

PHẦN C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Câu hỏi dành cho đối tượng học sinh trung bình – khá

Câu 1. Nghiệm của phương trình $\tan 3x = \tan x$ là

- A. $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ B. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ C. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ D. $x = \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải

$$\tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Ta có

Trình bày lại

$$\begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (*)$$

ĐK:

Ta có $\tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ Kết hợp điều kiện (*) suy ra $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 2. Phương trình lượng giác: $\sqrt{3} \cdot \tan x + 3 = 0$ có nghiệm là:

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ B. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ D. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

Lời giải

Chọn D

$$\sqrt{3} \cdot \tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Câu 3. Giải phương trình: $\tan^2 x = 3$ có nghiệm là:

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ B. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$ D. vô nghiệm.

Lời giải

Chọn C

$$\tan^2 x = 3 \Leftrightarrow \tan x = \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 4. Nghiệm của phương trình $\sqrt{3} + 3 \tan x = 0$ là:

- A. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Lời giải

Chọn A

$$\sqrt{3} + 3 \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 5. Giải phương trình $\sqrt{3} \tan 2x - 3 = 0$.

- A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ B. $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$
 C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ D. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải

Chọn D

$$\sqrt{3} \tan 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 6. Phương trình lượng giác $3 \cot x - \sqrt{3} = 0$ có nghiệm là:

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ B. Vô nghiệm. C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

Lời giải

Chọn D

$$3 \cot x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cot x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Ta có

Câu 7. Phương trình $2 \cot x - \sqrt{3} = 0$ có nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$ B. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
 C. $x = \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ D. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải

Chọn C

$$2 \cot x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cot x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có

Câu 8. Giải phương trình $\cot(3x - 1) = -\sqrt{3}$.

- A. $x = \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}).$ B. $x = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}).$
 C. $x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}).$ D. $x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

Lời giải.

Chọn A

$$\cot(3x-1) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot(3x-1) = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

Ta có

$$\Leftrightarrow 3x-1 = \frac{-\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \xrightarrow{k=1} x = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{18}.$$

- Câu 9.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình: $3\sin x + m - 1 = 0$ có nghiệm?
A. 7 **B.** 6 **C.** 3 **D.** 5

Lời giải

$$3\sin x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1-m}{3}, \text{ để có nghiệm ta có } -1 \leq \frac{1-m}{3} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 4$$

Nên có 7 giá trị nguyên từ -2 ; đến 4 .

- Câu 10.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin x = m$ có nghiệm.
A. $m \leq 1$. **B.** $m \geq -1$. **C.** $-1 \leq m \leq 1$. **D.** $m \leq -1$.

Lời giải

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta luôn có $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Do đó, phương trình $\sin x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 1$.

- Câu 11.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm.
A. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **B.** $m \in (1; +\infty)$.
C. $m \in [-1; 1]$. **D.** $m \in (-\infty; -1)$.

Lời giải

Áp dụng điều kiện có nghiệm của phương trình $\cos x = a$.

- Phương trình có nghiệm khi $|a| \leq 1$.
- Phương trình vô nghiệm khi $|a| > 1$.

Phương trình $\cos x - m = 0 \Leftrightarrow \cos x = m$.

$$\Leftrightarrow |m| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}.$$

Do đó, phương trình $\cos x = m$ vô nghiệm

- Câu 12.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3\sin 2x - m^2 + 5 = 0$ có nghiệm?
A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

$$\sin 2x = \frac{m^2 - 5}{3}$$

Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\text{Vì } \sin 2x \in [-1; 1] \text{ nên } \frac{m^2 - 5}{3} \in [-1; 1] \Leftrightarrow m^2 \in [2; 8] \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2} \leq m \leq -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị.

Câu 13. Cho phương trình $\cos 5x = 3m - 5$. Gọi đoạn $[a; b]$ là tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm. Tính $3a + b$.

- A. 5. B. -2. C. $\frac{19}{3}$. D. 6.

Lời giải

Phương trình đã cho có nghiệm khi $-1 \leq 3m - 5 \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq 3m \leq 6 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq m \leq 2$.

Khi đó tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm là $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$.

Ta được $a = \frac{4}{3}$; $b = 2$. Suy ra $3a + b = 6$.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm?
A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Lời giải

Áp dụng điều kiện có nghiệm của phương trình $\cos x = a$.

- Phương trình có nghiệm khi $|a| \leq 1$.
- Phương trình vô nghiệm khi $|a| > 1$.

Do đó, phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm khi và chỉ khi $|m + 1| \leq 1$
 $\Leftrightarrow -1 \leq m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2; -1; 0\}$.

Câu 15. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2$ có nghiệm. Tính tổng T của các phần tử trong S .

- A. $T = 6$. B. $T = 3$. C. $T = -2$. D. $T = -6$.

Lời giải

Phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = m + 2$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq m + 2 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1$

$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} S = \{-3; -2; -1\} \rightarrow T = (-3) + (-2) + (-1) = -6$.

