \left(1; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

Bài 8: Cho $a, b, c > 0, a^2 + 2b^2 \leq a^2b^2$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{c}{b} + \frac{c}{a} - (c-1)^2$$

Lời giải

Nhận xét: Giả thiết chỉ cho dữ liệu liên quan tới a, b dù không dự đoán được đẳng thức xảy ra nhưng ta vẫn có thể khai thác được giả thiết bằng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz với mục tiêu là chỉ còn biến c .

$$\text{Ta có: } \left(\frac{c}{x} \cdot \frac{x}{b} + \frac{c}{y} \cdot \frac{y}{a} \right)^2 \leq \left(\frac{c^2}{x^2} + \frac{c^2}{y^2} \right) \left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} \right)$$

$$\text{Từ thiết } a^2 + 2b^2 \leq a^2b^2 \Leftrightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a^2} \leq 1$$

Như vậy ta phải chọn $x^2 = 1, y^2 = 2$

$$\text{Do đó ta có: } P = \frac{c}{b} + \frac{c}{a} - (c-1)^2 \leq \sqrt{\left(\frac{c^2}{1} + \frac{c^2}{2} \right) \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2}{a^2} \right)} - (c-1)^2 \leq c\sqrt{\frac{3}{2}} - c^2 + 2c - 1$$

$$\Rightarrow P \leq -c^2 + \left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2} \right) c - 1 = f(c)$$

Xét hàm số $f(c)$ trên $(0; +\infty)$ ta có: $f'(c) = -2c + \left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \Rightarrow f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = 1 + \frac{\sqrt{6}}{4}$

Lập bảng biến thiên ta suy ra: $P \leq f(c) \leq f\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{4}\right) = \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 - 1 = \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{6}}{2}$

Vậy $\max P = \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow a = \sqrt{6}, b = \frac{\sqrt{6}}{2}, c = 1 + \frac{\sqrt{6}}{4}$

Bài 9: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a, c \geq 1; b \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a(b+c)}{b+2c} + \frac{c(a+b)}{b+2a} + \frac{3(a+c)^2 + 2b^2 + 8}{4(3+ac)}$

Lời giải

Ta có $(1-a)(2-b) \geq 0 \Leftrightarrow 2 - 2a - b + ab \geq 0 \Leftrightarrow 2a + b \leq ab + 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{b+2a} \geq \frac{1}{ab+2} \Rightarrow \frac{c(a+b)}{b+2a} \geq \frac{c(a+b)}{ab+2}$$

Tương tự ta có $\frac{a(b+c)}{b+2c} \geq \frac{a(b+c)}{bc+2}$

Lại có

$$3(a+c)^2 + 2b^2 + 8 = 2[(a+c)^2 + b^2] + (a+c)^2 + 8 \geq 4(a+c)b + 4ac + 8 = 4(ab+ac+bc+2)$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{c(a+b)}{ab+2} + \frac{a(b+c)}{bc+2} + \frac{4(ab+bc+ca+2)}{4(ac+3)}$$

$$= \left(\frac{ac+bc}{ab+2} + 1\right) + \left(\frac{ab+bc}{bc+2} + 1\right) + \left(\frac{ab+bc+ca+2}{ac+3}\right) - 2$$

$$= (ab+bc+ca+2) \left(\frac{1}{ab+2} + \frac{1}{bc+2} + \frac{1}{ac+3}\right) - 2 \geq \frac{9(ab+bc+ca+3)}{ab+bc+ca+7} - 2$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{9(t+2)}{t+7} - 2 = 7 - \frac{45}{t+7}$ mà $t = ab+bc+ca \geq 5 \Rightarrow P \geq 7 - \frac{45}{5+7} = \frac{13}{4}$

Vậy $\min P = \frac{13}{4} \Leftrightarrow (a; b; c) = (1; 2; 1)$

Bài 10: Cho các số thực $x, y, z \in [0; 1]$ và $z = \min\{x, y, z\}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(y+z)^2}{\sqrt{x+z}} + \frac{yz+1}{\sqrt{y(y+z)}} + \frac{2}{xy+xz-yz}$

Lời giải

Với những bài toán có điều kiện ban đầu $x, y, z \in [0; 1]$ chúng ta sẽ tìm cách khai thác nó, dự đoán điểm rơi là $z = y = 1; z = 0$

Hơn nữa với $\frac{2}{xy+xz-yz}$ có chứa $xy+xz-yz$ ở mẫu, đây là hạng tử có thể gợi ý cho chúng ta dồn biến về $xy+xz-yz$.

