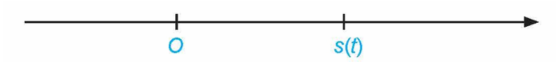
PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1. Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải. Giả sử vị trí $s(t)$ (mét) của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm t (giây) được cho bởi công thức $s(t)=t^3-9t^2+15t, t\ge 0.$



Hỏi trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang phải, trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang trái?

Lời giải

a) Ta có: $v(t)=s'(t)=\left(t^3-9t^2+15t\right)'=3t^2-18t+15$

b) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $v(t)>0 \Leftrightarrow 3t^2-18t+15>0 \Leftrightarrow (t-1)(t-5)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<1 \\ t>5 \end{array}\right.$

$v(t)<0 \Leftrightarrow 3t^2-18t+15<0 \Leftrightarrow (t-1)(t-5)<0 \Leftrightarrow 1<t<5$

Chất điểm chuyển động theo chiều dương (sang bên phải) khi $v(t)>0$, tức là $t\in(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$.

Chất điểm chuyển động theo chiều âm (sang bên trái) khi $v(t)<0$, tức là $1<t<5$.

Câu 2. Giả sử số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2000 được mô tả bởi hàm số $N(t)=\dfrac{25t+10}{t+5}, t\ge 0,$ trong đó $N(t)$ được tính bằng nghìn người.

a) Tính số dân của thị trấn đó vào các năm 2000 và 2015.

b) Tính đạo hàm $N'(t)$ và $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)$. Từ đó, giải thích tại sao số dân của thị trấn đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt quá một ngưỡng nào đó.

Lời giải

a) Dân số của thị trấn đó vào năm 2000 là: $N(0)=\dfrac{25.0+10}{0+5}=\dfrac{10}{5}=2$ (nghìn người)

Dân số của thị trấn đó vào năm 2015 là: $N(15)=\dfrac{25.15+10}{15+5}=19,25$ (nghìn người)

b) Ta có $N'(t)=\dfrac{115}{(t+5)^2}>0, \forall t>0$ và $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{25t+10}{t+5}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{25+\frac{10}{t}}{1+\frac{5}{t}}=25$

Vì trên khoảng $(0;+\infty)$ có $N'(t)>0$ và $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)=25$ nên dân số của thị trấn đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt qua ngưỡng 25 nghìn người.

Câu 3. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1990 được ước tính bởi công thức

$f(t)=\dfrac{27t+10}{t+10}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người).

a) Số dân của thị trấn vào đầu năm 2005 là 19,57 nghìn người.

b) Xem f là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0;+\infty)$. Khi đó $f'(t)=\dfrac{260}{(t+10)^2}$

c) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Khi đó tốc độ tăng dân số được dự kiến vào năm 2008 của thị trấn là $\approx 0,33$

d) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Khi đó vào năm 2026 thì tốc độ tăng dân số là 0,125 nghìn người/năm

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

a) Vào đầu năm 2000, ta có $t=10$; $f(10)=14$.

Vậy số dân của thị trấn vào đầu năm 2000 là 14 nghìn người.

- Vào đầu năm 2005, ta có $t=25; f(25)\approx 19,57$.

Số dân của thị trấn vào đầu năm 2005 là 19,57 nghìn người.

b) $f'(t)=\dfrac{260}{(t+10)^2}$ với mọi $t>0; f(t)$ liên tục trên $[0;+\infty)$

(vì liên tục trên khoảng $(-10;+\infty)$)

Vậy hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$.

c) Tốc độ tăng dân số vào đầu năm 2002 là $f'(12)=\dfrac{260}{22^2}=0,54$ (do $t=2002-1990=12$).

- Tốc độ tăng dân số được dự kiến vào năm 2008 của thị trấn là:

$f'(18)=\dfrac{260}{28^2}\approx 0,33$ (do $t=2008-1990=18$).

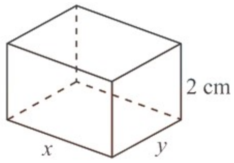
d) Ta có

$$f'(t)=0,125 \Leftrightarrow \frac{260}{(t+10)^2}=0,125 \Leftrightarrow t+10=\sqrt{\frac{260}{0,125}}\approx 46$$

$\Rightarrow t\approx 36.$

Vậy vào năm 2026, tốc độ tăng dân số của thị trấn là 0,125.

Câu 4. Người ta muốn chế tạo một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có thể tích $500\,cm^3$ với yêu cầu dùng ít vật liệu nhất.



Chiều cao hộp phải là $2cm$, các kích thước khác là x, y với $x > 0$ và $y > 0$.

a) Hãy biểu thị y theo x.

b) Chứng tỏ rằng diện tích toàn phần của chiếc hộp là: $S(x) = 500 + 4x + \dfrac{1000}{x}$.

c) Lập bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

d) Kích thước của hộp là bao nhiêu thì dùng ít vật liệu nhất? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

a) $y = \dfrac{500}{2x} = \dfrac{250}{x}$

b) Diện tích toàn phần của chiếc hộp là:

$$S(x) = 2 \cdot 2(x + y) + 2xy = 4\left(x + \frac{250}{x}\right) + 2 \cdot x \cdot \frac{250}{x} = 500 + 4x + \frac{1000}{x}$$

c) Tập xác định: $D = (0; +\infty)$

- Chiều biến thiên:

$$S'(x) = 4 - \frac{1000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5\sqrt{10} \\ x = -5\sqrt{10}(loai) \end{array}\right.$$

- Giới hạn và tiệm cận:

$$\lim_{x \to +\infty} S(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(500 + 4x + \frac{1000}{x}\right) = +\infty; \lim_{x \to -\infty} S(x) = \lim_{x \to -\infty}\left(500 + 4x + \frac{1000}{x}\right) = -\infty$$

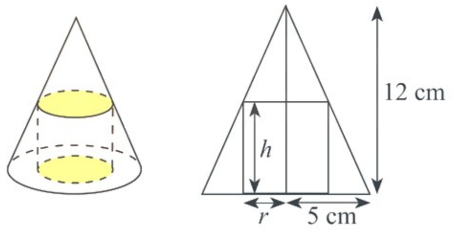
$$\lim_{x \to 0^+} S(x) = \lim_{x \to 0^+}\left(500 + 4x + \frac{1000}{x}\right) = +\infty; \lim_{x \to 0^-} S(x) = \lim_{x \to 0^-}\left(500 + 4x + \frac{1000}{x}\right) = -\infty$$

Bảng biến thiên:

x	0		$5\sqrt{10}$		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$	$+\infty$	↘	$500+40\sqrt{10}$	↗	$+\infty$

d) Để $S(x)$ nhỏ nhất thì $x = 15,8(cm)$ và $y = \dfrac{250}{x} = \dfrac{250}{5\sqrt{10}} \approx 15,8(cm)$

Câu 5. Cho một hình trụ nội tiếp trong hình nón có chiều cao bằng $12cm$ và bán kính đáy bằng $5cm$ (Hình a). Người ta cắt hình nón, trụ này theo mặt phẳng chứa đường thẳng nối đỉnh và tâm hình tròn đáy của hình nón thì thu được một hình phẳng như Hình **b.**



a) b)

a) Chứng minh rằng công thức tính bán kính r của đáy hình trụ theo chiều cao h của nó là:

$r = \dfrac{5(12 - h)}{12}$.

b) Chứng minh biểu thức sau biểu thị thể tích khối trụ theo h:

$V(h) = \dfrac{25\pi h(12 - h)^2}{144}$.

c) Tìm h để khối trụ có thể tích lớn nhất.

Lời giải

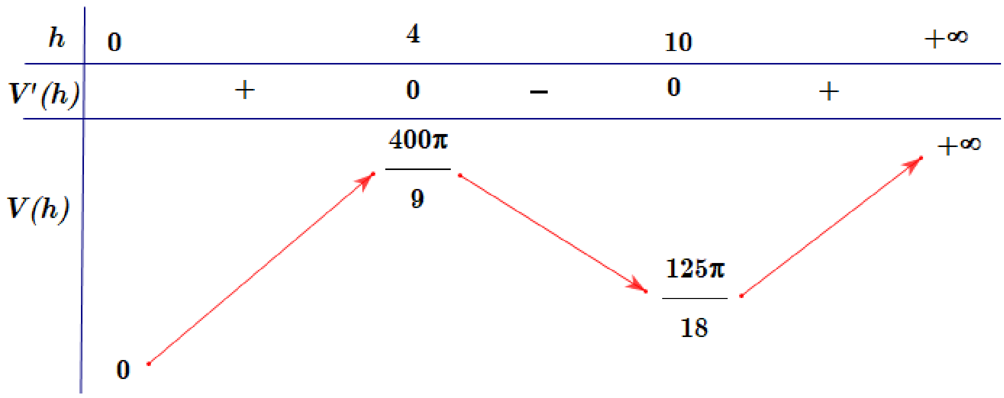
a) Ta có: $rh = \dfrac{1}{2}\cdot 12\cdot 5 - \dfrac{1}{2}\cdot h(5 - r) - \dfrac{1}{2}(12 - h)\cdot r = \dfrac{60 - 5h + rh - 12r + rh}{2}$

$\Leftrightarrow 2rh = 60 - 5h + 2rh - 12r \Leftrightarrow 12r = 60 - 5h \Leftrightarrow r = \dfrac{5(12 - h)}{12}$

b) Thể tích khối trụ là: $V(h) = \pi r^2 h = \pi\cdot\dfrac{5^2(12 - h)^2}{12^2}h = \dfrac{25\pi h(12 - h)^2}{144}$

c) $V'(h) = \dfrac{75\pi h^2 - 1200\pi h + 3600\pi}{144} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h = 4 \\ h = 12 \end{array}\right.$

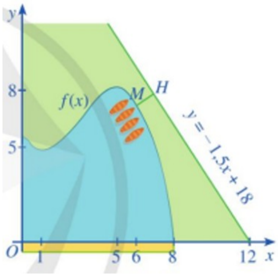
Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên, ta thấy $\max_{(0;+\infty)} V(h) = V(4) = \dfrac{400\pi}{9}$

Vậy để khối trụ có thể tích lớn nhất thì $h = 4cm$

Câu 6. Một hồ nước nhân tạo được xây dựng trong một công viên giải trí. Trong mô hình minh họa (Hình), nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{10}\left(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56\right)$. Đơn vị đo độ dài trên mỗi trục tọa độ là $100m$



a) Đường dạo ven hồ chạy dọc theo trục Ox dài bao nhiêu mét?

b) Tại những điểm nào trên đường đi dạo ven hồ (chạy dọc theo trục Ox) thì khoảng cách theo Hình phương thẳng đứng đến bờ hồ đối diện là lớn nhất? Tìm khoảng cách lớn nhất đó.

c) Trong công viên có một con đường chạy dọc theo đồ thị hàm số $y = -1,5x + 18$. Người ta dự định xây dựng bên bờ hồ một bến thuyền đạp nước sao cho khoảng cách từ bến thuyền đến con đường này là ngắn nhất. Tìm tọa độ của điểm để xây bến thuyền này.

Giải

a) Trong Hình, đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{10}\left(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56\right)$ cắt tia Ox tại điểm có hoành độ $x = 8$. Vậy đường dạo ven hồ chạy dọc theo trục Ox dài $800m$.

b) Ta khảo sát hàm số: $f(x) = \frac{1}{10}\left(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56\right)$ với $0 \le x \le 8$.

$f'(x) = \frac{1}{10}\left(-3x^2 + 18x - 15\right)$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5.$

Bảng biến thiên:

x	0		1		5		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	5,6	↘	4,9	↗	8,1	↘	0

Căn cứ bảng biến thiên, ta có: $\max_{[0;8]} f(x) = f(5) = 8,1$ tại $x = 5$.

Vậy khoảng cách lớn nhất theo phương thẳng đứng từ một điểm trên đường đi dạo ven hồ (chạy dọc theo trục Ox) đến bờ hồ đối diện là:

$100.\left(\max_{[0;8]} f(x)\right)=100\cdot f(5)=100\cdot 8{,}1=810(m)$ và đạt được tại điểm trên đường đi dạo ven hồ cách gốc O một khoảng cách là $500m$.

c) Xét điểm $M(x;f(x))$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)=\frac{1}{10}\left(-x^3+9x^2-15x+56\right)$ với $0\le x\le 8$.

Khoảng cách từ điểm $M(x;f(x))$ đến đường thẳng $y=-1{,}5x+18\Leftrightarrow -1{,}5x-y+18=0$ là:

$$MH=\frac{\left|-1{,}5x-\frac{1}{10}\left(-x^3+9x^2-15x+56\right)+18\right|}{\sqrt{(-1{,}5)^2+1}}=\frac{\left|x^3-9x^2+124\right|}{10\sqrt{3{,}25}}.$$

Ta khảo sát hàm số: $h(x)=x^3-9x^2+124$ với $0\le x\le 8$.

$h'(x)=3x^2-18x;$

$h'(x)=0\Leftrightarrow x^2-6x=0\Leftrightarrow x=0 \vee x=6.$

Bảng biến thiên:

x	0		6		8
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	124	$\searrow$	16	$\nearrow$	60

Căn cứ bảng biến thiên, ta có: $h(x)>0$ với $0\le x\le 8$;

$\min_{[0;8]} h(x)=h(6)=16, x=6.$

Do đó, $$\min MH=\min_{[0;8]}\frac{\left|x^3-9x^2+124\right|}{10\sqrt{3{,}25}}=\frac{1}{10\sqrt{3{,}25}}\cdot\min_{[0;8]} h(x)=\frac{16}{10\sqrt{3{,}25}}\approx 0{,}8875$$

và đạt được tại $x=6$. Khi đó, $f(6)=7{,}4$.

Vậy trong mặt phẳng toạ độ Oxy ở Hình, điểm để xây bến thuyền có tọa độ là $M(6;7{,}4)$.

Câu 7. Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao $250km$ so với bề mặt của Mặt Trăng.
Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm

$h(t)=-0{,}01t^3+1{,}1t^2-30t+250,$ trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng kilômét

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y=h(t)$ với $0\le t\le 50$ (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là $10km$).