Câu 16. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{3}\cos x + m - 1 = 0$ có nghiệm?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Lời giải

Ta có
$$\sqrt{3}\cos x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1 - m}{\sqrt{3}}$$

Phương trình có nghiệm
$$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{1 - m}{\sqrt{3}} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{3} \leq m \leq 1 + \sqrt{3} - \frac{m \in \mathbb{Z}}{\rightarrow} m \in \{0; 1; 2\}.$$

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình $m\cos x + 1 = 0$ có nghiệm?

- A. 2018. B. 2019. C. 4036. D. 4038.

Lời giải

Ta có
$$m\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{m}.$$

Phương trình có nghiệm
$$\Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{m} \leq 1 \Leftrightarrow m \geq 1 - \frac{m \in \mathbb{Z}}{m \in [-2018; 2018]} \rightarrow m \in \{1; 2; 3; \dots; 2018\}$$

Vậy có tất cả 2018 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 18. Phương trình $\sin 2x = \cos x$ có nghiệm là

A.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

B.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

C.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

D.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Lời giải

$$\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 19. Nghiệm của phương trình $\sin 3x = \cos x$ là

A. $x = k\pi; x = k\frac{\pi}{2}$ B. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

C. $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

D. $x = k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Lời giải

$$\sin 3x = \cos x \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 3x = \pi - \frac{\pi}{2} + x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

Câu 20. Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x^2-2x} = 81$ là:

A. 4.

B. - 4.

C. - 2.

D. 2.

Giải

$$3^{x^2-2x} = 81 \Leftrightarrow 3^{x^2-2x} = 3^4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0.$$

Phương trình $x^2 - 2x - 4 = 0$ có hệ số a, c trái dấu nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt và tổng hai nghiệm bằng 2. **Chọn D**

Câu 21. Nghiệm của phương trình $\log_{16}(x+5) = \frac{1}{2}$ là:

A. 3.

B. - 1.

C. - 3.

D. 27.

Giải

Ta có: $x+5 = 16^{\frac{1}{2}}$. Suy ra $x = -1$. **Chọn B**

Câu 22. Số nghiệm của phương trình $\log_2(x-4) = \log_2(x^2 - 5x + 4)$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Giải

$$\log_2(x-4) = \log_2(x^2 - 5x + 4) \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = x^2 - 5x + 4 \\ x-4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 8 = 0 \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \\ x > 4 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. **Chọn C**

Câu 23. (Mã 101 - 2021 Lần 1) Nghiệm của phương trình $\log_3(5x) = 2$ là

- A. $x = \frac{8}{5}$. B. $x = 9$. C. $x = \frac{9}{5}$. D. $x = 8$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D = (0; +\infty)$.

$$\log_3(5x) = 2 \Leftrightarrow 5x = 3^2 \Leftrightarrow x = \frac{9}{5}.$$

Ta có:

Câu 24. (Mã 104 - 2021 Lần 1) Nghiệm của phương trình $\log_2(5x) = 3$ là:

- A. $x = \frac{8}{5}$. B. $x = \frac{9}{5}$. C. $x = 8$. D. $x = 9$.

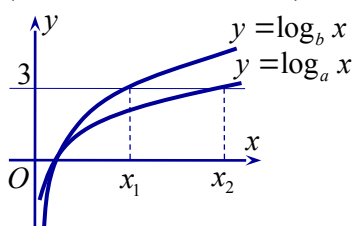
Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x > 0$

$$\log_2(5x) = 3 \Leftrightarrow 5x = 2^3 \Leftrightarrow 5x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{5} \text{ (nhận).}$$

Câu 25. (Mã 103 - 2020 Lần 2) Hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình bên.



Đường thẳng $y = 3$ cắt hai đồ thị tại các điểm có hoành độ là x_1, x_2 . Biết rằng $x_1 = 2x_2$. Giá trị của

$\frac{a}{b}$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. 2. D. $\sqrt[3]{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\log_a x = 3 \Leftrightarrow x_1 = a^3$, và $\log_b x = 3 \Leftrightarrow x_2 = b^3$.

Ta có $x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow a^3 = 2b^3 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3 = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \sqrt[3]{2}$

- Câu 26. (Đề Tham Khảo 2017)** Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$.
- A. $S = \{3\}$ B. $S = [-\sqrt{10}; \sqrt{10}]$ C. $S = \{-3; 3\}$ D. $S = \{4\}$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x > 1$. Phương trình đã cho trở thành $\log_2(x^2 - 1) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Đối chiếu điều kiện, ta được nghiệm duy nhất của phương trình là $x = 3 \Rightarrow S = \{3\}$

- Câu 27. (Mã 103 - 2019)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1) + 1 = \log_2(3x-1)$ là
- A. $x = 1$ B. $x = 2$ C. $x = -1$ D. $x = 3$

Lời giải

Chọn D

Điều kiện phương trình: $x > \frac{1}{3}$

$$\log_2(x+1) + 1 = \log_2(3x-1) \Leftrightarrow \log_2[(x+1).2] = \log_2(3x-1) \Leftrightarrow 2(x+1) = 3x-1 \Leftrightarrow x = 3$$

Ta có $x = 3$ (Thỏa mãn điều kiện phương trình)

Vậy nghiệm phương trình là $x = 3$.