Ta có $x \in [0; 1]$ suy ra $\sqrt{x} \geq x^2; \frac{(y+z)^2}{\sqrt{x+z}} = \frac{\sqrt{x}(y+z)^2}{\sqrt{x}\sqrt{x+z}} \geq \frac{x^2(y+z)^2}{\sqrt{x}\sqrt{x+z}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{1}{\sqrt{A.B}} \geq \frac{2}{A+B}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A=B>0$. Vì dự đoán điểm rơi $z=y=1; x=0$ nên khả năng $x=x+z$ và $y=y+z$ là hoàn toàn có thể xảy ra.

$$\text{Ta có: } \frac{x^2(y+z)^2}{\sqrt{x(x+z)}} \geq x^2(y+z)^2 \cdot \frac{2}{2x+z} \quad \text{và} \quad \frac{(yz+1)^2}{\sqrt{y(y+z)}} \geq (yz+1)^2 \cdot \frac{2}{2y+z}$$

$$\text{Do đó } P \geq \frac{2x^2(y+z)^2}{2x+z} + \frac{2(yz+1)^2}{2y+z} + \frac{2}{xy+xz-yz} \geq \frac{(xy+yz+xz+1)^2}{x+y+z} + \frac{2}{xy+xz-yz}$$

Với điều kiện $x, y, z \in [0;1]$ ta luôn có

$$(1-x)(1-y)(1-z) \geq 0 \Leftrightarrow xy+yz+xz+1 \geq xyz+x+y+z \geq x+y+z$$

$$\text{Suy ra } P \geq x+y+z + \frac{2}{xy+xz-yz}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$x^2 + (y+z)^2 \geq 2x(y+z) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(xy+xz-yz)$$

$$\text{Mà } x, y, z \in [0;1] \Rightarrow x+y+z \geq x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(xy+xz-yz)$$

$$\Rightarrow P \geq 2(xy+xz-yz) + \frac{2}{xy+xz-yz} \geq 4$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=y=1 \\ z=0 \end{cases}$

Vậy $\min P = 4$ đạt được khi $x=y=1; x=0$

Bài 11: Cho các số $a, b, c \in [0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} + abc$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát của bài toán, ta có thể giả sử $0 \leq c \leq b \leq a \leq 1$

$$\text{Ta có } P = \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} + abc \leq \frac{1}{1+bc} + \frac{b}{1+bc} + \frac{c}{1+bc} + bc \leq bc + \frac{1}{1+bc} + \frac{b+c}{1+bc}$$

$$\text{Từ giả thiết ta được } (1-b)(1-c) \geq 0 \Leftrightarrow 1-bc \geq b+c \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b+c}{1+bc} \leq 1$$

$$\text{Suy ra } A \leq bc + 1 + \frac{1}{1+bc}. \text{ Đặt } t = 1+bc \Rightarrow 1 \leq t \leq 2. \text{ Xét hàm số } f(t) = t + \frac{1}{t}; t \in [1;2]$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} \geq 0 \forall t \in [1;2] \text{ suy ra } f(t) \text{ đồng biến trên } [1;2] \Rightarrow f(t) \leq f(2) = \frac{5}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{5}{2}$ khi $a=b=c=1$

2.3.4. Sử dụng bất đẳng thức cơ bản để đánh giá làm giảm số biến của bài toán

* Có nhiều bài toán tìm cực trị của biểu thức ta chỉ cần sử dụng các biến đổi cơ bản đã làm giảm được số biến. Tuy nhiên bài toán cực trị có dạng phân thức ta phải sử dụng các bất đẳng thức để đánh giá mới làm giảm được số biến của bài toán.

* Các bất đẳng thức hệ quả thường dùng

Hệ quả 1: Cho $a, b \in R$ ta có $(a+b)^2 \geq 4ab$

Hệ quả 2: Cho $a, b > 0$ ta có $a^3 + b^3 \geq \frac{(a+b)^3}{4} \geq a^2b + ab^2$

Hệ quả 3: Cho $a, b > 0$ ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

Hệ quả 4: Cho $a, b, c \in R$ ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab + bc + ca$

Hệ quả 5: Cho $a, b, c \in R$ ta có $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$

Hệ quả 6: Cho $a, b, c > 0$ ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$

Hệ quả 7: Cho $a, b > 0$ và $ab \geq 1$ ta có $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$

Hệ quả 8: Cho $a, b > 0$ và $ab \leq 1$ ta có $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \leq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$

Nhận xét: Trên đây chỉ là một số hệ quả tiêu biểu thường sử dụng để tìm cực trị bằng cách dồn biến, ngoài ra ta có thể sử dụng các hệ quả khác hoặc các bất đẳng thức khác. Ứng dụng các hệ quả trên để giải các bài toán sau đây.