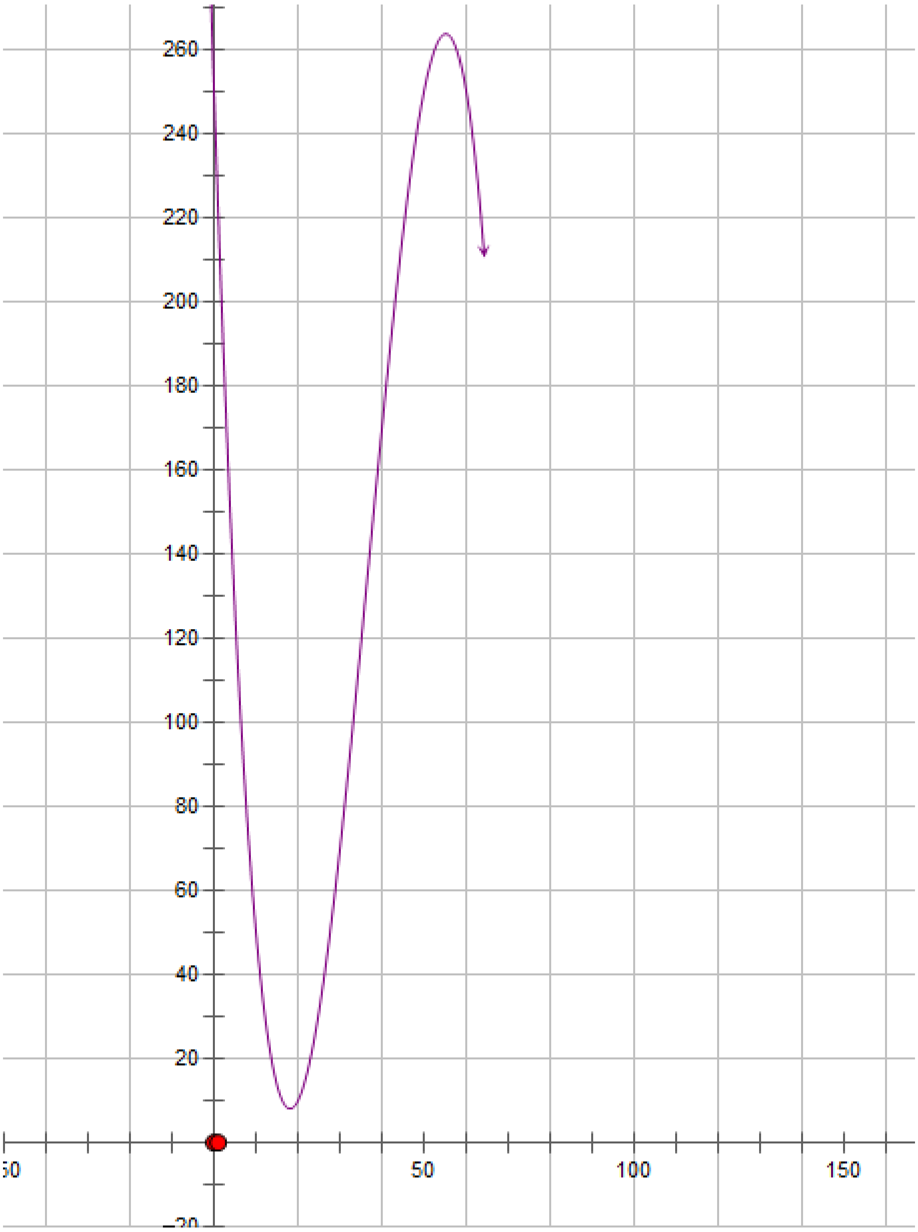
b) Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $0 \le t \le 50$. Xác định hàm số $v(t)$.

c) Vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu hãm phanh là bao nhiêu? Tại thời điểm $t = 25$ (giây) là bao nhiêu?

d) Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm hay đang tăng trở lại?

Lời giải

a)



b) Vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t, $v(t)$, là đạo hàm của hàm số $h(t)$ theo thời gian t. Hàm số $h(t)$ đã cho là: $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$

Để tìm $v(t)$, ta lấy đạo hàm của $h(t)$: $v(t) = h'(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30$

Vậy hàm số $v(t)$ biểu diễn vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t là:

$v(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30$

c) Vận tốc tức thời của con tàu được xác định bởi hàm $v(t)=-0,03t^2+2,2t-30$

Tại thời điểm bắt đầu hãm phanh $(t=0)$, vận tốc của con tàu là:

$v(0)=-0,030^2+2,20-30=-30km/s$

Tại thời điểm $t=25$ giây, vận tốc của con tàu là:

$v(25)=-0,0325^2+2,225-30=-18,75km/s$

Vậy, vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu hãm phanh là $-30km/s$ và tại thời điểm $t=25$ giây là $-18,75km/s$. Lưu ý rằng vận tốc âm ở đây chỉ ra rằng con tàu đang di chuyển về phía Mặt Trăng.

d) Để xác định liệu vận tốc của con tàu tại thời điểm t = 25 giây có đang tăng hay giảm, chúng ta cần xem xét đạo hàm bậc hai của hàm số $h(t)$, tức là gia tốc của con tàu.

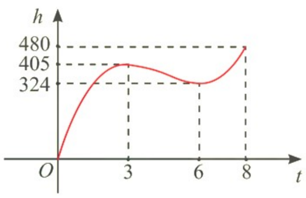
Gia tốc $a(t)$ là đạo hàm của vận tốc $v(t)$, tức là đạo hàm bậc hai của $h(t)$:

$a(t)=v'(t)=-0,06t+2,2$

Tại thời điểm $t=25$ giây, gia tốc của con tàu là: $a(25)=-0,06.25+2,2=-1,3km/s^2$

Vi gia tốc $a(25)<0$, nên vận tốc của con tàu tại thời điểm $t=25$ giây đang giảm.

Câu 8. Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi công thức $h(t)=6t^3-81t^2+324t$. Đồ thị của hàm số $h(t)$ được biểu diễn trong hình bên. Trong các khoảng thời gian nào khinh khí cầu tăng dần độ cao, giảm dần độ cao?



Độ cao của khinh khí cầu vào các thời điểm 3 phút và 6 phút sau khi xuất phát có gì đặc biệt?

Lời giải

Hàm số $h(t)=6t^3-81t^2+324t$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Có $h'(t)=18t^2-162t+324; h'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=6 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

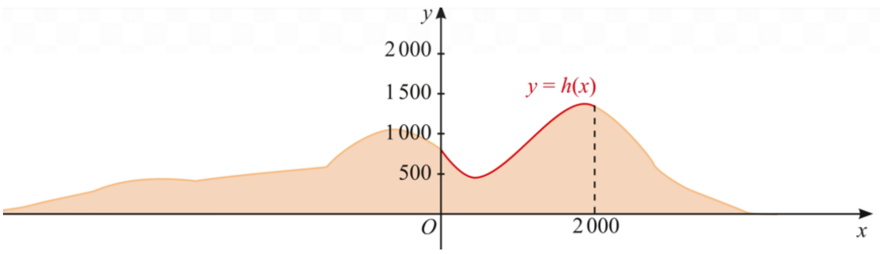
x	0		3		6		8
y'		+	0	−	0	+	
y	0	↗	405	↘	324	↗	480

Trong thời gian từ lúc xuất phát đến thời điểm 3 phút, độ cao của khinh khí cầu tăng dần từ $0\,m$ lên $405\,m$

Độ cao của khinh khí cầu tăng dần từ $0\,m$ lên $405\,m$ trong thời gian từ lúc xuất phát đến thời điểm 3 phút, từ $324\,m$ lên $480\,m$ trong thời gian từ 6 phút đến 8 phút

Độ cao của khinh khí cầu giảm dần từ $405\,m$ xuống $324\,m$ trong thời gian từ 3 phút đến 6 phút

Câu 9. Một phần lát cắt của dãy núi có độ cao tính bằng mét được mô tả bởi hàm số
$y = h(x) = -\frac{1}{1320000}x^3 + \frac{9}{3520}x^2 - \frac{81}{44}x + 840, 0 \le x \le 2000.$



Tìm toạ độ các đỉnh của lát cắt dãy núi trên đoạn [0; 2000].

Lời giải

Tập xác định: $D = [0;2000]$

$$h'(x) = -\frac{1}{440000}x^2 + \frac{9}{1760}x - \frac{81}{44} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1800 \\ x = 450 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

t	0		450		1800		2000
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	840	$\searrow$	460,3125	$\nearrow$	1392,27	$\searrow$	1324,85

Vậy trên đoạn $[0;2000]$:

Tọa độ đỉnh cực tiểu của dãy núi là $(450;460,3125)$

Tọa độ đỉnh cực đại của dãy núi là $(1800;1392,27)$

Câu 10. Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức $f(x) = 0,01x^3 - 0,04x^2 + 0,25x + 0,44$ (tỉ USD) với x là số năm tính từ 2010 đến $2017 (0 \le x \le 7)$.

a) Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$.

b) Chứng minh rằng kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

Lời giải

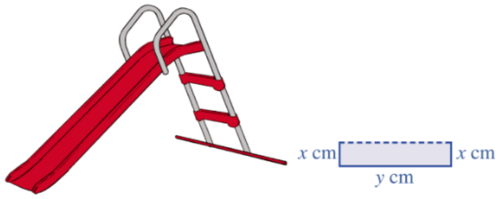
a) $y' = f'(x) = 0,03x^2 - 0,08x + 0,25$

b) Tập xác định: $D = [0;7]$

Ta có: $y' = f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $y = f(x)$ luôn đồng biến $\forall x \in [0;7]$

Vậy kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

Câu 11. Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em (Hình a) được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng $80\,cm$, mặt cắt được mô tả ở Hình **b.** Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích của mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em.



a) b)

a) Gọi S là diện tích mặt cắt. Tìm điều kiện của x và viết công thức tính S theo x.

b) Với x đạt giá trị bằng bao nhiêu thì cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em?

Giải

a) Do tấm kim loại có bề rộng $80\,cm$ nên ta có: $2x + y = 80 \Leftrightarrow y = 80 - 2x$.

Để có thể thiết kế được máng trượt thì $y > 0 \Leftrightarrow 80 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 40$. Suy ra $0 < x < 40$.

Diện tích của mặt cắt máng trượt là: $S = xy = x(80 - 2x) = -2x^2 + 80x$.

b) Ta có: $S(x) = -2x^2 + 80x$ với $x \in (0;40)$;

$S'(x) = -4x + 80;$

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 80 = 0 \Leftrightarrow x = 20.$

Bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ như sau:

x	0		20		40
$S'(x)$		+	0	−	
$S(x)$	0	↗	800	↘	0

Do đó, hàm số $S(x)$ đạt cực đại tại $x = 20$ và $S_{CĐ} = 800$.

Vậy để cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em thì $x = 20(cm)$.

Câu 12. Thể tích V (đơn vị: centimét khối) của $1kg$ nước tại nhiệt độ $T\left(0^\circ C \le T \le 30^\circ C\right)$ được tính bởi công thức sau: $V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$.

Hỏi thể tích $V(T), 0^\circ C \le T \le 30^\circ C$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $V'(T) = -0,06426 + 2 \times 0,0085043 \times T - 3 \times 0,0000679T^2$.

Nhận xét $V'(T) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} T \approx 79,5 \\ T \approx 3,97 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	0		3,97		30
y'		−	0	+	
y		↘	$v(3,97)$	↗	

Vậy thể tích giảm trong khoảng nhiệt độ từ $(0^{\circ};3,97^{\circ})$.

Câu 13. Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126(s)$, cho bởi hàm số sau: $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23$, ($v$ được tính bằng ft/s, 1 feet $= 0,3048\,m$)

Hỏi gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian nào tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi?

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $v'(t) = 3 \times 0,001320t^2 - 2 \times 0,09029t$.

Nhận xét $a(t) = v'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t \approx 46,23 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		0		$46,23$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	23	$\searrow$	$-41,33$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy gia tốc tàu con thoi tăng trong khoảng $46,23$ s đầu tiên.

Câu 14. Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2, 0 \le t \le 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần).

a) Hãy ước tính số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương đó.

b) Đạo hàm $N'(t)$ biểu thị tốc độ lây lan của virus (còn gọi là tốc độ truyền bệnh). Hỏi virus sẽ lây lan nhanh nhất khi nào?

Lời giải

a) Với $0 \le t \le 12$ ta có:

$$N'(t) = -3t^2 + 24t, N'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 + 24t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0(tm) \\ t = 8(tm) \end{array}\right.$$

Ta có: $N(0) = 0, N(8) = -8^3 + 12.8^2 = 256, N(12) = -12^3 + 12.12^2 = 0$

Do đó, số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương là 256 người trong 12 tuần đầu.

b) Hàm số biểu thị tốc độ độ lây lan của virus là: $N'(t) = -3t^2 + 24t$

Đặt $f(t) = -3t^2 + 24t$, với $0 \le t \le 12$

Ta có: $f'(t) = -6t + 24, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4(tm)$

$f(0) = 0, f(4) = -3.4^2 + 24.4 = 48, f(12) = -3.12^2 + 24.12 = -144$

Do đó, virus sẽ lây lan nhanh nhất khi $t = 4$ (tuần thứ 4).

Câu 15. Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000 cm³. Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá 1,2 nghìn đồng/cm², trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá 0,75 nghìn đồng/cm². Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi bán kính đáy của bình là $x(cm, x > 0)$

Chiều cao của bình là: $\dfrac{1000}{\pi \cdot x^2}(cm)$

Chi phí để sản xuất một chiếc bình là: $T(x)=2\cdot 1,2\cdot \pi\cdot x^2+0,75\cdot\dfrac{2000}{x}=2,4\pi\cdot x^2+\dfrac{1500}{x}$ (nghìn đồng)

Để chi phí sản xuất mỗi chiếc bình là thấp nhất thì $T(x)$ là nhỏ nhất.

$T'(x)=4,8\pi x-\dfrac{1500}{x^2}, T'(x)=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{625}{2\pi}}$ (thỏa mãn)

Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}$		$+\infty$
T'(x)		$-$	0	$+$	
T(x)	$+\infty$	$\searrow$	$S\left(\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Để chi phí sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất thì bán kính đáy của bình là $\sqrt[3]{\dfrac{625}{2\pi}}cm$ và chiều cao của bình là: $\dfrac{1000}{\pi\cdot\left(\sqrt[3]{\dfrac{625}{2\pi}}\right)^2}(cm)$

Câu 16. Khi làm nhà kho, bác An muốn cửa sổ có dạng hình chữ nhật với chu vi bằng $4m$ (Hình). Tìm kích thước khung cửa sổ sao cho diện tích cửa sổ lớn nhất (để hứng được nhiều ánh sáng nhất)?

Lời giải

Gọi a,b lần lượt là chiều dài và chiều rộng của cửa sổ ($m; a,b>0$)

Chu vi cửa sổ là: $2(a+b)=4\Leftrightarrow b=2-a$

Diện tích cửa sổ là: $y=ab=a(2-a)=-a^2+2a$

$y'=-2a+2=0\Leftrightarrow a=1$

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y			1		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\max\limits_{(0;+\infty)} y = y(1) = 1$

Vậy để diện tích cửa sổ lớn nhất bằng $1m^2$ thì chiều dài và chiều rộng bằng nhau và bằng $1m$

Câu 17. Khối lượng $q(kg)$ của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng/kg) theo công thức $p = 15 - \frac{1}{2}q$. Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức $R = pq$.

a) Viết công thức biểu diễn R theo p.

b) Tìm giá bán mỗi kilôgam sản phẩm để đạt được doanh thu cao nhất và xác định doanh thu cao nhất đó.

Lời giải

a) Ta có: $p = 15 - \frac{1}{2}q \Leftrightarrow q = 2(15 - p)$

Thay vào $R = pq$ ta được: $R = p \cdot 2(15 - p) = -2p^2 + 30p$

b) Đặt $y = -2p^2 + 30p$

Tập xác định: $D = (0; +\infty)$

$y' = -4p + 30 = 0 \Leftrightarrow p = 7,5$

Bảng biến thiên:

x	0		$7,5$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$112,5$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\max_D y = y(7,5) = 112,5$

Vậy nếu giá bán mỗi kilôgam sản phẩm là 7,5 nghìn đồng/kg thì sẽ đạt được doanh thu cao nhất là 112,5 nghìn đồng

Câu 18. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức $V(t) = 300\left(t^2 - t^3\right) + 4;\ 0 \le t \le 0,5.$

a) Ban đầu trong bình xăng có bao nhiêu lít xăng?

b) Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Hỏi dung tích của bình xăng trong xe là bao nhiêu lít?

c) Khi xăng chảy vào bình xăng, gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \le t \le 0,5$. Xăng chảy vào bình xăng ở thời điểm nào có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất?