- Câu 28. (Đề Minh Họa 2021)** Nghiệm của phương trình $5^{2x-4} = 25$ là
- A. $x = 3$ B. $x = 2$ C. $x = 1$ D. $x = -1$

Lời giải

Chọn A

♦ Ta có $5^{2x-4} = 25 \Leftrightarrow 5^{2x-4} = 5^2 \Leftrightarrow 2x - 4 = 2 \Leftrightarrow x = 3$.

♦ Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{3\}$.

- Câu 29. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Nghiệm của phương trình $3^{x-1} = 27$ là
- A. $x = 4$ B. $x = 3$ C. $x = 2$ D. $x = 1$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3^{x-1} = 27 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^3 \Leftrightarrow x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 4$.

- Câu 30.** Tập nghiệm của phương trình: $4^{x+1} + 4^{x-1} = 272$ là
- A. $\{3; 2\}$ B. $\{2\}$ C. $\{3\}$ D. $\{3; 5\}$

Lời giải

Chọn C

$$4^{x+1} + 4^{x-1} = 272 \quad \text{Ô} \quad 4 \cdot 4^x + \frac{4^x}{4} = 272 \quad \text{Ô} \quad 4^x = 64 \quad \text{Ô} \quad x = 3$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{3\}$.

- Câu 31. (HKI-NK HCM-2019)** Phương trình $27^{2x-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2}$ có tập nghiệm là
- A.** $\{-1; 7\}$ **B.** $\{-1; -7\}$ **C.** $\{1; 7\}$ **D.** $\{1; -7\}$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $27^{2x-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2} \Leftrightarrow 3^{6x-9} = 3^{-x^2-2}$

$$\Leftrightarrow 6x - 9 = -x^2 - 2 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -7 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{1; -7\}$.

- Câu 32. (THPT Quỳnh Lưu- Nghệ An- 2019)** Phương trình $3^x \cdot 2^{x+1} = 72$ có nghiệm là
- A.** $x = \frac{5}{2}$ **B.** $x = 2$ **C.** $x = \frac{3}{2}$ **D.** $x = 3$

Lời giải

Chọn B

$$3^x \cdot 2^{x+1} = 72 \Leftrightarrow 3^x \cdot 2^x \cdot 2 = 72 \Leftrightarrow 6^x = 36 \Leftrightarrow x = 2.$$

- Câu 33. (Chuyên Bắc Giang 2019)** Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x-3} = 5^{x+1}$ là
- A.** $x = -1; x = 2$ **B.** $x = 1; x = -2$ **C.** $x = 1; x = 2$ **D.** Vô nghiệm.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x-3} = 5^{x+1} \Leftrightarrow 5^{-(x^2-2x-3)} = 5^{x+1} \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = x + 1 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -1; x = 2$.

- Câu 34.** Tập nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1}$ là

A. $\{-1\}$.

B. $\{-1; 2\}$.

C. $\{-1; 4\}$.

D. $\{2\}$.

Lời giải

Chọn B

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1} \Leftrightarrow 7^{-x^2+2x+3} = 7^{x+1} \Leftrightarrow -x^2+2x+3 = x+1$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Câu 35. (Mã 110 2017) Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 1$.

A. $S = \{3\}$

B. $S = \{2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}\}$

C. $S = \{2 + \sqrt{5}\}$

D. $S = \left\{\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right\}$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \quad (*)$

Phương trình $\Leftrightarrow 2\log_2(x-1) - \log_2(x+1) = 1$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(x-1) = \log_2(x+1) + \log_2 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 = \log_2[2(x+1)]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{5} (L) \\ x = 2 + \sqrt{5} \end{cases} \text{ . Vậy tập nghiệm phương trình } S = \{2 + \sqrt{5}\}$$

Câu 36. (THPT Hàm Rồng Thanh Hóa 2019) Số nghiệm của phương trình

$$\log_3(x^2 + 4x) + \log_{\frac{1}{3}}(2x + 3) = 0$$

là

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Viết lại phương trình ta được

$$\log_3 (x^2 + 4x) = \log_3 (2x + 3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 > 0 \\ x^2 + 4x = 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

- Câu 37.** Phương trình $\log_x 2 + \log_2 x = \frac{5}{2}$ có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Khi đó tổng $x_1^2 + x_2$ bằng
- A. $\frac{9}{2}$. B. 3. C. 6. D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện phương trình: $x > 0, x \neq 1$.

$$\log_x 2 + \log_2 x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} + \log_2 x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - \frac{5}{2} \log_2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Suy ra $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = 4$.

Suy ra $x_1^2 + x_2 = 6$.

- Câu 38.** (Cần Thơ 2019) Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2 (12 - 2^x) = 5 - x$ bằng
- A. 2. B. 32. C. 6. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $12 - 2^x > 0$ (*)

$$\text{Khi đó } \log_2 (12 - 2^x) = 5 - x \Leftrightarrow 12 - 2^x = 2^{5-x} \Leftrightarrow 2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 4 \\ 2^x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ta thấy cả hai nghiệm đều thỏa mãn điều kiện (*), và tích bằng $2 \cdot 3 = 6$.