Bài 1: Cho các số thực $a, b, c \in [1; 2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{c^2 + 4(ab + bc + ca)}$$

Lời giải

Áp dụng hệ quả 1 $(a+b)^2 \geq 4ab$

Ta có $P = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{c^2 + 4(ab + bc + ca)} \geq \frac{(a+b)^2}{c^2 + 4c(a+b) + (a+b)^2} = M$

Do $a, b, c \in [1; 2]$ nên $a+b \neq 0$, chia tử và mẫu của M cho $(a+b)^2$ ta được:

$$M = \frac{1}{\left(\frac{c}{a+b}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{a+b}\right) + 1} = \frac{1}{t^2 + 4t + 1} \text{ với } t = \frac{c}{a+b}.$$

Với $a, b, c \in [1; 2]$ và $t = \frac{c}{a+b} \Rightarrow t \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$. Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{t^2 + 4t + 1}$ trên $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$

Ta có $f'(t) = \frac{-2(t+2)}{(t^2 + 4t + 1)^2} < 0$, $\forall t \in \left[\frac{1}{4}; 1\right] \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$

$\Rightarrow f(t) \geq f(1) = \frac{1}{6}$; $\forall t \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$ hay $P \geq \frac{1}{6}$

Vậy $\min P = \frac{1}{6}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $a = b = 1$ và $c = 2$

Bài 2: Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $c > 0$ và $a^3 + b^3 = c(c - 1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2}$

Lời giải

Nhận xét: từ giả thiết ta nhận thấy các biến a và b có tính chất đối xứng, do đó để giải bài toán ta sử dụng $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$

$$\text{Ta có: } P \geq \frac{\frac{(a+b)^2}{2} + c^2}{(a+b+c)^2} = \frac{\left(\frac{a+b}{c}\right)^2 + 2}{2\left(\frac{a+b}{c} + 1\right)^2} \quad \text{vì } c > 0$$

Với hai số thực x, y tùy ý, ta có $x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{3}{4}(x-y)^2 \geq \frac{1}{4}(x+y)^2$.

Từ giả thiết $c > 0$ và $a^3 + b^3 = c(c-1)$ sử dụng đánh giá trên ta thu được

$$c^2 = c + a^3 + b^3 = c + (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq c + \frac{(a+b)^3}{4} \geq 2\sqrt{c \cdot \frac{(a+b)^3}{4}} \Rightarrow 0 \leq \frac{a+b}{c} \leq 1.$$

Đặt $t = \frac{a+b}{c} \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$ (vì $a, b \geq 0$ và $c > 0$). Khi đó $P \geq \frac{t^2 + 2}{2(t+1)^2}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 2}{2(t+1)^2}$ trên $[0;1]$, ta có $f'(t) = \frac{t-2}{(t+1)^3} < 0, \forall t \in [0;1]$

Do đó $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $[0;1] \Rightarrow f(t) \geq f(1) = \frac{3}{8}, \forall t \in [0;1]$

Hay $P \geq \frac{3}{8}, \forall a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $c > 0$ và $a^3 + b^3 = c(c-1)$.

Vậy $\min P = \frac{3}{8}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $a = b = 1; c = 2$

Bài 3: Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn $x + y + z > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3 + y^3 + 16z^3}{(x + y + z)^3}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \left(\frac{x}{x+y+z}\right)^3 + \left(\frac{y}{x+y+z}\right)^3 + 16\left(\frac{z}{x+y+z}\right)^3$$

$$\text{Áp dụng hệ quả 2 ta có } \left(\frac{x}{x+y+z}\right)^3 + \left(\frac{y}{x+y+z}\right)^3 \geq \frac{1}{4}\left(\frac{x+y}{x+y+z}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{z}{x+y+z}\right)^3$$

$$\text{Do đó } P \geq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{z}{x+y+z}\right)^3 + 16\left(\frac{z}{x+y+z}\right)^3. \text{ Đặt } t = \frac{z}{x+y+z} \Rightarrow t \in [0;1].$$

Khi đó $P \geq \frac{1}{4}(1-t)^3 + 16t^3$. Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{4}(1-t)^3 + 16t^3$ trên $[0;1]$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{189t^2 + 6t - 3}{4} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{9} \in [0;1) \\ t = -\frac{1}{7} \notin [0;1) \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên suy ra $f(t) \geq f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{81}$, $\forall t \in [0;1] \Rightarrow P \geq f(t) \geq \frac{16}{81}$

Vậy $\min P = \frac{16}{81}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = y = 4z$