Lời giải

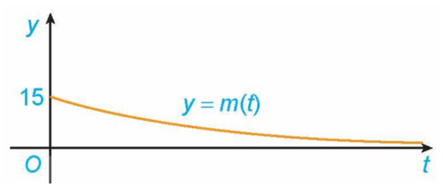
a) Ban đầu bình xăng có $V(0) = 4$ lít xăng.

b) Sau khi bơm 30s, ta có $V(0,5) = 41,5l$

c) Ta có: $V'(t) = 300\left(2t - 3t^2\right)$

Nhận xét: $V'(t)$ có đồ thị là một parabol nên tốc độ tăng thể tích đạt giá trị lớn nhất bằng 100 tại $t = \frac{1}{3}s$.

Câu 19. Giả sử khối lượng còn lại của một chất phóng xạ (gam) sau t ngày phân rã được cho bởi hàm số $m(t) = 15e^{-0,012t}$.



Khối lượng $m(t)$ thay đổi ra sao khi $t \to +\infty$?

Điều này thể hiện trên Hình như thế nào?

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty} m(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} 15e^{-0,012t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{15}{e^{0,012t}} = 0$

Do đó, $m(t) \to 0$ khi $t \to +\infty$.

Trong hình, khi $t \to +\infty$ thì $m(t)$ càng gần trục hoành Ot (nhưng không chạm trục Ot).

Câu 20. Để loại bỏ $p\%$ một loài tảo độc khỏi một hồ nước, người ta ước tính chi phí bỏ ra là $C(p) = \dfrac{45p}{100-p}$ (triệu đồng), với $0 \le p < 100$.

Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(p)$ và nêu ý nghĩa thực tiễn của đường tiệm cận này.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{p\to100^-} C(p) = \lim\limits_{p\to100^-} \dfrac{45p}{100-p} = +\infty$ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(p)$ là $p = 100$.

Ý nghĩa của đường tiệm cận là: Không thể loại bỏ hết loài tảo độc ra khỏi hồ nước dù chi phí là bao nhiêu.

Câu 21. Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x + 50$ (triệu đồng)

Khi đó $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ giảm và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$. Tính chất này nói lên điều gì?

Lời giải

Ta có: $f(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{2x+50}{x}$

Vì $f'(x) = \dfrac{-50}{x^2} < 0$ với mọi số thực x nên hàm số $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ giảm.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+50}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\frac{50}{x}}{1} = 2$ (đpcm)

Tính chất này nói lên: Khi sản xuất càng nhiều sản phẩm thì chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm càng giảm, nhưng không dưới 2.

Câu 22. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng $144\,m^2$. Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là $x(m)$.

a) Viết biểu thức tính chu vi $P(x)$ (mét) của mảnh vườn.

b) Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $P(x)$.

Lời giải

a) Độ dài cạnh còn lại của mảnh vườn là: $\dfrac{144}{x}(m)$

Chu vi của mảnh vườn là: $P(x)=2\left(x+\frac{144}{x}\right)=2x+\frac{288}{x}(m)$

b) Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\frac{288}{x}\right)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\frac{288}{x}\right)=-\infty$

Do đó, đồ thị hàm số $P(x)$ không có tiệm cận ngang.

Vì $\lim\limits_{x\to0^-} y=\lim\limits_{x\to0^-}\left(2x+\frac{288}{x}\right)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to0^+} y=\lim\limits_{x\to0^+}\left(2x+\frac{288}{x}\right)=+\infty$

Do đó, đồ thị hàm số $P(x)$ có tiệm cận đứng là $x=0$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}[P(x)-2x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\frac{288}{x}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{288}{x}=0$

Do đó, đồ thị hàm số $P(x)$ có tiệm cận xiên là: $y=2x$.

Câu 23. Trong Hình, đường viền bóng của đèn ngủ lên tường là đồ thị của hàm số $y=55-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+144}$ với x và y tính bằng đơn vị centimét.

Chứng minh rằng $y=55-\frac{1}{2}x$ là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số này.

Giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(55-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+144}\right)-\left(55-\frac{1}{2}x\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2+144}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{-144}{x+\sqrt{x^2+144}}\right)=0.$

Tương tự ta cũng có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(55-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+144}\right)-\left(55-\frac{1}{2}x\right)\right]=0$.

Do đó $y=55-\frac{1}{2}x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=55-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+144}$.

Câu 24. Nếu trong một ngày, một xưởng sản xuất được x kilôgam sản phẩm thì chi phí trung bình (tính bằng nghìn đồng) cho một sản phẩm được cho bởi công thức:

$$C(x)=\frac{50x+2000}{x}.$$

Tìm các đường tiệm cận của hàm số $C(x)$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{x\to 0^+} C(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{50x+2000}{x}=\frac{2000}{0}=+\infty;\ \lim_{x\to 0^-} C(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{50x+2000}{x}=\frac{2000}{0}=+\infty$$

Vậy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x=0$

$$\lim_{x\to +\infty} C(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{50x+2000}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{50+\frac{2000}{x}}{1}=50;\ \lim_{x\to -\infty} C(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{50x+2000}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{50+\frac{2000}{x}}{1}=50$$

Vậy tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng $y=50$

Câu 25. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t)=5-\frac{15t}{9t^2+1}$, với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t\ge 0$. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y(t)$. Từ đó, có nhận xét gì về nồng độ oxygen trong hồ khi thời gian t trở nên rất lớn?

Lời giải

Xét $y(t)=5-\frac{15t}{9t^2+1}$

Ta có:

$$\lim_{t\to +\infty} y(t)=\lim_{t\to +\infty}\left(5-\frac{15t}{9t^2+1}\right)=\lim_{t\to +\infty}\frac{45t^2-15t+5}{9t^2+1}=\lim_{t\to +\infty}\frac{45-\frac{15}{t}+\frac{5}{t^2}}{9+\frac{1}{t^2}}=5$$

$$\lim_{t\to -\infty} y(t)=\lim_{t\to -\infty}\left(5-\frac{15t}{9t^2+1}\right)=\lim_{t\to -\infty}\frac{45t^2-15t+5}{9t^2+1}=\lim_{t\to -\infty}\frac{45-\frac{15}{t}+\frac{5}{t^2}}{9+\frac{1}{t^2}}=5$$

Vậy đường thẳng $y=5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Nhận xét: Khi thời gian t trở nên rất lớn, nồng độ oxygen trong hồ tiến dần về $5mg/l$

Câu 26. Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút.

a) Chứng tỏ nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là $f(t)=\frac{30t}{200+t}$.

b) Xem $y=f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0;+\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

c) Nêu nhận xét về nồng độ muối trong bể sau thời gian t ngày càng lớn.

Giải

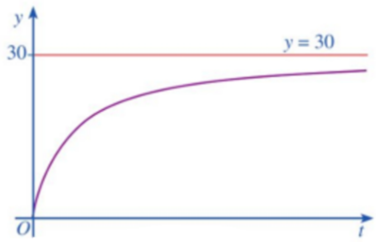
a) Sau t phút, ta có: khối lượng muối trong bể là 25. $30\cdot t=750t$ (gam); thể tích của lượng nước trong bể là $5000+25t$ (lít). Vậy nồng độ muối sau t phút là

$$f(t)=\frac{750t}{5000+25t}=\frac{30t}{200+t}(\text{ gam/lít }).$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} f(t)&=\lim_{t\to+\infty}\frac{30t}{200+t}\\&=\lim_{t\to+\infty}\left(30-\frac{6000}{200+t}\right)=30.\end{aligned}$$

Vậy đường thẳng $y=30$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ (Hình).



c) Ta có đồ thị hàm số $y=f(t)$ nhận đường thẳng $y=30$ làm tiệm cận ngang, tức là

khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể sẽ tiến gần đến mức 30 (gam/lít). Lúc đó, nồng độ muối trong bể sẽ gần như bằng nồng độ muối trong nước muối được bơm vào bể.

Câu 27. Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức $S(x)=200\left(5-\frac{9}{2+x}\right)$, trong đó $x\geq 1$.

a) Xem $y=S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1;+\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

b) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Lời giải

a) Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} S(x)=1000$

Vậy đường thẳng $y=1000$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $S(x)$

b) Khi x đủ lớn thì số lượng sản phẩm bán được của công ti đó trong tháng x sẽ gần đạt được 1000 sản phẩm

Câu 28. Một cốc chứa $30ml$ dung dịch KOH (potassium hydroxide) với nồng độ $100mg/ml$. Một bình chứa dung dịch KOH khác với nồng độ $8mg/ml$ được trộn vào cốc.

a) Tính nồng độ KOH trong cốc sau khi trộn $x(ml)$ từ bình chứa, kí hiệu là $C(x)$.

b) Coi $C(x)$ là hàm số xác định với $x\geq 0$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số này.

c) Giải thích tại sao nồng độ KOH trong cốc giảm theo x nhưng luôn lớn hơn 8 mg/ml.

Lời giải

a) Khối lượng dung dịch trong cốc sau khi trộn $x(ml)\,KOH$ từ bình chứa là: $m = 30.100 + 8x = 8x + 3000(mg)$

Thể tích dung dịch trong cốc sau khi trộn $x(ml)\,KOH$ từ bình chứa là: $V = 30 + x(ml)$

Nồng độ KOH trong cốc sau khi trộn $x(ml)$ từ bình chứa là:

$$C(x) = \frac{m}{V} = \frac{8x+3000}{30+x}(mg/ml)$$

b) Khảo sát hàm số $y = C(x) = \dfrac{8x+3000}{x+30}$ với $x \geq 0$.

1. Tập xác định của hàm số: $[0;+\infty)$

2. Sự biến thiên:

$$C'(x) = \frac{-2760}{(x+30)^2} < 0,\ \forall x \geq 0$$

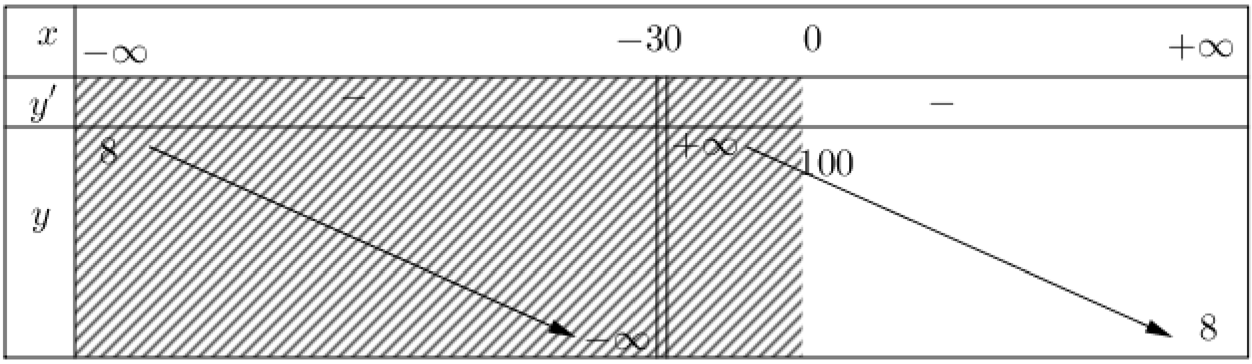
Hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

$$\lim_{x\to+\infty} C(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x+3000}{x+30} = 8.$$

Do đó, đồ thị hàm số $y = C(x) = \dfrac{8x+3000}{x+30}$ nhận đường thẳng $y = 8$ làm tiệm cận ngang (phần bên phải trục Oy)

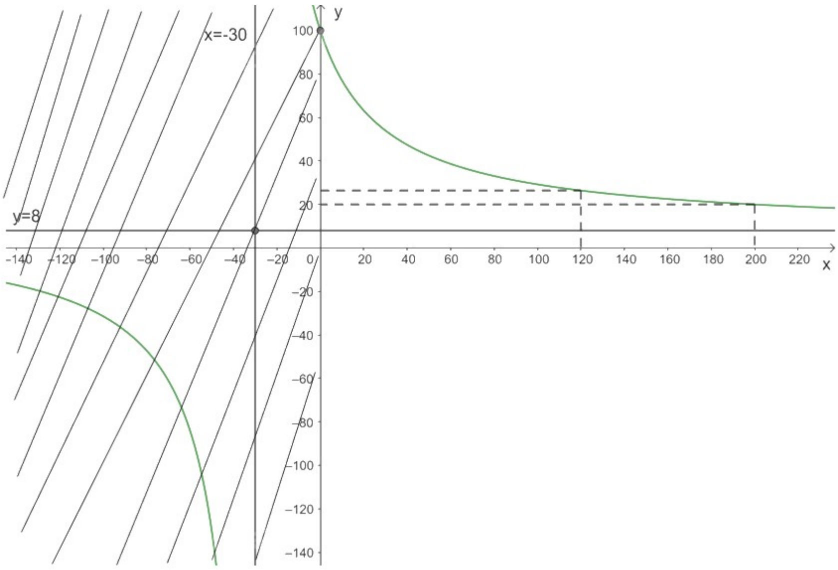
Bảng biến thiên:



3. Đồ thị: Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0;100)$.

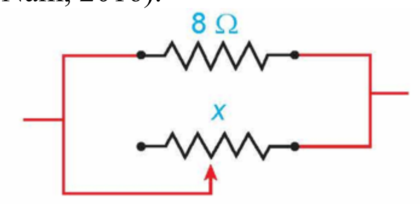
Đồ thị hàm số $y = C(x) = \dfrac{8x+3000}{x+30}$ đi qua các điểm $(200;20);\left(120;\dfrac{132}{5}\right)$.

Đồ thị của hàm số $y = C(x) = \dfrac{8x+3000}{x+30}$ với $x \geq 0$ là phần nét màu xanh không bị gạch chéo.



c) Vì $C'(x) = \frac{-2760}{(x+30)^2} < 0, \forall x \geq 0$ và $\lim_{x \to +\infty} C(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{8x+3000}{x+30} = 8$ nên nồng độ KOH trong cốc giảm theo x nhưng luôn lớn hơn $8mg/ml$

Câu 29. Trong Vật lí, ta biết rằng khi mắc song song hai điện trở R_1 và R_2 thì điện trở tương đương R của mạch điện được tính theo công thức $R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$ (theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).



Giả sử một điện trở 8Ω được mắc song song với một biến trở như Hình. Nếu điện trở đó được kí hiệu là $x(\Omega)$ thì điện trở tương đương R là hàm số của x. Vẽ đồ thị của hàm số $y = R(x), x > 0$ và dựa vào đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:

a) Điện trở tương đương của mạch thay đổi thế nào khi x tăng.

b) Tại sao điện trở tương đương của mạch không bao giờ vượt quá 8Ω.

Lời giải

Khi một điện trở 8Ω được mắc song song với một biến trở $x(\Omega)$ thì điện trở tương đương của mạch là: $R(x) = \frac{8x}{x+8}(\Omega)$

Vẽ đồ thị hàm số $y = R(x) = \frac{8x}{x+8}$ với $x > 0$.