- Câu 39.** (Mã 102 - 2020 Lần 2) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3 (13 - x^2) \geq 2$ là
- A. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. B. $(-\infty; 2]$.
C. $(0; 2]$. D. $[-2; 2]$.

Lời giải

Chọn D

$$\log_3 (13 - x^2) \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 13 - x^2 > 0 \\ 13 - x^2 \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 13 \\ x^2 \leq 4 \end{cases}$$

♦ Bất phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{13} < x < \sqrt{13} \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

♦ Vậy, tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(13 - x^2) \geq 2$ là $[-2; 2]$.

- Câu 40.** (Mã 103 - 2020 Lần 2) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(36 - x^2) \geq 3$ là
A. $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$ **B.** $(-\infty; 3]$ **C.** $[-3; 3]$ **D.** $(0; 3]$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_3(36 - x^2) \geq 3 \Leftrightarrow 36 - x^2 \geq 27 \Leftrightarrow 9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$

- Câu 41.** (Đề Minh Họa 2021) Tập nghiệm của bất phương trình $3^{4-x^2} \geq 27$ là
A. $[-1; 1]$ **B.** $(-\infty; 1]$ **C.** $[-\sqrt{7}; \sqrt{7}]$ **D.** $[1; +\infty)$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3^{4-x^2} \geq 27 \Leftrightarrow 4 - x^2 \geq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

- Câu 42.** (Mã 101 - 2021 Lần 1) Tập nghiệm của bất phương trình $3^x < 2$ là
A. $(-\infty; \log_3 2)$ **B.** $(\log_3 2; +\infty)$ **C.** $(-\infty; \log_2 3)$ **D.** $(\log_2 3; +\infty)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $3^x < 2 \Leftrightarrow x < \log_3 2$

Vậy $S = (-\infty; \log_3 2)$

- Câu 43.** (Thpt Hùng Vương Bình Phước 2019) Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9$ trên tập số thực là
A. $(2; +\infty)$ **B.** $(-\infty; -2)$ **C.** $(-\infty; 2)$ **D.** $(-2; +\infty)$

Lời giải

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9 \Leftrightarrow 3^{-x} > 3^2 \Leftrightarrow -x > 2 \Leftrightarrow x < -2$$

Vậy tập nghiệm là: $S = (-\infty; -2)$

- Câu 44.** (THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019) Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x+1} \leq 8^{x-2}$ là
A. $[8; +\infty)$ **B.** $\emptyset$ **C.** $(0; 8)$ **D.** $(-\infty; 8]$

Lời giải

Ta có: $4^{x+1} \leq 8^{x-2} \Leftrightarrow 2^{2x+2} \leq 2^{3x-6} \Leftrightarrow 2x+2 \leq 3x-6 \Leftrightarrow x \geq 8$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [8; +\infty)$.

Câu 45. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1} > 1$ (với a là tham số, $a \neq 0$) là:

- A. $(-\infty; 0)$ B. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ C. $(0; +\infty)$ D. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Lời giải

Ta có: $\left(\frac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1} > \left(\frac{1}{1+a^2}\right)^0$ (1)

Nhận thấy $1+a^2 > 1, \forall a \neq 0$ nên: $\frac{1}{1+a^2} < 1$.

Khi đó bất phương trình (1) tương đương $2x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho : $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

Câu 46. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1) \leq \log_2(5-x)+1$ là

A. $[3; 5]$ B. $(1; 3]$ C. $[1; 3]$ D. $(1; 5)$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $1 < x < 5$.

Ta có $2\log_2(x-1) \leq \log_2(5-x)+1 \Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 \leq \log_2[2(5-x)] \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 10-2x$

$\Leftrightarrow x^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$. Vậy tập nghiệm của bpt là $S = (1; 3]$.

Câu 47. (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2\log_3(4x-3) \leq \log_3(18x+27)$

- A. $S = \left[-\frac{3}{8}; 3\right]$ B. $S = \left[\frac{3}{4}; 3\right]$ C. $S = \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$ D. $S = [3; +\infty)$

Lời giải

$2\log_3(4x-3) \leq \log_3(18x+27)$ (*)

Điều kiện: $\begin{cases} 4x-3 > 0 \\ 18x+27 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{4}$.

Với điều kiện trên, $(*) \Leftrightarrow \log_3 (4x - 3)^2 \leq \log_3 (18x + 27)$

$$\Leftrightarrow (4x - 3)^2 \leq 18x + 27$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq x \leq 3$$

Kết hợp điều kiện ta được $S = \left[\frac{3}{4}; 3 \right]$.

Câu 48. (THPT Yên Khánh - Ninh Bình -2019) Tập nghiệm của bất phương trình

$$\log_2^2(2x) + \log_2 \frac{x}{4} < 9$$

chứa tập hợp nào sau đây?

A. $\left(\frac{3}{2}; 6 \right)$

B. $(0; 3)$

C. $(1; 5)$

D. $\left(\frac{1}{2}; 2 \right)$

Lời giải

+ Điều kiện: $x > 0$.