Bài 4: Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(x+y)^2}{2(x+y+z)^2 - 2(x^2+y^2) - z^2}$$

Lời giải

Nhận xét: Ta chỉ cần biến đổi $2(x+y+z)^2 - 2(x^2+y^2) - z^2 = z^2 + 4(x+y)z + 4xy$

Ta có $P = \frac{(x+y)^2}{2(x+y+z)^2 - 2(x^2+y^2) - z^2} = \frac{(x+y)^2}{z^2 + 4(x+y)z + 4xy}$

Ta có $4xy \leq (x+y)^2$. Do đó $P \geq \frac{(x+y)^2}{z^2 + 4(x+y)z + (x+y)^2} = \frac{\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right)^2}{1 + 4\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right)^2}$

Đặt $t = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$, vì x, y, z thuộc đoạn $[1;2] \Rightarrow t \in [1;4]$. Khi đó ta có $P \geq \frac{t^2}{1 + 4t + t^2}$

Xét hàm $f(t) = \frac{t^2}{1 + 4t + t^2}$ trên $[1;4]$

Ta có $f'(t) = \frac{4t^2 + 2t}{(1 + 4t + t^2)^2} \Rightarrow f'(t) > 0$, $\forall t \in [1;4]$. Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $[1;4]$. Do đó $f(t) \geq f(1) = \frac{1}{6}$, $\forall t \in [1;4]$ hay $P \geq \frac{1}{6}$, $\forall x, y, z \in [1;2]$

Vậy $\min P = \frac{1}{6}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = y = 1$ và $z = 2$

Bài 5: Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{c^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức: $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Lời giải

Vì $c > 0$ do đó ta có $P = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}+1} + \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}+1} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + 1}}$

Đặt $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c} \Rightarrow x, y > 0$ (vì $a, b, c > 0$) khi đó biểu thức P trở thành

$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$

Biến đổi giả thiết $\frac{1}{c^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}$ ta thu được

$$\frac{1}{c^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow x^2 y^2 = 2(x^2 + y^2)$$

$$\text{Ta có } x^2 y^2 = 2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2 \Rightarrow xy \geq x+y$$

$$\text{và } x^2 + y^2 + 1 = (x+y)^2 - 2xy + 1 \leq (x+y)^2 - 2(x+y) + 1 = (x+y-1)^2 \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có } (x+y)^2 \geq 4xy \geq 4(x+y) \Rightarrow x+y \geq 4 \quad (2) \quad (\text{vì } x, y > 0)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \leq x+y-1$$

Biến đổi biểu thức P , ta thu được

$$P+2 = \frac{x}{y+1} + 1 + \frac{y}{x+1} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} = (x+y+1) \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \right) + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

$$\text{Từ hệ quả 3, ta có: } P+2 \geq (x+y+1) \frac{4}{x+y+2} + \frac{1}{x+y-1} \Rightarrow P \geq 2 - \frac{4}{x+y+2} + \frac{1}{x+y-1}$$

$$\text{Đặt } t = x+y \Rightarrow t \geq 4. \text{ Do đó } P \geq 2 - \frac{4}{t+2} + \frac{1}{t-1}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 2 - \frac{4}{t+2} + \frac{1}{t-1} \text{ trên } [4; +\infty)$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{3t(t-4)}{(t-1)^2(t+2)^2} \geq 0, \forall t \in [4; +\infty) \text{ và } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ (vì } t \in [4; +\infty))$$

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $[4; +\infty)$

$$\Rightarrow f(t) \geq f(4) = \frac{5}{3}, \forall t \in [4; +\infty) \text{ hay } P \geq f(t) \geq \frac{5}{3}$$

Vậy $\min P = \frac{5}{3}$ giá trị nhỏ nhất đạt được khi $a = b = 2c$

Bài 6: Cho các số thực dương x, y, z thay đổi thỏa mãn điều kiện $x+2y-z \geq 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{10y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{x+2y}{2x+3y}$

Lời giải

$$\text{Ta có } x+2y-z \geq 0 \Leftrightarrow z \leq x+2y \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z \leq 2x+3y \\ 10y+z \leq x+12y \end{cases}$$

$$\text{Do đó } P = \frac{x}{10y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{x+2y}{2x+3y} \geq \frac{x}{x+12y} + \frac{y}{2x+3y} + \frac{x+2y}{2x+3y}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{x}{x+12y} + \frac{x+3y}{2x+3y} = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+12} + \frac{\frac{x}{y}+3}{2\frac{x}{y}+3}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y} \Rightarrow t > 0. \text{ Khi đó } \Rightarrow P \geq \frac{t}{t+12} + \frac{t+3}{2t+3}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t}{t+12} + \frac{t+3}{2t+3} \text{ trên } (0; +\infty)$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{12t}{(t+12)^2} - \frac{3}{(2t+3)^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t+12)^2 = 4(2t+3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \in (0;+\infty) \\ t=-\frac{18}{5} \notin (0;+\infty) \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên suy ra $f(t) \geq f(2) = \frac{6}{7}, \forall t \in (0;+\infty)$. Suy ra $P \geq \frac{6}{7}$.