1. Tập xác định của hàm số: $(0; +\infty)$

2. Sự biến thiên: $R'(x) = \frac{64}{(x+8)^2} > 0, \forall x > 0$

Hàm số đồng trên $(0;+\infty)$.

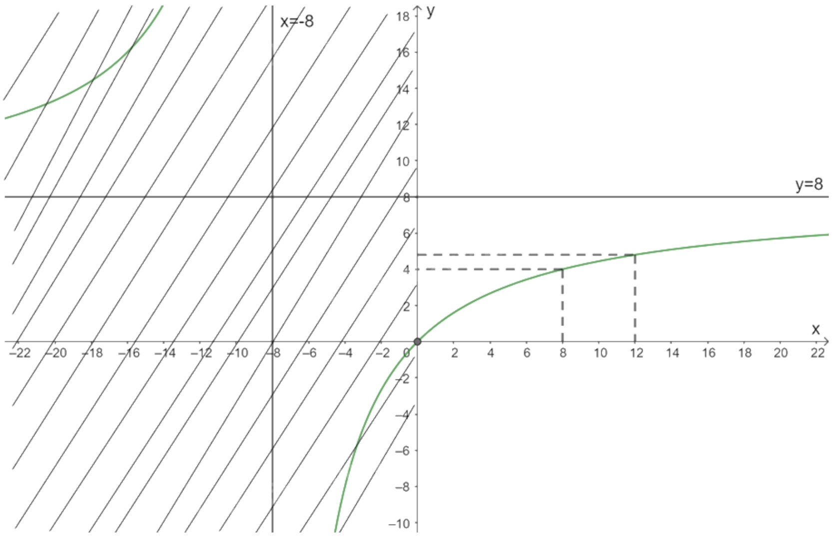
Hàm số không có cực trị, $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8x}{x+8} = 8$

Do đó, đồ thị hàm số $y = R(x) = \dfrac{8x}{x+8}$ với $x > 0$ nhận đường thẳng $y = 8$ làm tiệm cận ngang (phần bên phải trục Oy).

Bảng biến thiên:

x	0	$+\infty$
y'	+	
y	0 $\nearrow$	8

Đồ thị:



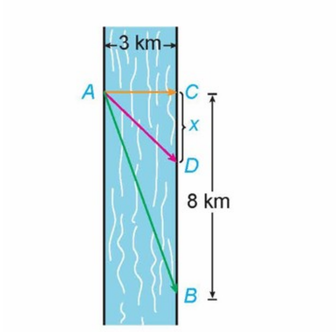
Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0;0)$.

Đồ thị hàm số $y = R(x) = \dfrac{8x}{x+8}$ đi qua các điểm $(8;4);\left(12;\dfrac{24}{5}\right)$.

a) Vì $R'(x) = \dfrac{64}{(x+8)^2} > 0,\ \forall x > 0$ nên khi x tăng thì điện trở tương đương của mạch tăng.

b) Vì $R'(x) = \dfrac{64}{(x+8)^2} > 0,\ \forall x > 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8x}{x+8} = 8$ nên điện trở tương đương của mạch không bao giờ vượt quá 8Ω.

Câu 30. Anh An chèo thuyền từ điểm A trên bờ một con sông thẳng rộng $3km$ và muốn đến điểm B ở bờ đối diện cách $8km$ về phía hạ lưu càng nhanh càng tốt. Anh An có thể chèo thuyền trực tiếp qua sông đến điểm C rồi chạy bộ đến B, hoặc anh có thể chèo thuyền thẳng đến B, hoặc anh cũng có thể chèo thuyền đến một điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B. Nếu vận tốc chèo thuyền là $6km/h$ và vận tốc chạy bộ là $8km/h$ thì anh An phải chèo thuyền sang bờ ở điểm nào để đến được B càng sớm càng tốt? (Giả sử rằng vận tốc của nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An).



Lời giải

Gọi độ dài đoạn CD là $x(km)(0 < x < 8)$

Quãng đường AD dài: $\sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{9 + x^2}(km)$

Quãng đường BD dài $8 - x(km)$

Thời gian người đó đi đến B bằng cách chèo thuyền đến một điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B là: $\dfrac{\sqrt{9+x^2}}{6} + \dfrac{8-x}{8}$ (giờ)

Xét hàm số $y = \dfrac{\sqrt{9+x^2}}{6} + \dfrac{8-x}{8}$ với $0 < x < 8$

Ta có: $y' = \dfrac{x}{6\sqrt{9+x^2}} - \dfrac{1}{8}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 4x = 3\sqrt{9+x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 = 9(9+x^2) \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{81}{7} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{9}{\sqrt{7}}$		8
y'		$-$	0	$+$	
y	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	$1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{73}}{6}$

Vậy anh An phải chèo thuyền sang bờ ở điểm D cách B một khoảng bằng $\frac{9}{\sqrt{7}}km$ thì đến B sớm nhất.

Câu 31. Giả sử chi phí (tính bằng trăm nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị hàng hoá nào đó là: $C(x)=23000+50x-0,5x^2+0,00175x^3$.

a) Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm $C'(100)$ và giải thích ý nghĩa của nó.

c) So sánh $C'(100)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 101.

Lời giải

a) Hàm chi phí biên là: $C'(x)=0,00525x^2-x+50$.

b) Ta có: $C'(100)=0,00525\cdot 100^2-100+50=2,5$ (trăm nghìn đồng)

Chi phí biên tại $x=100$ là 250000 đồng, nghĩa là chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hóa tiếp theo (đơn thứ 101) là khoảng 250000 đồng.

c) Chi phí sản xuất đơn hàng thứ 101 là:

$C(101)-C(100)=24752,52675-24750=2,52675$ (trăm nghìn đồng)

Câu 32. Giả sử hàm cầu đối với một loại hàng hoá được cho bởi công thức $p=\frac{354}{1+0,01x}, x\geq 0,$ trong đó p là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán.

a) Tìm công thức tính x như là hàm số của p. Tìm tập xác định của hàm số này. Tính số đơn vị sản phẩm đã bán khi giá bán của mỗi đơn vị sản phẩm là 240 nghìn đồng.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $x=x(p)$. Từ đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:

- Số lượng đơn vị sản phẩm bán được sẽ thay đổi thế nào khi giá bán p tăng;

- Ý nghĩa thực tiễn của giới hạn $\lim\limits_{p\to 0^+} x(p)$.

Lời giải

a) Vì $p=\frac{354}{1+0,01x}\Rightarrow p(1+0,01x)=354\Rightarrow p+0,01px=354\Rightarrow x=\frac{354-p}{0,01p}$

Tập xác định của hàm số là: $(0;354]$

Với $p=240$ ta có: $x=\frac{354-240}{0,01.240}=47,5$

Vậy với giá bán mỗi đơn vị sản phẩm là 240 nghìn đồng thì bán được 47,5 đơn vị sản phẩm.

b) Khảo sát sự biến thiên của hàm số: $x=x(p)=\frac{354-p}{0,01p}$

1. Tập xác định của hàm số: $(0;354]$

2. Sự biến thiên:

Ta có: $x'(p) = \dfrac{-3,54}{(0,01p)^2} < 0$ với mọi $p \in (0;354]$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;354)$.

Hàm số không có cực trị.

Giới hạn: $\lim\limits_{p\to 0^+} x(p) = \lim\limits_{p\to 0^+} \dfrac{354-p}{0,01p} = +\infty$

Do đó, đồ thị hàm số $x = x(p) = \dfrac{354-p}{0,01p}$ với $p \in (0;354]$ nhận đường thẳng $p = 0$ làm tiệm cận đứng.

Bảng biến thiên:

x	0		354
y'		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0

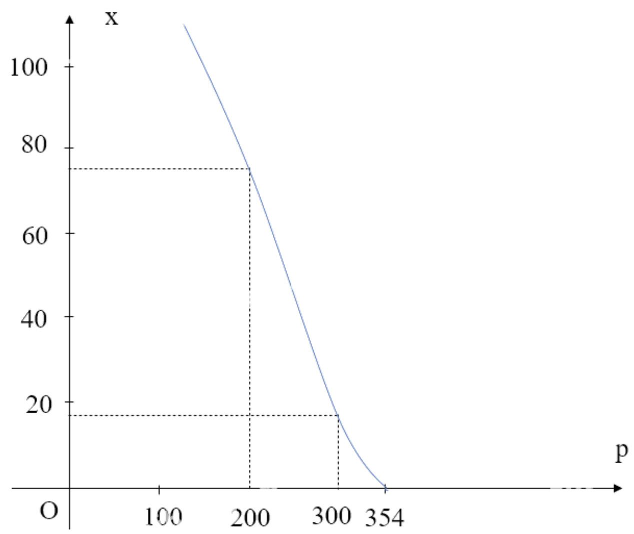
3. Đồ thị:

Ta có: $f(p) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{354-p}{0,01p} = 0 \Leftrightarrow p = 354$

Đồ thị hàm số $x = f(p) = \dfrac{354-p}{0,01p}$ cắt trục hoành tại điểm $(354;0)$.

Đồ thị hàm số $x = f(p) = \dfrac{354-p}{0,01p}$ đi qua các điểm $(300;18);(200;77)$.

Đồ thị hàm số $x = f(p) = \dfrac{354-p}{0,01p}$ với $p \in (0;354]$ là đường màu xanh:

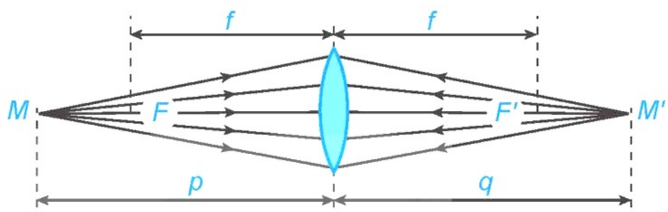


- Số lượng đơn vị sản phẩm bán sẽ giảm đi khi giá bán tăng, và sẽ không bán được sản phẩm nào nếu giá bán là 354 nghìn đồng

- Ý nghĩa thực tiễn của giới hạn $\lim\limits_{p\to 0^+} x(p)$: Vì $\lim\limits_{p\to 0^+} x(p) = +\infty$ nên giá bán càng thấp thì số lượng đơn vị sản phẩm sẽ bán được càng nhiều.

Câu 33. Xét một thấu kính hội tụ có tiêu cự f. Khoảng cách p từ vật đến thấu kính liên hệ với khoảng cách q từ ảnh đến thấu kính bởi hệ thức:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$$



a) Viết công thức tính $q = g(p)$ như một hàm số của biến $p \in (f;+\infty)$.

b) Tính các giới hạn $\lim\limits_{p\to+\infty} g(p); \lim\limits_{p\to f^+} g(p)$ và giải thích ý nghĩa các kết quả này.

c) Lập bảng biến thiên của hàm số $q = g(p)$ trên khoảng $(f;+\infty)$.

Lời giải

a) Ta có: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \Rightarrow q = \frac{pf}{p-f}$. Do đó, $q = g(p) = \frac{pf}{p-f}$ với $p \in (f;+\infty)$.

b) $\lim\limits_{p\to+\infty} g(p) = \lim\limits_{p\to+\infty} \frac{pf}{p-f} = \lim\limits_{p\to+\infty} \frac{f}{1-\frac{f}{p}} = f$, $\lim\limits_{p\to f^+} g(p) = \lim\limits_{p\to f^+} \frac{pf}{p-f} = +\infty$

Ý nghĩa của $\lim\limits_{p\to+\infty} g(p) = f$: Khoảng cách từ vật đến thấu kính tiến ra vô cùng thì khoảng cách từ ảnh đến thấu kính xấp xỉ tiêu cự.

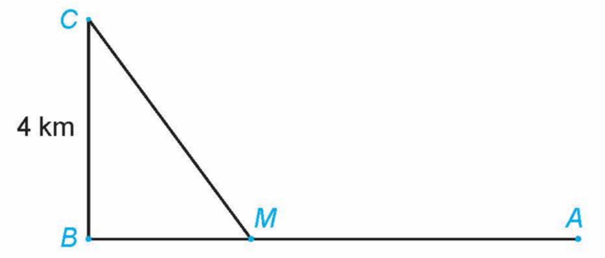
Ý nghĩa của $\lim\limits_{p\to f^+} g(p) = +\infty$: Khoảng cách từ vật đến thấu kính tiến gần về tiêu cự f thì khoảng cách từ ảnh đến thấu kính là càng lớn.

c) Ta có: $q' = g'(p) = \dfrac{-f^2}{(p-f)^2} < 0\ \forall p \in (f;+\infty)$ nên hàm số nghịch biến trên $(f;+\infty)$.

Bảng biến thiên:

p	f		$+\infty$
$g'(p)$		$-$	
$g(p)$	$+\infty$		
			f

Câu 34. Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như Hình. Khoảng cách từ C đến B là $4km$. Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là $10km$. Tổng chi phí lắp đặt cho 1 km dây điện trên biển là 50 triệu đồng, còn trên đất liền là 30 triệu đồng.



Xác định vị trí điểm M trên đoạn AB (điểm nối dây từ đất liền ra đảo) để tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất.

Lời giải

Đặt $MB = x(km, 0 \le x \le 10)$, khi đó, $AM = 10 - x(km)$ và $MC = \sqrt{MB^2 + CB^2} = \sqrt{x^2+16}\,(km)$

Khi đó, chi phí nối điện từ A đến C là: $f(x) = 30(10-x) + 50\sqrt{x^2+16}$ (triệu đồng)

Ta có: $f'(x) = -30 + \dfrac{50x}{\sqrt{x^2+16}} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}} = \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow 25x^2 = 9x^2 + 144 \Leftrightarrow x = 3$

(do $0 \le x \le 10$)

Ta có: $f(0) = 500; f(3) = 460, f(10) = 100\sqrt{29}$ nên chi phí nhỏ nhất là 460 triệu đồng khi $x = 3$

Vậy M cách B một khoảng $3km$ trên đoạn AB (điểm nối dây từ đất liền ra đảo) thì tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất.

Câu 35. Khi một vật lạ mắc kẹt trong khí quản khiến ta phải ho, cơ hoành đẩy lên trên gây ra tăng áp lực trong phổi, theo đó cuống họng co thắt làm hẹp khí quản khiến không khí đi qua mạnh hơn. Đối với một lượng không khí bị đẩy ra trong một khoảng thời gian cố định, khí quản càng nhỏ thì luồng không khí càng đẩy ra nhanh hơn. Vận tốc luồng khí thoát ra càng cao, lực tác động lên vật lạ càng lớn. Qua nghiên cứu một số trường hợp, người ta nhận thấy vận tốc v của luồng khí liên hệ với bán kính x của khí quản theo công thức:

$v(x)=k(x_0-x)x^2, \frac{1}{2}x_0 \le x \le x_0$ trong đó k là hằng số $(k>0)$ và x_0 là bán kính khí quản ở trạng thái bình thường. Tìm x theo x_0 để vận tốc của luồng khí một cơn ho trong trường hợp này là lớn nhất.

(Nguồn: James Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning 8th edition, p.285)

Giải

Xét hàm số $f(x)=(x_0-x)x^2$ với x_0 cố định và $\frac{1}{2}x_0 \le x \le x_0$.

Do k là hằng số nên vận tốc của luồng khí một cơn ho lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $f(x)=-x^3+x_0x^2$;

$f'(x)=-3x^2+2x_0x;$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ho? $x=\frac{2}{3}x_0$.