+ Ta có:

$$\log_2^2(2x) + \log_2 \frac{x}{4} < 9 \Leftrightarrow (1 + \log_2 x)^2 + \log_2 x - 2 < 9 \Leftrightarrow \log_2^2 x + 3\log_2 x - 10 < 0$$

$$\Leftrightarrow -5 < \log_2 x < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2^5} < x < 4$$

Vậy $x \in \left(\frac{1}{2^5}; 4 \right)$ chứa tập $\left(\frac{1}{2}; 2 \right)$.

Câu 49. (Chuyên Đại Học Vinh 2019) Tập nghiệm của bất phương trình

$$\log_{\frac{1}{3}}(x - 1) + \log_3(11 - 2x) \geq 0$$

là:

A. $(-\infty; 4]$

B. $(1; 4]$

C. $(1; 4)$

D. $\left[4; \frac{11}{2} \right]$

Lời giải

Chọn D

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ 11 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(1; \frac{11}{2} \right)$$

ĐK:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x - 1) + \log_3(11 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow \log_3 \frac{11 - 2x}{x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{11 - 2x}{x - 1} \geq 1 \Leftrightarrow x \in \left[4; \frac{11}{2} \right]$$

Ta có

$$x \in \left(1; \frac{11}{2}\right) \quad x \in \left[4; \frac{11}{2}\right) \subset \left(1; \frac{11}{2}\right)$$

Kết luận: . Vì . Ta chọn đáp án D

Câu 50. (Sở Phú Thọ 2019) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0$ là

- A. $(-\infty; 4]$ B. $(1; 4]$ C. $(1; 4)$ D. $\left[4; \frac{11}{2}\right)$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $1 < x < \frac{11}{2}$

Khi đó ta có: $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0 \Leftrightarrow \log_3(11-2x) \geq \log_3(x-1) \Leftrightarrow 11-2x \geq x-1 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 4]$$

Câu 51. (THPT Trần Phú - 2019) Tập nghiệm của bất phương trình: $(3^x + 2)(4^{x+1} - 8^{2x+1}) \leq 0$

- A. $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$ B. $\left[\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right)$ C. $(-\infty; 4]$ D. $[4; +\infty)$

Lời giải

Chọn A

$$(3^x + 2)(4^{x+1} - 8^{2x+1}) \leq 0 \Leftrightarrow 4^{x+1} - 8^{2x+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2x} - 8 \cdot (2^{2x})^3 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \cdot (2^{2x})^3 + 2^{2x} \leq 0 (*)$$

$$\text{Đặt } 2^{2x} = t, t > 0, \text{ suy ra bpt } (*) \text{ trở thành: } -2t^3 + t \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \leq t \leq 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Giao với Đk } t > 0 \text{ ta được: } t \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cup 2^{2x} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2^{2x} \geq 2^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2x \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của BPT đã cho là } T = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$$

Câu 52. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 2019) Bất phương trình $3^{2x+1} - 7 \cdot 3^x + 2 > 0$ có tập nghiệm là

- A. $(-\infty; -1) \cup (\log_2 3; +\infty)$ B. $(-\infty; -2) \cup (\log_2 3; +\infty)$
C. $(-\infty; -1) \cup (\log_3 2; +\infty)$ D. $(-\infty; -2) \cup (\log_3 2; +\infty)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $3^{2x+1} - 7 \cdot 3^x + 2 > 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 - 7 \cdot 3^x + 2 > 0$

Đặt $3^x = t > 0$ ta được $\begin{cases} t > 0 \\ 3t^2 - 7t + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < \frac{1}{3} \\ t > 2 \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} 0 < 3^x < \frac{1}{3} \\ 3^x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3^x < 3^{-1} \\ 3^x > 3^{\log_3 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > \log_3 2 \end{cases}$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $(-\infty; -1) \cup (\log_3 2; +\infty)$

Câu 53. (Chuyên Bắc Giang 2019) Tập nghiệm của bất phương trình $3^{3x+1} - 9 + 3^{x+1} - 9 \cdot 3^{2x} > 0$ là
A. $(-\infty; 1)$. **B.** $(3; +\infty)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $3^{3x+1} - 9 + 3^{x+1} - 9 \cdot 3^{2x} > 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{3x} - 9 + 3 \cdot 3^x - 9 \cdot 3^{2x} > 0$

Đặt $3^x = t (t > 0)$

Ta có bất phương trình $3t^3 - 9 + 3t - 9t^2 > 0$

$$\Leftrightarrow 3t^3 - 9t^2 + 3t - 9 > 0$$

$$\Leftrightarrow 3t^2(t - 3) + 3(t - 3) > 0$$

$$\Leftrightarrow (3t^2 + 3)(t - 3) > 0$$

$$\Leftrightarrow t - 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow t > 3$$

Khi đó ta có $3^x > 3 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; +\infty)$.

Câu 54. (THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa - 2019) Bất phương trình $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x > 0$ có tập nghiệm là?

A. $S = (-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$.

B. $S = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

C. $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

D. $S = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Vậy $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ và $\beta = -\frac{\pi}{3}$. Khi đó $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{2}$.

Câu 57. Tính tổng S của các nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

- A. $S = \frac{5\pi}{6}$. B. $S = \frac{\pi}{3}$. C. $S = \frac{\pi}{2}$. D. $S = \frac{\pi}{6}$.