Vậy $\min P = \frac{6}{7}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x=2y, z=4y$.

Nhận xét ta có thể coi P là hàm của z và x, y là tham số và xét hàm $P(z)$ trên $(0; x+2y]$

Bài 7: Cho các số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện $a \geq b, a \geq c$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{5(a+b+c)} + \frac{b}{5a-2c} + \frac{c}{5a-2b}$

Lời giải

$$\text{Vì } a > 0 \text{ do đó } P = \frac{1}{5\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)} + \frac{\frac{b}{a}}{5 - 2 \cdot \frac{c}{a}} + \frac{\frac{c}{a}}{5 - 2 \cdot \frac{b}{a}}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = \frac{b}{a} \\ y = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow x, y \in (0;1] \text{ vì } a, b, c > 0 \text{ và } a \geq b, a \geq c.$$

$$\text{Khi đó biểu thức } P \text{ được viết lại như sau: } P = \frac{1}{5(1+x+y)} + \frac{x}{5-2y} + \frac{y}{5-2x}$$

$$\Rightarrow 2P - 2 = \frac{2}{5(1+x+y)} + (2x+2y-5) \left(\frac{1}{5-2y} + \frac{1}{5-2x} \right)$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{5-2x} + \frac{1}{5-2y} \geq \frac{4}{10-2x-2y} \text{ và } 2x+2y-5 < 0, \forall x, y \in (0;1]$$

$$\text{Do đó } 2P - 2 \leq \frac{2}{5(1+x+y)} + (2x+2y-5) \frac{4}{10-2x-2y}$$

$$\text{hay } P \leq \frac{2}{5(1+x+y)} + \frac{5}{5-x-y} - 1$$

$$\text{Đặt } t = x+y \Rightarrow t \in (0;2] \text{ vì } x, y \in (0;1].$$

$$\text{Khi đó ta có } P \leq \frac{2}{5(t+1)} + \frac{5}{5-t} - 1$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{2}{5(t+1)} + \frac{5}{5-t} - 1 \text{ trên } (0;2]$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{25(t+1)^2 - (t-5)^2}{5(t+1)^2(t-5)^2} = \frac{24t^2 + 60t}{5(t+1)^2(t-5)^2} > 0, \forall t \in (0;2]$$

$$\text{Do đó } f(t) \text{ là hàm số đồng biến trên } (0;2] \Rightarrow f(t) \leq f(2) = \frac{11}{15}, \forall t \in (0;2]$$

hay $P \leq \frac{11}{15}$, với mọi $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a \geq b, a \geq c$.

Vậy $\text{Max}P = \frac{11}{15}$, giá trị lớn nhất đạt được khi $a = b = c$

Bài 8: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $0 < x < y < z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^3 z}{y^2(xz + y^2)} + \frac{y^4}{z^2(xz + y^2)} + \frac{z^3 + 15x^3}{x^2 z}$

Lời giải

Ta có $P = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^3}{\frac{x}{y} + \frac{y}{z}} + \frac{\left(\frac{y}{z}\right)^3}{\frac{x}{y} + \frac{y}{z}} + \left(\frac{z}{x}\right)^2 + \frac{15}{\frac{z}{x}}$. Đặt

$$a = \frac{x}{y}; b = \frac{y}{z}; c = \frac{z}{x} \Rightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \\ c > 1 \end{cases}$$

Do đó: $P = \frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{a+b} + c^2 + \frac{15}{c}$

Áp dụng hệ quả 2, ta có $P \geq \frac{ab(a+b)}{a+b} + c^2 + \frac{15}{c} = c^2 + \frac{16}{c}$

Xét hàm số $f(c) = c^2 + \frac{16}{c}$ trên $(1; +\infty)$. Ta có $f'(c) = 2c - \frac{16}{c^2} \Rightarrow f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = 2$

Lập bảng biến thiên suy ra $f(c) \geq f(2) = 12, \forall c \in (1; +\infty)$

Vậy $\text{Min}P = 12$ giá trị nhỏ nhất đạt được khi $\begin{cases} a = b = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c = 2 \end{cases}$ hay $2x = y\sqrt{2} = z$

Bài 9: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c} = \sqrt{\frac{ab}{c}}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{c^2}{a^2+b^2}$

Lời giải

Đặt $a = xc; b = yc; (x, y \geq 1)$

Thay $x=1$ vào giả thiết ta có: $\sqrt{b-c} = \sqrt{b} \Rightarrow c=0$ (không thỏa mãn giả thiết)

Tương tự $y=1$ cũng không thỏa mãn.