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}x_0$		$\frac{2}{3}x_0$		x_0
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$f\left(\frac{1}{2}x_0\right)$	↗	$f\left(\frac{2}{3}x_0\right)$	↘	$f(x_0)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\max\limits_{\left[\frac{1}{2}x_0;x_0\right]} f(x)=f\left(\frac{2}{3}x_0\right)$.

Vậy vận tốc của luồng khí một cơn ho lớn nhất khi $x=\frac{2}{3}x_0$.

Câu 36. Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức:
$C(x)=0{,}0001x^2-0{,}2x+10000,$ trong đó $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng.

a) Tính tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí.

b) Tỉ số $M(x)=\frac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Tính $M(x)$ theo x và tìm số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình là thấp nhất, biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30000 cuốn. Khi đó chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí là bao nhiêu?

Giải

a) Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng, tức là 0,4 vạn đồng.

Suy ra chi phí phát hành cho x cuốn là $0,4x$ (vạn đồng).

Theo đề bài, ta có tổng chi phí xuất bản và phát hành cho x cuốn tạp chí là:

$T(x) = C(x) + 0,4x = 0,0001x^2 + 0,2x + 10000,\ x > 0.$

b) Ta có $M(x) = \dfrac{T(x)}{x} = 0,0001x + 0,2 + \dfrac{10000}{x}$.

Xét hàm số $f(x) = 0,0001x + 0,2 + \dfrac{10000}{x}$, với $0 < x \le 30000$.

$f'(x) = 0,0001 - \dfrac{10000}{x^2} = \dfrac{0,0001x^2 - 10000}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10000\ (\text{do } x > 0).$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$

Bảng biến thiên:

x	0		10 000		30 000
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(10\,000)$	$\nearrow$	$f(30\,000)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị của $M(x)$ nhỏ nhất khi $x = 10000$.

Vậy số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình thấp nhất là $x = 10000$ (cuốn).

Chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản 10000 cuốn là: $M(10000) = 22000$ (đồng)

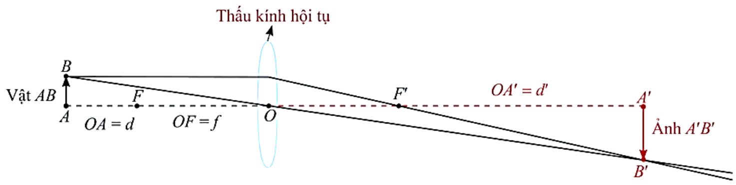
Câu 37. Xét một vật thật đặt trước thấu kính hội tụ có tiêu cự $f > 0$. Gọi d là khoảng cách từ vật đến thấu kính $(d > 0), d'$ là khoảng cách từ thấu kính đến ảnh (ảnh thật thì $d' > 0$, ảnh ảo thì $d' < 0)$. Ta có công thức: $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{d'}$ hay $d' = \dfrac{df}{d - f}$.

Xét trường hợp $f = 3$, đặt $x = d, y = d'$. Ta có hàm số $y = \dfrac{3x}{x - 3}$ và $x \ne 3$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số trên.

b) Dựa vào đồ thị hàm số trên, hãy cho biết vị trí của vật để ảnh của vật là: ảnh thật, ảnh ảo.

c) Khi vật tiến gần đến tiêu điểm thì ảnh thay đổi như thế nào?



Lời giải

a) $y = \dfrac{3x}{x - 3}$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

- Chiều biến thiên:

$$y' = \frac{-9}{(x-3)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \forall x \in D$$ nên hàm số nghịch biến trên D

- Giới hạn và tiệm cận:

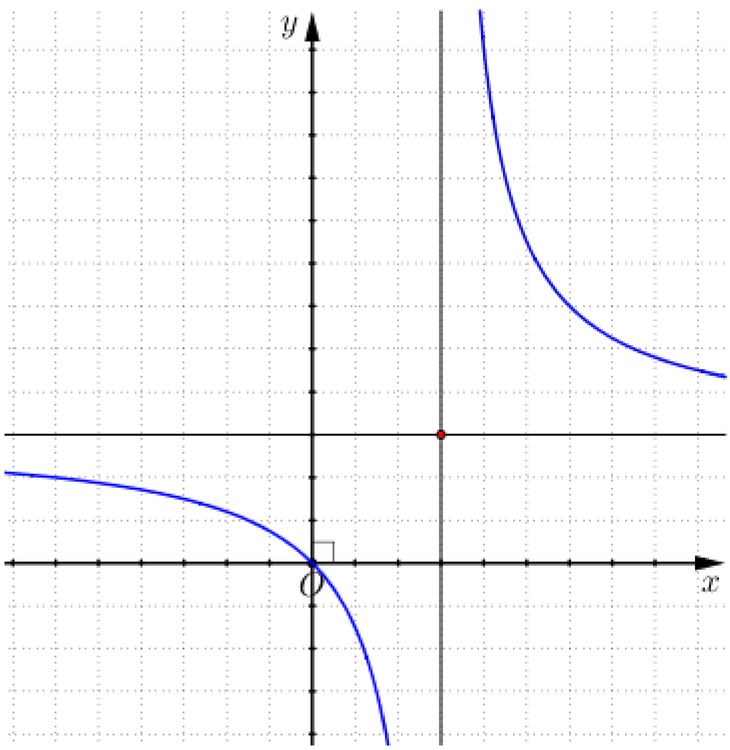
$\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x}{x-3} = 3; \lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{3x}{x-3} \right) = 3$ nên $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$\lim\limits_{x \to 3^+} y = \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{3x}{x-3} = +\infty; \lim\limits_{x \to 3^-} y = \lim\limits_{x \to 3^-} \frac{3x}{x-3} = -\infty$ nên $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$			3			$+\infty$
y'		$-$		‖		$-$	
y	3	↘	$-\infty$	‖	$+\infty$	↘	3

Khi $x = 0$ thì $y = 0$ nên $(0;0)$ là giao điểm của y với trục Oy, Ox

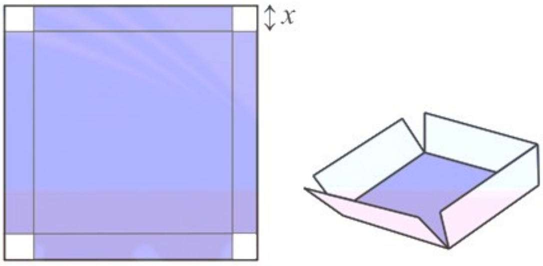


b) Để ảnh của vật là ảnh thật thì $d' > 0$ hay $y > 0 \Rightarrow x < 0$ hoặc $x > 3$ hay $d > 3$ (do d là khoảng cách từ vật đến thấu kính nên d không thể nhỏ hơn 0)

Để ảnh của vật là ảnh ảo thì $d' < 0$ hay $y < 0 \Rightarrow 0 < x < 3$ hay $0 < d < 3$

c) Khi vật tiến gần đến tiêu điểm thì khoảng cách từ ảnh đến thấu kính tiến dần tới vô cùng, ảnh của vật dần biến thành ảnh ảo

Câu 38. Bạn Việt muốn dùng tấm bìa hình vuông cạnh $6dm$ làm một chiếc hộp không nắp, có đáy là hình vuông bằng cách cắt bỏ đi 4 hình vuông nhỏ ở bốn góc của tấm bìa (Hình).



Bạn Việt muốn tìm độ dài cạnh hình vuông cần cắt bỏ để chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất.

a) Hãy thiết lập hàm số biểu thị thể tích hộp theo x với x là độ dài cạnh hình vuông cần cắt đi.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số tìm được.

Từ đó, hãy tư vấn cho bạn Việt cách giải quyết vấn đề và giải thích vì sao cần chọn giá trị này. (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

Lời giải

a) Chiều cao của hộp sau khi cắt là: x

Chiều dài của hộp sau khi cắt là: $6-2x$

Chiều rộng của hộp sau khi cắt là: $6-2x$

Thể tích của hộp là: $V(x)=x(6-2x)^2=4x^3-24x^2+36x$

b) Tập xác định: $D=(0;3)$

- Chiều biến thiên:

$$V'(x)=12x^2-48x+36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Trên các khoảng $(0;1),(3;+\infty)$ thì $V'(x)>0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó. Trên khoảng $(1;3)$ thì $V'(x)<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó.

· Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và $y_{cd}=16$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ và $y_{ct}=0$

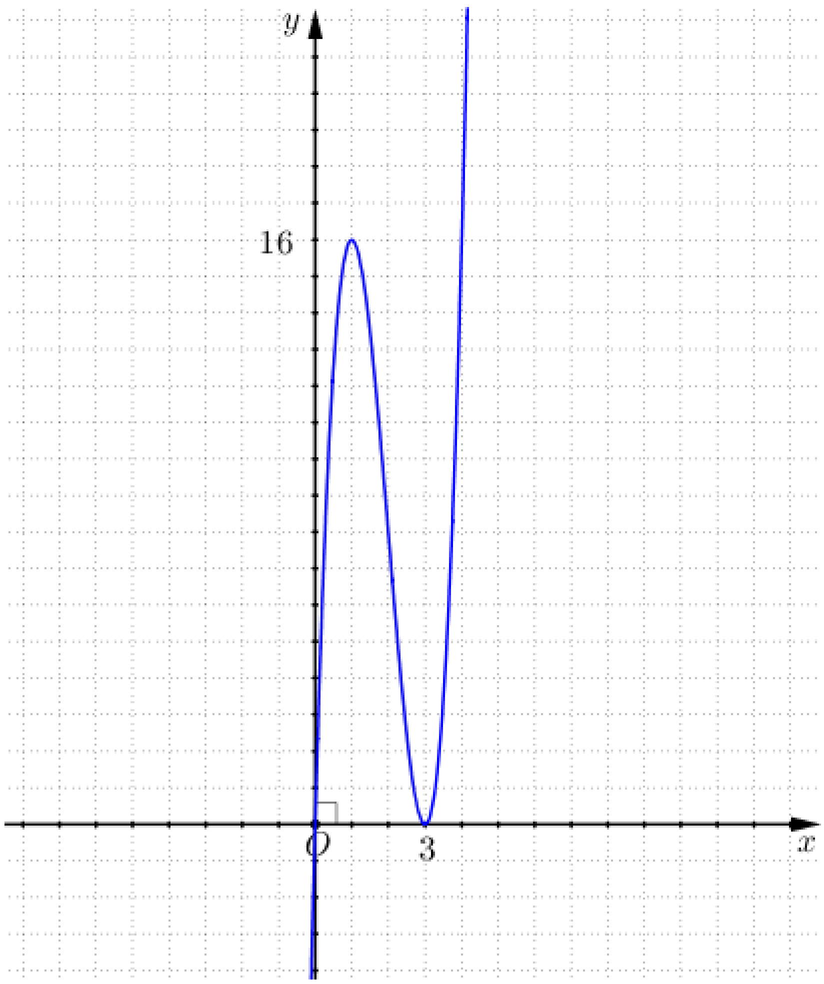
- Bảng biến thiên:

x	0		1		3
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	0

Khi $x=0$ thì $V(x)=0$ nên $(0;0)$ là giao điểm của đồ thị với trục Oy

Ta có: $V(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-24x^2+36x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$

Vậy đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(0;0)$ và $(3;0)$



Vì $0<x<3$ (vì ở mỗi cạnh đều cắt đi 2 đầu nên nếu $x \geq 3$ thì bạn Việt phải cắt hết tấm bìa. Do đó, bạn Việt nên cắt đi 4 hình vuông ở góc có cạnh bằng $1dm$ để thể tích của hộp đạt giá trị lớn nhất là $16dm^3$.

Câu 39. Trong một nhà hàng, mỗi tuần để chế biến x phần ăn (x lấy giá trị trong khoảng từ 30 đến 120) thì chi phí trung bình (đơn vị: nghìn đồng) của một phần ăn được cho bởi công thức:

$\overline{C}(x) = 2x - 230 + \dfrac{7200}{x}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $\overline{C}(x)$ trên $[30;120]$.

b) Từ kết quả trên, tìm số phần ăn sao cho chi phí trung bình của một phần ăn là thấp nhất.

Lời giải

Tập xác định: $D = [30;120]$

- Chiều biến thiên:

$$\overline{C}'(x) = 2 - \frac{7200}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -60\,(\text{loại}) \\ x = 60 \end{array}\right.$$

Trên các khoảng $(30;60)$ thì $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó. Trên khoảng $(60;120)$ thì $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng đó.

- Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 60$ và $y_{cd} = 10$

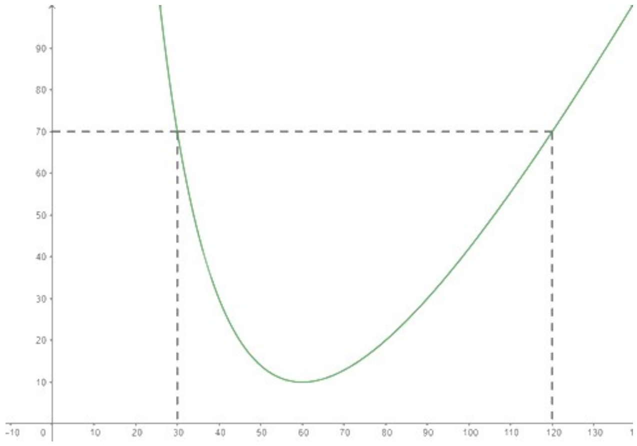
- Các giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x\to-\infty} \overline{C}(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(2x - 230 + \frac{7200}{x}\right) = -\infty;\ \lim_{x\to+\infty} \overline{C}(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x - 230 + \frac{7200}{x}\right) = +\infty$$

- Bảng biến thiên:

x	30		60		120
y'		$-$	0	$+$	
y	70	$\searrow$	10	$\nearrow$	70

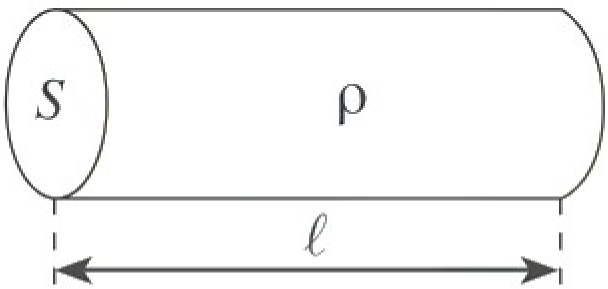
Đồ thị hàm số:



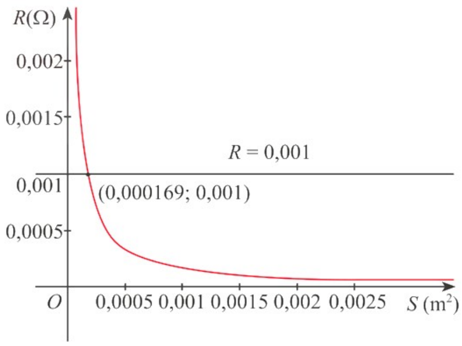
b) Từ bảng biến thiên, ta thấy $\min_{[30;120]} \bar{C}(x) = \bar{C}(60) = 10$

Vậy để chi phí trung bình của một phần ăn là thấp nhất thì số phần ăn là 10

Câu 40. Điện trở $R(\Omega)$ của một đoạn dây dẫn hình trụ được làm từ vật liệu có điện trở suất $\rho(\Omega m)$, chiều dài $\ell(m)$ và tiết diện $S\left(m^2\right)$ được cho bởi công thức $R = \rho\dfrac{\ell}{S}$



Giả sử người ta khảo sát sự biến thiên của điện trở R theo tiết diện S (ở nhiệt độ $20^{\circ}C$) của một sợi dây điện dài $10m$ làm từ kim loại có điện trở suất ρ và thu được đồ thị hàm số như Hình.



a) Có nhận xét gì về sự biến thiên của điện trở R theo tiết diện S ?

b) Từ đồ thị, hãy giải thích ý nghĩa của toạ độ giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng $R = 0,001$.

c) Tính điện trở suất ρ của dây điện. Từ đó, hãy cho biết dây điện được làm bằng kim loại nào trong số các kim loại được cho ở bảng sau:

Kim loại	Điện trở suất ở 20 °C (Ωm)
Bạc	$1,62 . 10^{-8}$
Đồng	$1,69 . 10^{-8}$
Vàng	$2,44 . 10^{-8}$
Nhôm	$2,75 . 10^{-8}$
Sắt	$9,68 . 10^{-8}$

Lời giải

a) Khi $S \to +\infty$ thì $R \to 0$, nghĩa là khi S càng lớn thì R càng bé

b) Toạ độ giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng $R = 0,001$ cho biết khi $S = 0,000169m^2$ thì $R = 0,001$

c) $\rho = \dfrac{RS}{\ell} = \dfrac{0,001 \cdot 0,000169}{10} = 1,69.10^{-8}(\Omega m)$

Vậy dây điện trở được làm bằng đồng

Câu 41. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \dfrac{26t + 10}{t + 5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người).

a) Tính số dân của thị trấn vào năm 2022 (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

b) Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $f(t)$.

c) Đạo hàm của hàm số $y = f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm).