Lời giải

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có:

$$\text{Vì } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ nên } x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow S = \frac{\pi}{6}.$$

Câu 58. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ thuộc đoạn $[\pi; 2\pi]$ là:

- A. 3 . B. 2 . C. 0 . D. 1 .

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Suy ra số nghiệm thuộc $[\pi; 2\pi]$ của phương trình là 1.

Câu 59. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos 2x - \cos x = 0$ trên khoảng $(0; 2\pi)$ bằng T . Khi đó T có giá trị là:

- A. $T = \frac{7\pi}{6}$. B. $T = 2\pi$. C. $T = \frac{4\pi}{3}$. D. $T = \pi$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos 2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2\pi \\ 2x = -x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vì } x \in (0; 2\pi) \text{ nên } 0 < \frac{k2\pi}{3} < 2\pi \Leftrightarrow 0 < k < 3.$$

$$\text{Do } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } k \in \{1; 2\} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}; x = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\text{Vậy } T = \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi.$$

Câu 60.

A. 2.

B. 1.

C.4.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$2 \cos x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Mà $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ và $k \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}$.

Câu 61.

 $55\pi.$

B. $\overline{2}$.

C. 45π .

D. 2

A.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{cases} \quad (*)$$

Điều kiện để phương trình có nghĩa

Khi đó, phương trình $3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$ so sánh với đk

$$\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}, x \in [0; 30] \Rightarrow k = [0; \dots; 4] \Rightarrow x \in \{0; \pi; 2\pi; \dots; 9\pi\}$$

Vậy, tổng các nghiệm trong đoạn $[0; 30]$ của phương trình là: 45π .

Câu 62.

A.2.

B. 1.

C. 3.

D. 4

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > -1$.

$$3x^2 - 6x + 3\ln(x+1) + 1 = 0$$

Phương trình đã cho tương đương với

$y = 3x^2 - 6x + 3\ln(x+1) + 1$ ($-1; +\infty$)
 Xét hàm số liên tục trên khoảng .

$$y' = 6(x-1) + \frac{3}{x+1} = \frac{6x^2 - 3}{x+1}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(thỏa điều kiện).

x	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$f(\frac{\sqrt{2}}{2})$	$+\infty$	

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$ $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$
 Vì , và nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Câu 63. (THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019) Tập nghiệm của phương trình

$$5^{x^2-4x+3} + 5^{x^2+7x+6} = 5^{2x^2+3x+9} + 1$$

là

- A. $\{1; -1; 3\}$ B. $\{-1; 1; 3; 6\}$ C. $\{-6; -1; 1; 3\}$ D. $\{1; 3\}$

Lời giải

$$5^{x^2-4x+3} + 5^{x^2+7x+6} = 5^{2x^2+3x+9} + 1 \Leftrightarrow 5^{x^2-4x+3} + 5^{x^2+7x+6} = 5^{(x^2-4x+3)+(x^2+7x+6)} + 1$$

Đặt $\begin{cases} a = x^2 - 4x + 3 \\ b = x^2 + 7x + 6 \end{cases}$, ta được phương trình:

$$5^a + 5^b = 5^{a+b} + 1 \Leftrightarrow 5^a + 5^b = 5^a \cdot 5^b + 1 \Leftrightarrow (1 - 5^a)(1 - 5^b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^a = 1 \\ 5^b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Khi đó $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^2 + 7x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = -1 \\ x = -6 \end{cases}$

Tập nghiệm của phương trình là $\{-6; -1; 1; 3\}$.

Câu 64. Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình

$$\log_7 \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} + 4x^2 + 1 = 6x$$

và

$$x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4}(a + \sqrt{b})$$

với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a + b$.

- A.** $a + b = 13$. **B.** $a + b = 11$. **C.** $a + b = 16$. **D.** $a + b = 14$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$.

Ta có: $\log_7 \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} + 4x^2 + 1 = 6x \Leftrightarrow \log_7 (4x^2 - 4x + 1) + 4x^2 - 4x + 1 = \log_7 (2x) + 2x$

Xét hàm số $f(t) = \log_7 t + t$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 7} + 1 > 0 \quad t > 0$ nên là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

Do đó ta có $4x^2 - 4x + 1 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$

Khi đó

$$x_1 + 2x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} + 2 \frac{3 + \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{4}(9 + \sqrt{5}) \quad \text{hoặc} \quad x_1 + 2x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} + 2 \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{4}(9 - \sqrt{5})$$

Vậy $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}; x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$. Do đó $a = 9; b = 5$ và $a + b = 9 + 5 = 14$.

Câu 65. Tích các nghiệm của phương trình

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (6^{x+1} - 36^x) = -2$$

bằng

- A.** 0. **B.** $\log_6 5$. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (6^{x+1} - 36^x) = -2 \Leftrightarrow -2 \log_5 (6^{x+1} - 36^x) = -2 \Leftrightarrow \log_5 (6^{x+1} - 36^x) = 1$

$$\Leftrightarrow 6^{x+1} - 36^x = 5 \Leftrightarrow 6^{2x} - 6 \cdot 6^x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6^x = 1 \\ 6^x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_6 5 \end{cases}$$

Vậy tích các nghiệm của phương trình bằng: $0 \cdot \log_6 5 = 0$.