$\Rightarrow x > 1; y > 1$ thay vào giả thiết ta có:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = \sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y-2+2\sqrt{(x-1)(y-1)} = xy$$

$$\Leftrightarrow x-x-y+1-2\sqrt{(x-1)(y-1)}+1=0 \Leftrightarrow (\sqrt{(x-1)(y-1)}-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(y-1)}=1 \Leftrightarrow xy=x+y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \geq 4$$

Mặt khác

$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{xy+x} + \frac{y^2}{xy+y} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{(x+y)^2 - 2xy}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{(x+y)^2}{2xy+x+y} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{(x+y)^2 - 2xy}$$

$$\text{Hay } P \geq \frac{xy}{3} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2y^2 - 2xy} = \frac{(xy)^3 - 2(xy)^2 + 3xy - 3}{3[(xy)^2 - 2xy]}$$

$$\text{Đặt } t = xy; t \geq 4, \text{ khi đó ta có } P \geq \frac{t^3 - 2t^2 + 3t - 3}{3(t^2 - 2t)}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^3 - 2t^2 + 3t - 3}{3(t^2 - 2t)} \text{ trên } [4; +\infty)$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{t^4 - 4t^3 + t^2 + 6t - 6}{3(t^2 - 2t)^2} = \frac{t^3(t-4) + t^2 + 6(t-4) + 18}{3(t^2 - 2t)^2} > 0, \forall t \geq 4$$

$$\text{Suy ra hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } [4; +\infty). \text{ Do đó: } \min_{[4; +\infty)} f(t) = f(4) = \frac{41}{24}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{41}{24} \text{ khi } x = y = 2 \text{ hay } a = b = 2c$$

Bài 10: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a \geq b \geq c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = \frac{(a^2 + c^2)\sqrt{ab+bc+ca}}{abc(a+b+c)}$

Lời giải

$$\text{Đặt } a = xb; c = yb \Rightarrow 0 < y \leq 1 \leq x$$

$$\text{Khi đó } T = \frac{(x^2 + y^2)\sqrt{x+y+xy}}{xy(x+y+1)} \geq \frac{(x+y)^2\sqrt{x+y+xy}}{2xy(x+y+1)}$$

$$\text{Đặt } S = x+y; P = xy \text{ vì } 0 < y \leq 1 \leq x \Rightarrow \begin{cases} S > 1 \\ (x-1)(y-1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < P \leq S-1$$

$$\text{Đặt } f(P) = \frac{S^4(S+P)}{4P^2(S+1)^2} \text{ ta có } f'(P) = -\frac{S^4(2S+P)}{4P^3(S+1)^2} < 0, \forall P \in (0; S-1]$$

Do đó $f(P)$ là hàm số nghịch biến trên $(0; S-1]$

$$\Rightarrow f(P) \geq f(S-1) = \frac{S^4(2S-1)}{4(S^2-1)^2}, \forall P \in (0; S-1]. \text{ Xét hàm số } g(S) = \frac{S^4(2S-1)}{4(S^2-1)^2} \text{ với } S > 1$$

$$\text{Ta có } g'(S) = \frac{(S-2)(S^2+2S-1)S^3}{2(S^2-1)^3} \Rightarrow g'(S) = 0 \Leftrightarrow S = 2 \text{ (vì } S > 1).$$

$$\text{Từ bảng biến thiên suy ra } g(S) \geq g(2) = \frac{4}{3}, \forall S \in (1; +\infty)$$

$$\text{Do đó ta có } T \geq \sqrt{f(P)} \geq \sqrt{g(S)} \geq \sqrt{g(2)} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy } \min T = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ giá trị nhỏ nhất đạt được khi } x = y = 1 \text{ hay } a = b = c$$

Bài 11: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} - \frac{x^3y^3 + y^3z^3}{24x^3z^3}$

Lời giải

Nhận xét: Bài 11 khi ta thay giả thiết $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ vào biểu thức P thì P là một biểu thức đồng bậc. Tuy nhiên nếu chỉ sử dụng các biến đổi đại số thì ta vẫn chưa làm giảm số biến của biểu thức. Ta cần sử dụng các hệ quả để đánh giá biểu thức