- Tính tốc độ tăng dân số vào năm 2022 của thị trấn đó.

- Vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,192 nghìn người/năm?

Giải

a) Ta có: $f(52) = \dfrac{26 \cdot 52 + 10}{52 + 5} = \dfrac{1362}{57} \approx 23,895$ (nghìn người).

Vậy số dân của thị trấn vào năm 2022 khoảng 23895 người.

b) 1) Sự biến thiên

- Giới hạn tại vô cực và đường tiệm cận ngang:

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 26$. Do đó, đường thẳng $y = 26$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

- $f'(t) = \dfrac{120}{(t + 5)^2} > 0$ với mọi $t \geq 0$.

- Bảng biến thiên:

t	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(t)$	$+$
$f(t)$	$2 \nearrow 26$

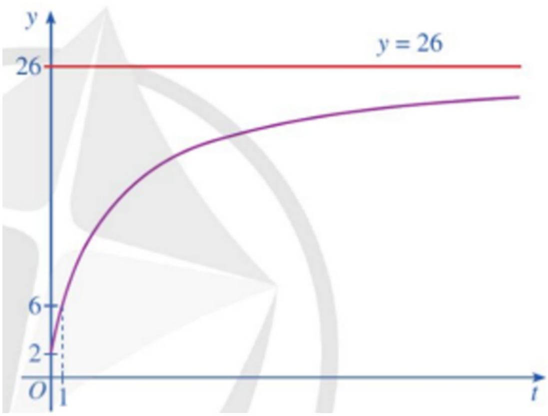
Hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

2) Đồ thị

- Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0;2)$.

- Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;6)$. Vậy đồ thị hàm số $y=f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}$, $t\ge 0$ được cho ở Hình.



c) Tốc độ tăng dân số vào năm 2022 của thị trấn là: $f'(52)=\dfrac{120}{(52+5)^2}=\dfrac{40}{1083}$.

- Ta có: $f'(t)=0,192 \Leftrightarrow \dfrac{120}{(t+5)^2}=0,192 \Leftrightarrow (t+5)^2=625 \Leftrightarrow t=20 \text{ (do } t\ge 0).$

Vậy vào năm 1990, thì tốc độ tăng dân số là 0,192 nghìn người/năm.

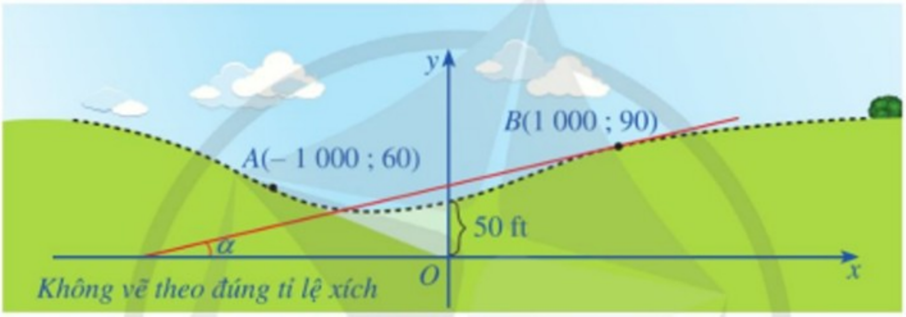
Để vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số vào giải quyết một số bài toán trong thực tiễn, trước hết ta cần xây dựng mô hình toán học cho bài toán, trong đó khâu then chốt là đưa ra một hàm số mô phỏng được mối liên hệ giữa các đối tượng, hiện tượng trong bài toán đó. Ở các ví dụ trên, những hàm số như vậy được cho sẵn. Trong các ví dụ dưới đây, ta sẽ tìm hiểu một vài cách xây dựng đơn giản cho những hàm số như thế.

Câu 42. (Bài toán thiết kế mô hình đường giao thông) Để thiết kế mô hình của một đoạn đường cao tốc nối hai sườn đồi với sự khác biệt về độ cao ở vị trí hai sườn đồi giao nhau là 50 feet (Hình 27), người ta có thể làm như sau:

- Chọn hệ trục tọa độ Oxy với gốc O là vị trí hai sườn đồi giao nhau, phương nằm ngang là trục Ox, đơn vị trên mỗi trục tọa độ là feet (1 feet $=0,3048\,m$).

- Chọn hai vị trí A,B lần lượt trên hai sườn đồi. Bằng cách đo đạc tại thực địa, ta xác định được toạ độ của hai điểm A,B và góc dốc α (đơn vị: độ) tại điểm B của sườn đồi. Giả sử ta có $A(-1000;60), B(1000;90)$ và $\tan\alpha=0,04$ (Hình)

- Trong hệ trục toạ độ Oxy, quan sát đường cong (vẽ bằng nét đứt) mô phỏng đoạn đường cao tốc nối hai sườn đồi, đường cong đó gợi nên hình ảnh đồ thị của hàm số bậc ba. Vì thế ta có thể chọn hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ sao cho trong hệ trục toạ độ Oxy, đồ thị của hàm số đó trên đoạn $[-1000;1000]$ mô phỏng đoạn đường cao tốc cần thiết kế. Ta chọn theo nguyên tắc: Hệ số góc của tiếp tuyến tại B của đồ thị hàm số đó bằng 0,04.



Hãy xác định hàm số bậc ba đó.

Giải

Do đồ thị hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ đi qua điểm $(0;50)$ nên $d=50$, suy ra $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+50$. Do đồ thị đi qua các điểm $A(-1000;60)$, $B(1000;90)$ nên ta có: $\begin{cases}-1000000000a+1000000b-1000c=10\\ 1000000000a+1000000b+1000c=40,\end{cases}$ hay $\begin{cases}-100000000a+100000b-100c=1\\ 100000000a+100000b+100c=4\end{cases}$,

suy ra $\begin{cases}b=\dfrac{1}{40000}\\ 100000000a+100c=1,5.\end{cases}$

Ta có: $f'(x)=3ax^2+2bx+c=3ax^2+\dfrac{1}{20000}x+c$.

Do hệ số góc của tiếp tuyến tại B của đồ thị hàm số đó bằng 0,04 nên

$f'(1000)=3000000a+\dfrac{1}{20}+c=0,04$, tức là $3000000a+c=-0,01$.

Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}100000000a+100c=1,5\\ 3000000a+c=-0,01,\end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases}a=-\dfrac{1}{80000000}\\ c=\dfrac{11}{400}.\end{cases}$$

Vậy hàm số bậc ba cần tìm là $f(x)=-\dfrac{1}{80000000}x^3+\dfrac{1}{40000}x^2+\dfrac{11}{400}x+50.$

Câu 43. (Bài toán thiết kế mô hình đánh giá kĩ năng) Một trung tâm dạy nghề cần thiết kế mô hình đánh giá kĩ năng của một học viên theo học nghề đánh máy. Người ta có thể làm như sau:

· Để xây dựng mô hình toán học cho bài toán trên, ta sử dụng thống kê. Bằng cách khảo sát tốc độ đánh máy trung bình S (tính bằng từ trên phút) của học viên đó sau t tuần học $(5\leq t\leq 30)$, ta thu thập các số liệu thống kê được cho trong Bảng

t	5	10	15	20	25	30
S	38	56	79	90	93	94

- Ta cần chọn hàm số $y=f(t)$ để biểu diễn các số liệu ở Bảng, tức là ở hệ trục toạ độ Oxy, đồ thị của hàm số đó trên khoảng $(0;+\infty)$ "gần" với các điểm $A(5;38)$, $B(10;56), C(15;79), D(20;90), E(25;93), G(30;94)$. Ngoài ra, do tốc độ đánh máy trung bình của học viên tăng theo thời gian t và chỉ đến một giới hạn M nào đó cho dù thời gian t có kéo dài đến vô cùng nên hàm số $y=f(t)$ phải thỏa mãn thêm hai điều kiện: Hàm số đó đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=M\in\mathbb{R}, M>94$. Vì các hàm đa thức (với bậc lớn hơn hoặc bằng 1) không thỏa mãn hai điều kiện đó nên ta chọn một hàm phân thức hữu tỉ để biểu diễn các số liệu ở Bảng.

Ta có thể chọn hàm số có dạng $f(t)=\dfrac{at+b}{ct+d}(ac\neq 0)$ cho mục đích đó. Dựa vào Bảng, ta chọn hàm số $f(t)=\dfrac{110t-280}{t+2}(t>0)$.

a) Dựa theo mô hình đó, dự đoán tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau 40 tuần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của từ/phút).

b) Xem $y=f(t)$ là một hàm số xác định trên khoảng $(0;+\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

c) Nêu nhận xét về tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau thời gian t ngày càng lớn.

Giải

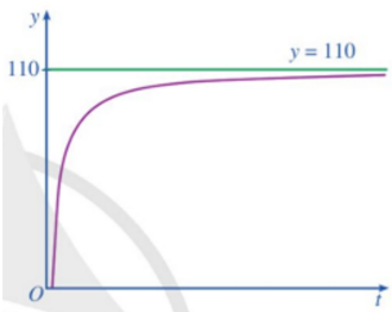
a) Ta có: $f(40)=\dfrac{110\cdot 40-280}{40+2}\approx 98$. Vậy tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau 40 tuần là khoảng 98 từ/phút.

b) Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{110t-280}{t+2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(110-\dfrac{500}{t+2}\right)=110$.

Vậy đường thẳng $y=110$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(t)$.

c) Do đường thẳng $y=110$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(t)$ nên khi t càng lớn thì tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sẽ tiến gần đến mức 110 từ/phút.

Chú ý: Đồ thị hàm số $y=f(t)=\dfrac{110t-280}{t+2}(t>0)$ được cho ở Hình.



Đồ thị đó giao với trục tung tại điểm có tọa độ là $(0;-140)$.

Câu 44. Một trang sách có dạng hình chữ nhật với diện tích là $384\,cm^2$. Sau khi để lề trên và lề dưới đều là $3\,cm$, để lề trái và lề phải đều là $2\,cm$. Phần còn lại của trang sách được in chữ. Kích thước tối ưu của trang sách là bao nhiêu để phần in chữ trên trang sách có diện tích lớn nhất?

Lời giải

Giả sử chiều dài của trang sách là x và chiều rộng là y. Theo đề bài, diện tích của trang sách là: $xy = 384\,cm^2$

Khi để lề trên và lề dưới đều là $3\,cm$, lề trái và lề phải đều là $2\,cm$ thì diện tích phần in chữ sẽ là: $(x - 2.3)(y - 2.2) = (x - 6)(y - 4)$

Ta có: $x = \dfrac{384}{y}$ (1)

Thay x vào phương trình $(x - 6)(y - 4)$ ta thu được $(x - 6)\left(\dfrac{384}{x} - 4\right)$

$f(x) = (x - 6)\left(\dfrac{384}{x} - 4\right)$

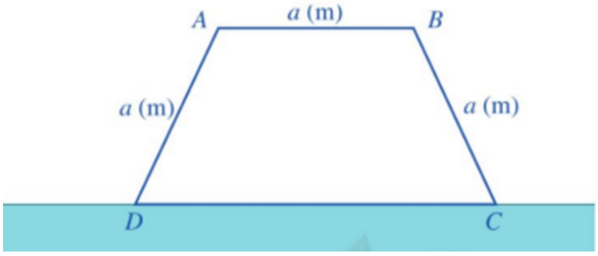
$\rightarrow f'(x) = -4 + \left(\dfrac{2304}{x^2}\right)$

$f'(x) = 0 \rightarrow -4 + \left(\dfrac{2304}{x^2}\right) = 0 \rightarrow x = 24$

Thế vào (1): $x = 24 \rightarrow y = 16$

Vậy kích thước của trang sách có chiều dài $24\,cm$, chiều rộng $16\,cm$ thì phần in chữ trên trang sách có diện tích lớn nhất

Câu 45. Một bác nông dân có ba tấm lưới thép $B40$, mỗi tấm dài $a(m)$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như Hình (bờ sông là đường thẳng CD không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



Lời giải

Giả sử chiều dài của hai cạnh đáy của hình thang cân lần lượt là x và $2x$, và chiều dài của cạnh bên là $a - 3x$. Do đó, chiều cao của hình thang cân là: $h = \sqrt{(a - 3x)^2 - x^2}$

Diện tích của hình thang cân là: $S = \dfrac{(x + 2x)h}{2} = \dfrac{3x\sqrt{(a - 3x)^2 - x^2}}{2}$

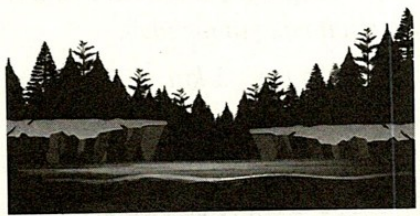
Để tìm giá trị lớn nhất của S, ta cần tìm giá trị x sao cho đạo hàm của S theo x bằng 0. Đạo hàm của S theo x được tính bằng công thức sau:

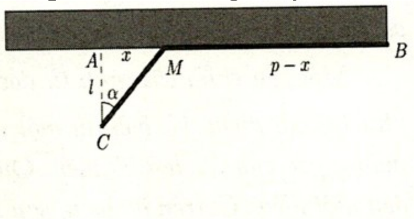
$$S' = \frac{dS}{dx} = \frac{3x(8x-9)}{2\sqrt{-x^2+(a-3x)^2}} + \frac{3\sqrt{-x^2+(a-3x)^2}}{2}$$

Giải phương trình $S' = 0$

Sau khi giải, thay x vào công thức diện tích S, ta tìm được diện tích lớn nhất của mảnh vườn có thể rào được là $S_{max} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Câu 46. Từ tổng kho ở địa điểm C cách bờ sông $l(km)$, người ta cần vận chuyển hàng hóa đến trạm trung chuyển M ở bờ sông để rồi vận chuyển tiếp bằng đường thủy đến kho cảng B (hình vẽ). Hãy hoạch định tuyến đường bộ từ C đến M và tiếp đến là tuyến đường thủy đến B sao cho chi phí vận chuyển là thấp nhất, biết rằng chi phí vận chuyển một tấn hàng (trên cùng một đơn vị khoảng cách) theo đường bộ đắt gấp 4 lần chi phí theo đường thủy.