Câu 66. Tổng các nghiệm của phương trình

$$\log_2 (5 - 2^x) = 2 - x$$

bằng

- A.** 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn

C.

Điều kiện: $5 - 2^x > 0$.

$$\log_2(5 - 2^x) = 2 - x \Leftrightarrow 5 - 2^x = 2^{2-x} \Leftrightarrow 5 - 2^x = \frac{4}{2^x} \Leftrightarrow 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 2^x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \text{ (tmdk)}.$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho là bằng 2.

Câu 67. (Mã 102 - 2020 Lần 1) Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 1000ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1400ha.

- A. 2043. B. 2025. C. 2024. D. 2042.

Lời giải

Chọn B

Ta có sau n năm thì diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là: $1000 \cdot (1 + 0.06)^n$

Khi đó, $1000 \cdot (1 + 0.06)^n > 1400 \Rightarrow 1.06^n > 1.4 \Rightarrow n > 5.774$.

Vậy vào năm 2025 thì diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1400ha.

Câu 68. (Mã 104 - 2020 Lần 1) Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 800ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1400ha?

- A. Năm 2029. B. Năm 2028. C. Năm 2048. D. Năm 2049.

Lời giải

Chọn A

Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 800ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước nên sau n (năm)

diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là $800 \cdot (1 + 6\%)^n$ với $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $800 \cdot (1 + 6\%)^n \geq 1400 \Leftrightarrow 1.06^n \geq \frac{7}{4} \Leftrightarrow n \geq \log_{1.06} \frac{7}{4} \approx 9.60402$.

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên giá trị nhỏ nhất thỏa mãn là $n = 10$.

Vậy: kể từ sau năm 2019, năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1400ha là năm 2029.

Câu 69. Anh An gửi số tiền 58 triệu đồng vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép và ổn định trong 9 tháng thì lĩnh về được 61758000đ. Hỏi lãi suất ngân hàng hàng tháng là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất không thay đổi trong thời gian gửi.

- A. 0,8 % B. 0,6 % C. 0,7 % D. 0,5 %

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $A_n = A_0(1+r)^n$ với n là số kỳ hạn, A_0 là số tiền ban đầu, A_n là số tiền có được sau n kỳ hạn, r là lãi suất.

$$A_9 = A_0(1+r)^9 \Rightarrow r = \sqrt[9]{\frac{A_9}{A_0}} - 1 = 0,7\%$$

Suy ra

Câu 70. (Chuyên Quốc Học Huế - 2021) Một người gửi ngân hàng 200 triệu đồng với kì hạn 1 tháng theo hình thức lãi kép, lãi suất 0,58% một tháng (kể từ tháng thứ hai trở đi, tiền lãi được tính theo phần trăm của tổng tiền gốc và tiền lãi tháng trước đó). Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì người đó có tối thiểu 225 triệu đồng trong tài khoản tiết kiệm, biết rằng ngân hàng chỉ tính lãi khi đến kì hạn?

- A.** 21 tháng. **B.** 24 tháng. **C.** 22 tháng. **D.** 30 tháng.

Lời giải

Chọn A

Theo hình thức lãi kép, sau n tháng tổng số tiền cả gốc lẫn lãi mà người đó nhận được trong tài khoản là $A = 200(1 + 0,58\%)^n = 200 \cdot (1,0058)^n$ (triệu đồng).

$$A \geq 225 \Leftrightarrow 200 \cdot 1,0058^n \geq 225 \Leftrightarrow 1,0058^n \geq \frac{9}{8}$$

Theo bài ra thì :

$$\Leftrightarrow n \geq \log_{1,0058} \frac{9}{8} \approx 20,37$$

Vì ngân hàng chỉ tính lãi khi đến kì hạn nên phải sau ít nhất 21 tháng người đó mới có tối thiểu 225 triệu đồng trong tài khoản.

Câu 71. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội - 2021) Một người gửi tiết kiệm 200 triệu đồng với lãi suất 5% một năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Sau ít nhất bao nhiêu năm nhận được số tiền nhiều hơn 300 triệu đồng.

- A.** 8 (năm). **B.** 9 (năm). **C.** 10 (năm). **D.** 11 (năm).

Lời giải

Chọn B

Số tiền người đó nhận được sau n năm là $A = 200 \cdot 1,05^n$ (triệu đồng)

$$\text{Để nhận được số tiền nhiều hơn 300 triệu đồng} \Rightarrow A = 200 \cdot 1,05^n > 300 \\ \Rightarrow 1,05^n > 1,5 \Leftrightarrow n > \log_{1,05} 1,5 \Leftrightarrow n > 8,3 \text{ (năm).}$$

Vậy sau ít nhất 9 năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 300 triệu đồng.