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} &= \frac{xy}{(x^2+z^2)+(y^2+z^2)} + \frac{yz}{(x^2+y^2)+(x^2+z^2)} \\ &\Rightarrow \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} \leq \frac{xy}{2\sqrt{(x^2+z^2)(y^2+z^2)}} + \frac{yz}{2\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}} \\ &\Rightarrow \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{x^2}{x^2+z^2} + \frac{y^2}{z^2+y^2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{z^2}{x^2+z^2} \right) \\ &\Rightarrow \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{y^2}{z^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} \right) \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{y^2}{2yz} + \frac{y^2}{2xy} \right) \\ &\Rightarrow \frac{xy}{1+z^2} + \frac{yz}{1+x^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ta lại có } x^3y^3 + y^3z^3 \geq \frac{1}{4}(xy + yz)^3 \Rightarrow \frac{x^3y^3 + y^3z^3}{x^3z^3} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{(xy + yz)^3}{x^3z^3} = \frac{1}{4} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right)^3$$

$$\text{Vậy } P \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right) - \frac{1}{96} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x} \right)^3. \text{ Đặt } t = \frac{y}{z} + \frac{y}{x} \Rightarrow t > 0 \text{ (vì } x, y, z > 0 \text{)}$$

$$\text{Khi đó } P \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8}t - \frac{1}{96}t^3$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}t - \frac{1}{96}t^3 \text{ trên } (0; +\infty)$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{1}{8} - \frac{1}{32}t^2 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ (vì } t > 0 \text{)}$$

$$\text{Lập bảng biến thiên suy ra } f(t) \leq f(2) = \frac{5}{12}, \forall t \in (0; +\infty) \text{ hay } P \leq f(t) \leq \frac{5}{12}$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{5}{12}, \text{ giá trị lớn nhất đạt được khi } x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Bài 12: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{z}\right)^4 + \frac{z}{x} = \frac{x}{z} + 2$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{2y^2}{x^2 + y^2} + \frac{2z^2}{y^2 + z^2} - \frac{3z}{2x + z}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$$\frac{x}{2} + 2 = \left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{z}\right)^4 + \frac{z}{x} \geq 2\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^4 \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^4} + \frac{z}{x} = 2\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \frac{z}{x} \Rightarrow \frac{x}{z} + 2 \geq 2\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \frac{z}{x}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{z} \Rightarrow t > 0 \text{ (vì } x, z > 0 \text{)}.$$

$$\text{Do đó } t + 2 \geq 2t^2 + \frac{1}{t} \Leftrightarrow 2t^3 - t^2 - 2t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+1)(2t-1) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

Ta có
$$P = \frac{2}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} + \frac{2}{\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 1} - \frac{3}{2\frac{x}{z} + 1}$$

Nhận xét: $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = \frac{x}{z}$ vì $\frac{x}{z} \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \leq 1$. Mặt khác $x, y, z > 0 \Rightarrow \frac{x}{y}, \frac{y}{z} > 0$

Do đó
$$\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} + \frac{1}{\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 1} \leq \frac{2}{1 + \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z}} = \frac{2}{1 + \frac{x}{z}}$$

Vậy
$$P \leq \frac{4}{1 + \frac{x}{z}} - \frac{3}{2\frac{x}{z} + 1} = \frac{4}{1+t} - \frac{3}{2t+1} \text{ . Xét hàm số } f(t) = \frac{4}{1+t} - \frac{3}{2t+1} \text{ trên } \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

Ta có
$$f'(t) = \frac{-10t^2 - 4t + 2}{(t+1)^2(2t+1)^2} < 0, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

Suy ra $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $\left[\frac{1}{2}; 1\right] \Rightarrow f(t) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6}, \forall t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

Hay $P \leq \frac{7}{6}$ với mọi $x, y, z > 0$ thỏa mãn $\left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{y}{z}\right)^4 + \frac{z}{x} = \frac{x}{z} + 2$

Vậy $\text{Max} P = \frac{7}{6}$, giá trị lớn nhất đạt được khi $\left\{ \frac{x}{y} = \frac{2}{x}, \frac{y}{z} = 2 \right\}$

Nhận xét: Phương pháp giải được trình bày ở các mục 2.3.3 và 2.3.4 là phương pháp thường được sử dụng khi giải các bài toán tìm cực trị của biểu thức nhiều biến. Ngoài các phương pháp giải ở trên khi giải bài toán tìm cực trị của biểu thức nhiều biến ta còn sử dụng các phương pháp sau:

- * Phương pháp tiếp tuyến.
- * Phương pháp đạo hàm theo từng biến.
- * Phương pháp dùng hàm đặc trưng.