Bài giải

Đương nhiên nếu phí vận chuyển theo đường bộ bằng hoặc thấp hơn theo đường thủy thì người ta chỉ cần vạch tuyến đường bộ thẳng từ C đến B là xong.

Ta kí hiệu khoảng cách AM là x; khoảng cách từ A đến B là p (cố định). Khi đó chi phí vấn chuyển một tấn hàng từ C đến B là $k \cdot f(x)$ với k là hằng số nào đó cho trước và $f(x)$ được xác định bởi biểu thức

$$f(x) = 4\sqrt{x^2 + l^2} + (p - x), 0 \le x < p.$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$. Ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{l\sqrt{15}}{15}.$$

Dễ dàng kiểm tra rằng $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 và đó là cực tiểu duy nhất. Lúc này, CM tạo với CA một góc α mà $\tan\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$

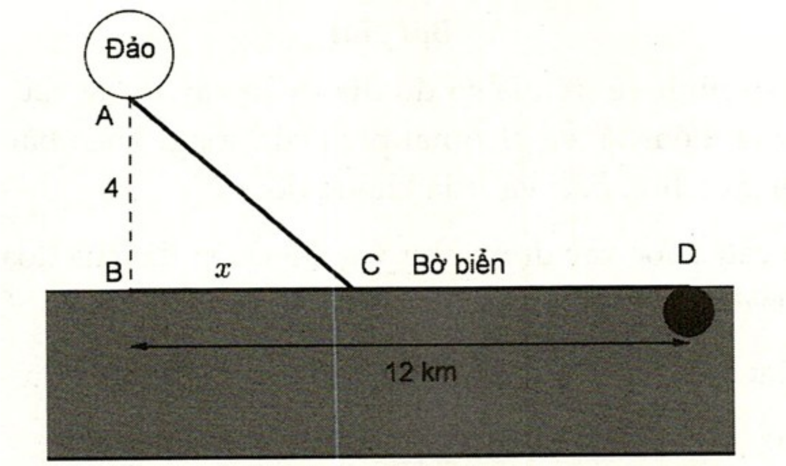
Để xét xem hiệu quả kinh tế, ta giả thiết giá vận chuyển một tấn hàng trên đơn vị đường đi theo đường thẳng là a (đồng), công bốc dỡ (tại M) và xếp lên tàu tại B là b đồng. Khi đó tuyến giao thông thủy bộ đó có lợi về kinh tế nếu $4aCM + aMB + b < 4aCB$.

Câu 47. Theo các nhà điểu cầm học, khi bay ngang qua mặt nước, chim phải tiêu tốn nhiều năng lượng hơn so với khi bay ngang qua đất liên, và theo bản năng, chim luôn chọn đường bay tiêu tốn ít năng lượng nhất.

Một con chim cất cánh từ đảo A cách bờ biển $4km$. Hãy xem A như là một điểm, bờ biển là một đường thẳng; và gọi B là hình chiếu vuông góc của A lên bờ biển. Quan sát cho thấy: trước tiên chim bay đến một điểm C trên bờ biển, sau đó mới bay dọc theo bờ biển đến tổ D của nó. Giả sử B và D cách nhau $12\,km$.

Đặt $r = W / l$;

trong đó W và L lần lượt là năng lượng tiêu tốn mỗi kilômét bay khi chim bay ngang qua mặt nước và khi chim bay ngang qua đất liền.



Xác định vị trí của C nếu $r = \sqrt{2}$.

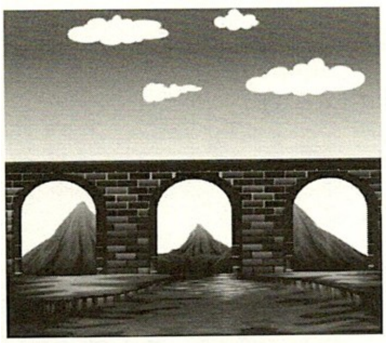
Lời giải

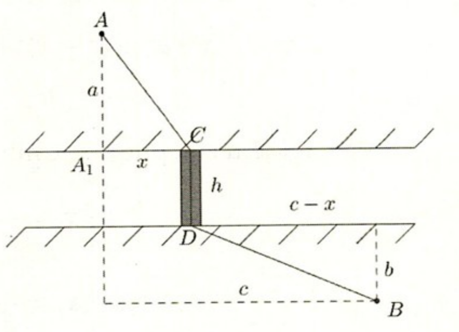
Ta đặt $BC = x\,(km)$ với $x \in [0;12]$. Khi đó năng lượng tiêu tốn suốt hành trình bay của chim (theo quan sát) là $\sqrt{16+x^2}\cdot W + (12-x)L = Lf(x),\ f(x) = r\sqrt{16+x^2} + 12 - x.$

Đạo hàm $f'(x) = \dfrac{rx}{\sqrt{16+x^2}} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{\sqrt{r^2-1}} = 4$ (vì $r = \sqrt{2}$).

Hàm số f nghịch biến trên $[0;4]$ và đồng biến trên $[4;12]$ nên hàm số f nhỏ nhất tại $x = 4$, tức là $BC = 4(km)$.

Câu 48. Hãy chọn địa điểm để xây dựng một cây cầu vượt sông sao cho chiều dài đoạn đường nối hai địa điểm cho trước ở hữu ngạn và tả ngạn sông là lớn nhất (hình vẽ).





Lời giải

Giả sử hình vẽ trên là sơ đồ địa điểm xây dựng cầu và vùng gần các địa điểm A và B ở hai phía của sông. Theo bài ra, ta có các khoảng cách a, b, c và h là không đổi.

Nếu cầu được xây dựng như vậy thì chiều dài của đoạn đường nối các địa điểm A và B sẽ bằng $l = l(A,B) = AC + h + DB$.

Ta đặt biến $x = A_1C$ là khoảng cách giữa A_1 và $C, x \in [0;c]$.

Ta có

$AC = \sqrt{a^2 + x^2}, DB = \sqrt{b^2 + (c - x)^2}$ và do đó $l(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + h + \sqrt{b^2 + (c - x)^2}, x \in [0;c].$

Như vậy, bài toán đã cho quy về tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $l(x)$ trên đoạn $[0;c]$. Ta có

$$\begin{aligned} l'(x) &= \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x - c}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} \\ &= \frac{x\sqrt{b^2 + (c - x)^2} + (x - c)\sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + (c - x)^2)}}. \end{aligned}$$

Đạo hàm $l'(x) = 0$ khi $x\sqrt{b^2 + (c - x)^2} + (x - c)\sqrt{a^2 + x^2} = 0.$

Giải phương trình này, ta được

$$\begin{aligned} x^2\left[b^2 + (c - x)^2\right] &= (x - c)^2(a^2 + x^2) \\ b^2x^2 &= a^2(x - x)^2. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{ac}{a - b} \\ x_2 = \dfrac{ac}{a + b}. \end{array}\right.$

Nghiệm x_1 nằm ngoài đoạn $[0;c]$. Thật vậy, nếu $a > b$ thì $\frac{a}{a - b} > 1$ nên hệ thức $x_1 = \frac{ac}{a - b}$ chứng tỏ rằng $x_1 > c$. Nếu $a < b$ thì $x_1 < 0$ cũng nằm ngoài đoạn $[0;c]$. Điểm $x_2 = \frac{ac}{a + b}$ nằm trong khoảng $(0;c)$ với mọi giá trị dương a, b, c vì lúc đó $x_2 > 0$ và $\frac{a}{a + b} < 1 \Rightarrow x_2 = \frac{ac}{a + b} < c$.

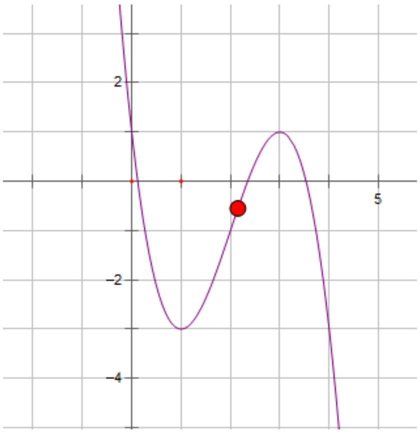
Mặt khác, đạo hàm $l'(x)$ tồn tại khắp nơi nên ngoài $x_2 = \frac{ac}{a + b}$ thì hàm số không còn điểm tới hạn nào khác.

Lập bảng biến thiên

x	0		x		c
$l'(x)$		−	0	+	
$l(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $l(x)$ đạt cực tiểu duy nhất tại điểm x. Giá trị cực tiểu đó cũng chính là giá trị nhỏ nhất đối với chiều dài $l(x)$ trên đoạn $[0;c]$. Điều đó có nghĩa là cầu cần xây dựng tại địa điểm mà $A_1C = \dfrac{ac}{a+b}$.

Câu 49. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = 6t^2 - t^3 - 9t + 1$, s tính theo mét, t tính theo giây. Trong 5 giây đầu tiên, thời điểm t mà tại đó vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất sẽ là bao nhiêu?



Lời giải

Ta có vận tốc là $v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2 - 9, v'(t) = -6t + 12, v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2.$

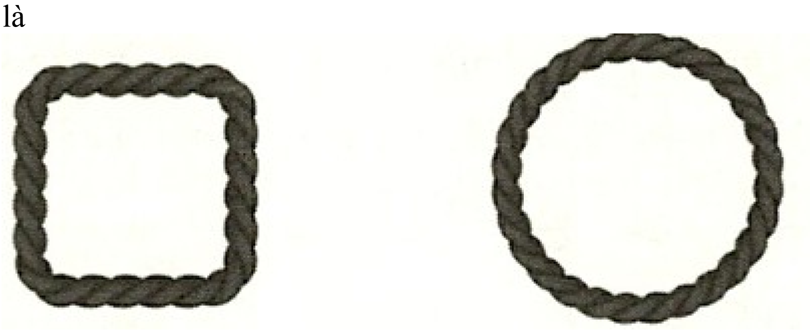
Lập bảng biến thiên, ta có

t	0		2		5
$v'(t)$		+	0	−	
$v(t)$		↗	3	↘	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\max_{t\in(0;5)} v(t) = v(2) = 3$.

Vậy trong 3 giây, vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

Câu 50. Một cái dây dài L được cắt thành hai đoạn. Một đoạn bị nối thành dạng hình vuông và đoạn kia là thành hình tròn. Cái dây sẽ bị cắt như thế nào sao cho tổng diện tích bao gồm bởi hai đoạn dây này là

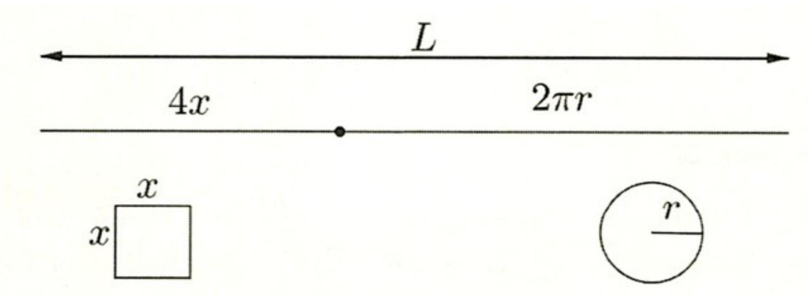


a) Cực đại;

b) Cực tiểu.

Lời giải

Giả sử x là cạnh của hình vuông và r là bán kính của hình tròn như hình vẽ



Tổng diện tích là $A = x^2 + \pi r^2$, trong đó x và r liên hệ bởi phương trình $4x + 2\pi r = L.$

Từ hai phương trình này, ta có $A = x^2 + \pi \dfrac{1}{4\pi^2}(L - 4x)^2 = x^2 + \dfrac{1}{4\pi}(L - 4x)^2.$

Đạo hàm $A' = 2x + \dfrac{1}{4\pi}2(L - 4x)(-4) = 2x - \dfrac{2}{\pi}(L - 4x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\pi}(L - 4x) \Leftrightarrow x = \dfrac{L}{4+\pi}.$

Đạo hàm cấp hai $A''(x) = 2 + \dfrac{8}{\pi} > 0$ nên ta có kết luận sau:

a) Để làm cực đại A, chúng ta phải lựa chọn $x = 0$ và sử dụng tất cả cái dây làm đường tròn. Nếu chúng ta cứ nhất định cắt cái dây thì a) không có câu trả lời vì khi đó chúng ta luôn có thể tăng tổng diện tích bằng cách dùng đoạn dây còn lại.

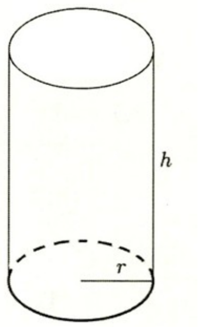
b) Tổng diện tích đạt cực tiểu khi $x = \dfrac{L}{4+\pi}$. Vậy chiều dài của đoạn dây đã dùng làm hình vuông sẽ là $4x = \dfrac{4L}{4+\pi}$ và chiều dài đoạn dây làm hình tròn sẽ là

$$L - 4x = L - \frac{4L}{4+\pi} = \frac{\pi L}{4+\pi}.$$

Chú ý rằng, diện tích đạt cực tiểu khi mà đường kính của đường tròn bằng cạnh của hình vuông, vì

$$2\pi = \frac{1}{\pi}(L - 4x) = \frac{1}{\pi}\left(L - \frac{4L}{4+\pi}\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi L}{4+\pi} = \frac{L}{4+\pi}.$$

Câu 51. Một nhà máy sản xuất các hộp đựng xà phòng hình trụ nhận a đơn đặt hàng đối với các hộp có thể tích được chỉ rõ là V_0. Diện tích toàn bộ bề mặt của một cái hộp sẽ đạt cực tiểu khi nào? Và số lượng kim loại cần cho nhà máy là bao nhiêu?



Lời giải

Giả sử r là bán kính của đáy và h là chiều cao của hình trụ. Thể tích là: $V_0 = \pi r^2 h$

Diện tích bề mặt toàn phần là: $A = 2\pi r^2 + \pi rh.$

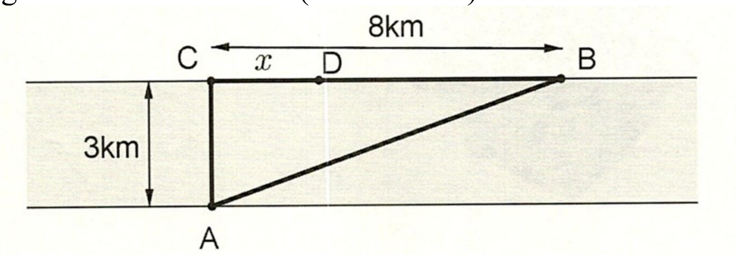
Từ hai phương trình này ta rút ra $A = 2\pi r^2 + \pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r\dfrac{V_0}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \dfrac{2V_0}{r}.$

Đạo hàm $A' = 4\pi r - \dfrac{2V_0}{r^2} = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 = V_0.$

Giải phương trình này ta được $r = \sqrt[3]{\dfrac{V_0}{2\pi}} \Rightarrow h = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$

Vậy khi $h = 2r$ hay chiều cao của hình trụ bằng bán kính đáy thì thể tích hình trụ là lớn nhất.

Câu 52. Một người đàn ông muốn hạ thủy chiếc thuyền của mình từ điểm A trên bờ một con sông rộng $3km$ và muốn cập bến sang điểm B của bờ đối diện, cách $8km$ theo hướng xuôi dòng với thời gian nhanh nhất có thể (xem hình vẽ)



Ông có thể chèo trực tiếp sang điểm C bờ đối diện rồi sau đó chạy xuống điểm B, hoặc ông có thể chèo thẳng sang điểm B, hoặc chèo đến điểm D giữa C và B rồi sau đó chạy xuống điểm B. Nếu ông có thể chèo qua sông với vận tốc là $6km/h$ và chèo xuôi dòng với vận tốc $8km/h$, thì ông nên dùng chân ở điểm nào để đến B nhanh nhất? (Giả sử vận tốc của dòng nước không ảnh hưởng bao nhiêu đến vận tốc chèo thuyền của người đàn ông).

Lời giải

Gọi x là khoảng cách từ C đến D thì khoảng cách mà người đàn ông phải chạy là $DB = 8 - x$ v à theo định lí Pythagore, ta có được khoảng cách đường chéo: $AD = \sqrt{x^2 + 9}$

Ta áp dụng công thức $Thời\,gian = \dfrac{Khoảng\,cách}{vận\,tốc}$

Thời gian chèo thuyền bằng $\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}$ và thời gian chạy bằng $\dfrac{8-x}{8}$. Như vậy tổng thời gian T được viết dưới dạng hàm số theo x: $T(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \dfrac{8-x}{8}.$

Miền xác định của hàm số T là $[0;8]$. Chú ý rằng nếu $x = 0$, thì ông chèo tới C, và nếu $x = 8$ t hì ông chèo thẳng tới B. Đạo hàm của T là $T'(x) = \dfrac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \dfrac{1}{8}$

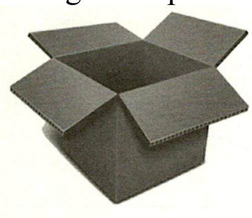
Sử dụng điều kiện $x \geq 0$, ta có

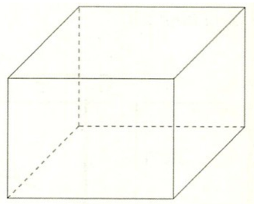
$$T'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}}=\frac{1}{8}$$
$$\Leftrightarrow 4x=3\sqrt{x^2+9}$$
$$\Leftrightarrow 16x^2=9\left(x^2+9\right)$$
$$\Leftrightarrow 7x^2=81$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{9}{\sqrt{7}}.$$

Ta tìm giá trị của T tại ba điểm $1,5;\ 1+\frac{\sqrt{7}}{8}\approx 1,33$ và $\frac{\sqrt{73}}{6}\approx 1,42$

Vậy người đàn ông nên cho thuyền chèo đến bờ đối diện cách điểm xuất phát là $\frac{9}{\sqrt{7}}\approx 3,4(km)$ t heo hướng xuôi dòng.

Câu 53. Từ một tấm bìa carton hình chữ nhật có kích thước là $a\times b$ với $a<b$. Người ta cắt bỏ 4 hình vuông bằng nhau ở 4 góc rồi gò thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Hỏi cạnh của hình vuông cắt đi phải bằng bao nhiêu để hình vuông đó có thể tích lớn nhất?





Lời giải

Gọi x là cạnh của hình vuông cắt đi, ta phải có điều kiện $0<x<\frac{a}{2}$.

Khi đó thể tích hình hộp là $V(x)=x(a-2x)(b-2x)=4x^3-2(a+b)x^2+abx.$

Bài toán trở thành bài toán tìm $\max\limits_{x\in\left(0;\frac{a}{2}\right)} V(x)$.

Ta có $V'(x)=12x^2-4(a+b)x+ab$

Ta có $\Delta'=4(a+b)^2-12ab=4\left(a^2-ab+b^2\right)>0,\ \forall a,b.$

Do đó $V'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt. Nghiệm là

$$x_1=\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}<x_2=\frac{a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}.$$

Áp dụng định lí Viète, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{a+b}{3}>0 \\ x_1x_2=\frac{ab}{2}>0 \end{cases}$ suy ra $0<x_1<x_2$.

Hơn nữa, ta có $V'\left(\frac{a}{2}\right)=f'\left(\frac{a}{2}\right)=a^2-ab=a(a-b)<0$

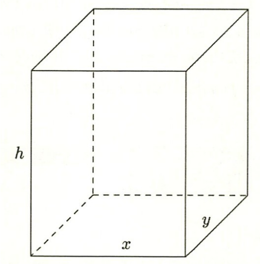
Do đó $0 < x_1 < \frac{a}{2} < x_2$

Bảng biến thiên

x	0		x_1		$\frac{a}{2}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy V đạt giá trị lớn nhất khi $x = x_1 = \frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$.

Câu 54. Cần phải xây dựng một hố ga, dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $V\left(m^3\right)$ không đổi, hệ số $k > 0$ cho trước (k là tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy. Hãy xác định các kích thước của đáy để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất.



Lời giải

Gọi $x, y\,(0 < x < y)$ lần lượt là chiều rộng và chiều dài của đáy hố ga. Gọi h là chiều cao của hố ga $(h > 0)$.

Theo bài ra, ta có $h = kx$ và $V = hxy \Rightarrow y = \frac{V}{hx} = \frac{V}{kx^2}$.

Để tiết kiệm nguyên vật liệu nhất, ta cần tìm các kích thước sao cho diện tích toàn phần của hố ga là nhỏ nhất.

Khi đó, ta có $S_{tp} = 2xh + 2yh + 2xy = 2x(kx) + 2(kx)\cdot\frac{V}{kx^2} + 2x\frac{V}{kx^2}$.

Hay ta có $S_{tp} = 2kx^2 + \frac{2\left(\frac{k+1}{k}\right)V}{x}$.

Xét hàm số $f(x) = 2kx^2 + \frac{2\left(\frac{k+1}{k}\right)V}{x}$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ với $x > 0$.

Ta có $f'(x) = 4kx - \dfrac{2\left(\dfrac{k+1}{k}\right)V}{x^2} = 2\dfrac{2k^2x^3 - (k+1)V}{kx^2}.$

Ta rút ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \sqrt[3]{\dfrac{(k+1)V}{2k^2}} > 0.$

Lập bảng biến thiên, ta có

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(x_0)$	↗	

Dựa vào bảng biến thiên, ta rút ra $\min_{x>0} f(x) = f\left(\sqrt[3]{\dfrac{(k+1)V}{2k^2}}\right).$

Khi đó $y = \sqrt[3]{\dfrac{4kV}{(k+1)^2}}$ và $h = \sqrt[3]{\dfrac{k(k+1)V}{2}}$.

Câu 55. Kính viễn vọng Hubble được tàu không gian Discovery đưa vào sử dụng ngày 24/4/1990. Phương trình biểu diễn vận tốc của tàu không gian này từ lúc rời bệ phóng $t = 0$ cho đến khi tên lửa vào thời gian $t = 126$ giây được cho bởi
$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083(\text{feet}/\text{s}).$

Hãy sử dụng phương trình này để tính các giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của gia tốc tàu giữa lúc cất cánh và lúc hoàn toàn được phóng đi.

Lời giải

Bài toán yêu câu chúng ta đi tìm cực trị của hàm số gia tốc, chứ không phải là cực trị của hàm vận tốc. Ta có $a(t) = v'(t) = 0,003906t^2 - 0,18058t + 23,61.$

Đạo hàm $a'(t) = 0,007812t - 0,18058 = 0 \Leftrightarrow t \approx 23,12.$

Tính giá trị tại các điểm $0; 23,12$ và 126, ta được

$a(0) = 23,61; a(23,12) = 21,52$ và $a(126) = 62,87.$

Vậy gia tốc cực đại của tàu là $62,87\, ft/s^2$ và gia tốc cực tiểu của tàu là $21,52\, ft/s^2$.

Câu 56. Enzyme là protein hoạt động như một chất xúc ta làm tăng tốc độ phản ứng hóa học xuất hiện trong các tế bào. Trong một phản ứng nào đó, một enzyme được chuyển hóa thành một enzyme khác, được gọi là enzyme sản phẩm. Enzyme sản phẩm này hoạt động như một chất xúc tác cho chính sự hình thành của nó. Tốc độ R mà tại đó enxyme sản phẩm được tạo thành được cho bởi phương trình $R = kp(l - p^2)$, trong đó l là tổng số lượng enzyme ban đầu và enzyme sản phẩm, p là lượng enzyme sản phẩm, và k là hằng số dương. Với giá trị nào của p thì R đạt giá trị lớn nhất?

Lời giải

Ta có $R = k(pl - p^2)$

Đạo hàm $R'(p) = 0 \Leftrightarrow k(l - 2p) = 0 \Leftrightarrow p = \frac{l}{2}$

Ta có $R''(p) = -2k < 0$, nên hàm số đạt cực đại tại $p = \frac{l}{2}$. Đây cũng chính là giá trị lớn nhất của hàm số.

Câu 57. Hàm chi phí của một nhà máy được cho bởi $C = C(Q) = \frac{Q^2}{4} + 3Q + 400$ trong đó C là tổng chi phí sản xuất Q đơn vị sản phẩm. Với mức sản lượng là bao nhiêu thì chi phí trung bình tính trên mỗi đơn vị sản phẩm là thấp nhất? Khi đó chi phí trung bình tối thiểu bằng bao nhiêu?

Bài giải

Hàm chi phí trung bình

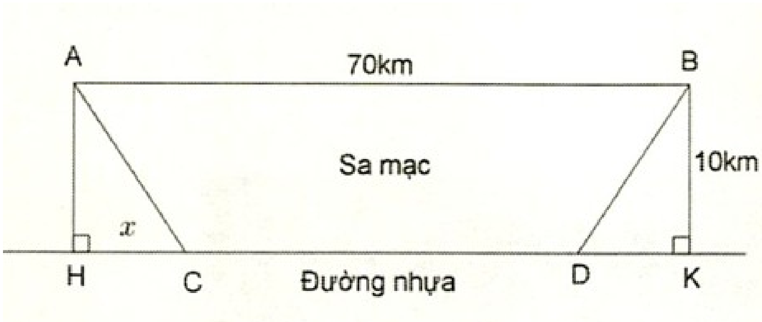
$$\bar{C} = \bar{C}(Q) = \frac{C}{Q} = \frac{\frac{Q^2}{4} + 3Q + 400}{Q} = \frac{Q}{4} + 3 + \frac{400}{Q} \text{ (với } Q > 0).$$

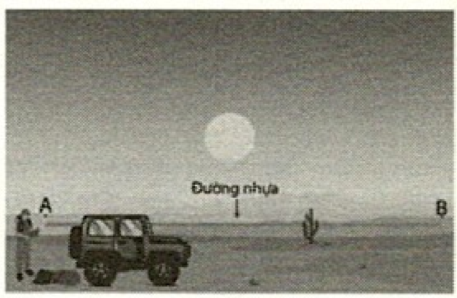
Ta có $\bar{C}'(Q) = \frac{1}{4} - \frac{400}{Q^2} = \frac{Q^2 - 1600}{4Q^2} = 0 \Leftrightarrow Q = 40$

Vì $\bar{C}''(Q) = \frac{800}{Q^2} > 0$, nên hàm số $\bar{C}$ đạt cực tiểu tại $Q = 40$.

Chi phí trung bình tối thiểu là $\bar{C}(40) = \frac{40}{4} + 3 + \frac{400}{40} = 23$

Câu 58. Một nhà địa chất học đang ở tại điểm A trên sa mạc. Anh ta muốn đến điểm B cách A một đoạn là $70km$. Trong sa mạc thì xe anh ta chỉ có thể di chuyển với vận tốc là $30km/h$. Nhà địa chất ấy phải đến được điểm B sau 2 giờ. Vì vậy, nếu anh ta đi thẳng từ A đến B sẽ không thể đúng giờ. May mắn thay, có một con đường nhựa song song với đường nối A và B và cách AB một đoạn $10km$. Trên đường nhựa này, thì xe của nhà địa chất học có thể di chuyển với vận tốc $50km/h$. Làm thế nào để nhà địa chất học đến sớm nhất (đảm bảo trong khung giờ cho phép)?





Lời giải

Gọi H, K, C, D là các điểm như trong hình vẽ.

Gọi $HC = x(0 < x < 70)$ và $DK = y(0 < y < 70)$.

Quãng đường đi từ A đến C là $AC = \sqrt{100^2 + x^2} \Rightarrow t_1 = \dfrac{AC}{v_{\text{Sahara}}} = \dfrac{\sqrt{10^2 + x^2}}{30}$.

Quãng đường đi từ D đến B là $DB = \sqrt{100^2 + y^2} \Rightarrow t_2 = \dfrac{DB}{v_{\text{Sahara}}} = \dfrac{\sqrt{10^2 + y^2}}{30}$.

Quãng đường đi từ C đến D là $t_3 = \dfrac{CD}{v_{\text{duong nhua}}} = \dfrac{70 - (x + y)}{50}$.

Tổng thời gian mà nhà địa chất học đi từ A đến B là $T = t_1 + t_2 + t_3$

Suy ra $T(x; y) = \dfrac{\sqrt{10^2 + x^2}}{30} + \dfrac{\sqrt{10^2 + y^2}}{30} + \dfrac{70 - (x + y)}{50}$.

Đây là một biểu thức có dạng đối xứng 2 biến x, y và ta cần tìm $\min T(x; y)$

Ta có $T(x; y) = \dfrac{\sqrt{10^2 + x^2}}{30} + \dfrac{\sqrt{10^2 + y^2}}{30} + \dfrac{70 - (x + y)}{50}$.

Hay, ta có

$$\begin{aligned} T(x; y) &= \frac{\sqrt{10^2 + x^2}}{30} + \frac{35 - x}{50} + \frac{\sqrt{10^2 + y^2}}{30} + \frac{35 - y}{50} \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(u) = \dfrac{\sqrt{10^2 + u^2}}{30} + \dfrac{35 - u}{50}, 0 < u < 70.$

Đạo hàm

$$f'(u) = \frac{u}{30\sqrt{10^2 + u^2}} - \frac{1}{50} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{10^2 + u^2} = \frac{5u}{3} > 0 \Leftrightarrow u = \frac{15}{2}.$$

Lập bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)} f(u) = f\left(\dfrac{15}{2}\right) = \dfrac{29}{30}$.

Do đó, ta có $T(x; y) = f(x) + f(y) \geq \dfrac{29}{30} + \dfrac{29}{30} = \dfrac{29}{15} \approx 1,93$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \dfrac{15}{2}(km)$.