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm

2.4.1. Đối với học sinh

* Chọn lớp đối chứng gồm 15 học sinh lớp 12C1, chọn lớp thử nghiệm gồm 15 học sinh khác (lớp 12C1 là lớp chọn khối A), chọn học sinh trong đội tuyển học sinh giỏi môn toán của trường THPT Như Thanh.

* Chọn các bài tập đã xây dựng ở trên và những bài tập khác trong các đề thi thử THPT Quốc Gia những năm gần đây. Tiến hành hướng dẫn học sinh giải quyết các bài tập đã chọn.

* Tiến hành hướng dẫn học sinh nghiên cứu chủ đề “Kỹ năng dồn biến để giải bài toán tìm cực trị của biểu thức”. Yêu cầu học sinh viết thành đề tài, nộp cho giáo viên (chỉ chọn học sinh trong đội tuyển học sinh giỏi).

* Tiến hành kiểm tra đánh giá bằng một bài 45 phút cho cả ba lớp nói trên.

* Kết quả kiểm tra: Đối với nhóm học sinh giỏi kết quả bài kiểm tra là rất tốt, điểm của học sinh đều đạt từ loại khá trở lên, đối với lớp 12C1 kết quả đạt được từ loại trung bình trở lên.

* Đối với chủ đề nghiên cứu của lớp học sinh giỏi, các em đã thực hiện tốt. Được ôn tập các tính chất của bất đẳng thức, rèn luyện kỹ năng giải bài toán tìm cực trị của biểu thức nhiều biến. Đội tuyển học sinh giỏi nhà trường gồm 5 em tham dự kì thi cấp tỉnh đạt một giải Nhì, một giải Ba, một giải Khuyến khích.

* Dạng bài tập và phương pháp này chỉ có hiệu quả cao với học sinh khá, giỏi.

2.4.2. Đối với bản thân và đồng nghiệp

* Đề tài này có thể dùng làm tài liệu cho học sinh và giáo viên trong quá trình dạy học môn toán, ôn thi THPT Quốc Gia và thi học sinh giỏi.

* Từ đề tài này có thể mở rộng và phát triển hơn cho dạng toán chứng minh bất đẳng thức, dạng toán cực trị của biểu thức lượng giác, cực trị trong hình học. Ứng dụng trong việc giải quyết các bài toán khó về phương trình, bất phương trình, hệ phương trình vô tỷ, hệ bất phương trình có chứa tham số.

2.4.3. Đối với nhà trường

* Đề tài đã và đang được áp dụng trong hoạt động giảng dạy góp phần nâng cao chất lượng giáo dục môn Toán, nâng cao kết quả thi học sinh giỏi, kết quả thi THPT Quốc gia của học sinh trường THPT Như Thanh.

3. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

3.1. Kết luận

Quá trình nghiên cứu đề tài đã thu được một số kết quả sau:

* Trong đề tài đã nghiên cứu về kỹ năng tìm cực trị của bài toán nhiều biến bằng phương pháp dồn biến.

* Xây dựng được một hệ thống các bài tập về tìm cực trị của biểu thức nhiều biến trong đó cách giải quyết chính là sử dụng đánh giá bằng bất đẳng thức cơ bản để làm giảm số biến của bài toán ban đầu.

* Nghiên cứu cơ sở lý luận về kỹ năng dạy học nói chung và các kỹ năng cơ bản dạy học môn toán nói riêng.

3.2. Kiến nghị

Sau khi tổng kết thực nghiệm sư phạm, chúng tôi có một số đề xuất sau:

* Giáo viên nên thay đổi phương pháp dạy học của mình để phù hợp với từng đối tượng, từng nội dung bài học. Giáo viên hướng dẫn học sinh tự học, tự nghiên cứu, để tạo ra những sản phẩm hữu ích giúp các em có một lượng kiến thức và kỹ năng tốt để chuẩn bị cho các kỳ thi.

* Nhà trường, các tổ chuyên môn cần khuyến khích hình thức, tự học tự nghiên cứu, hợp tác nhóm của học sinh theo sự hướng dẫn của giáo viên, từ đó tạo điều kiện cho giáo viên và học sinh hợp tác làm việc nhằm cải thiện chất lượng học tập giúp các em có một nền tảng kiến thức thật sự vững chắc.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ

Thanh Hóa, ngày 22 tháng 04 năm 2016
Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết,
không sao chép nội dung của người khác.

Nguyễn Bá Long

--	--