Câu 72. (THPT Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Ông An gửi 100 triệu vào tiết kiệm ngân hàng theo thể thức lãi kép trong một thời gian khá lâu mà không rút ra với lãi suất ổn định trong mấy chục năm qua là 10%/1 năm. Tết năm nay do ông kẹt tiền nên rút hết ra để gia đình đón Tết. Sau khi rút cả vốn lẫn lãi, ông trích ra gần 10 triệu để sắm sửa đồ Tết trong nhà thì ông còn 250 triệu. Hỏi ông đã gửi tiết kiệm bao nhiêu lâu?

- A.** 10 năm **B.** 17 năm **C.** 15 năm **D.** 20 năm

Lời giải

Chọn A

Số tiền ông An tích lũy được gồm cả vốn và lãi là 260 triệu

Công thức tính lãi kép $A_n = A(1+r)^n$

$$\Leftrightarrow 260.10^6 = 100.10^6 (1+10\%)^n$$

$$\Leftrightarrow n = 10$$

Câu 73. Một học sinh A khi 15 tuổi được hưởng tài sản thừa kế 200 000 000 VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong ngân hàng B với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh A chỉ nhận được số tiền này khi 18 tuổi. Biết rằng khi 18 tuổi, số tiền mà học sinh A được nhận sẽ là 231 525 000 VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn một năm của ngân hàng B là bao nhiêu?

A. 8%/ năm.

B. 7%/ năm.

C. 6%/ năm.

D. 5%/ năm.

Lời giải

Ta có: số tiền nhận được của gốc và lãi là: $200\,000\,000(1+r)^3 = 231\,525\,000$

$$\Leftrightarrow r = 5\%/năm$$

Câu 74. (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Số ca nhiễm Covid – 19 trong cộng đồng ở một tỉnh vào ngày thứ x trong một giai đoạn được ước tính theo công thức $f(x) = A.e^{rx}$ trong đó A là số ca nhiễm ở ngày đầu của giai đoạn, r là tỷ lệ gia tăng số ca nhiễm hàng ngày của giai đoạn đó và trong cùng một giai đoạn thì r không đổi. Giai đoạn thứ nhất tính từ ngày tính đó có 9 ca bệnh đầu tiên và không dùng biện pháp phòng chống lây nhiễm nào thì đến ngày thứ 6 số ca bệnh của tỉnh là 180 ca. Giai đoạn thứ hai (kể từ ngày thứ 7 trở đi) tỉnh đó áp dụng các biện pháp phòng chống lây nhiễm nên tỷ lệ gia tăng số ca nhiễm hàng ngày giảm đi 10 lần so với giai đoạn trước. Đến ngày thứ 6 của giai đoạn hai thì số ca mắc bệnh của tỉnh đó gần nhất với số nào sau đây?

A. 242.

B. 16.

C. 90.

D. 422.

Lời giải

Chọn A

* Giai đoạn 1:

$$180 = 9.e^{r.6} \Rightarrow r = \frac{1}{6} \ln 20$$

Ta có:

* Giai đoạn 2:

$$\text{Đến ngày thứ 6 số ca mắc bệnh của tỉnh là } f(x) = 180.e^{\frac{r}{10}.6} = 242$$

Câu 75. (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = A.e^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Dân số Việt Nam năm 2019 là $95,5$ triệu người, tỉ lệ tăng dân số hằng năm từ 2009 đến nay là $1,14\%$. Hỏi dân số Việt Nam năm 2009 gần với số nào nhất trong các số sau?

- A. $94,4$ triệu người. B. $85,2$ triệu người. C. $86,2$ triệu người. D. $83,9$ triệu người.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $S = A.e^{ni}$ trong đó: $S = 95,5$ triệu người, $n = 10$ năm, $i = 1,14\%$

$$A = \frac{S}{e^{ni}} = \frac{95,5}{e^{10 \cdot 1,14\%}} \approx 85,2 \text{ triệu người}$$

Câu 76. (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Ông An dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất không đổi là 7% một năm. Biết rằng cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm kế tiếp. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) ông An gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy giá trị 45 triệu đồng.

- A. 200. B. 190. C. 250. D. 150.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $P = P_0(1+r)^n$.

$$P = x(1+0,07)^3.$$

Số tiền ông An có được sau 3 năm là:

$$P - x = x(1+0,07)^3 - x = x((1+0,07)^3 - 1).$$

Tiền lãi ông An có được sau 3 năm là:

$$x((1+0,07)^3 - 1) = 45 \Leftrightarrow x \approx 199,96$$

Số tiền lãi trên là 45 triệu đồng nên:

Câu 77. Số lượng loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0).2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu kể từ lúc ban đầu, số lượng loại vi khuẩn A là 20 triệu con.

- A. 7 phút. B. 12 phút. C. 48 phút. D. 8 phút.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết ta có: $s(3) = 625000 \Leftrightarrow s(0).2^3 = 625000 \Leftrightarrow s(0) = 78125$.

Số lượng loại vi khuẩn A là 20 triệu con khi

$$s(t) = 20000000 \Leftrightarrow s(0).2^t = 20000000 \Leftrightarrow 2^t = \frac{20000000}{s(0)} = \frac{20000000}{78125} = 256 \Leftrightarrow t = 8$$

Vậy, sau 8 phút thì số lượng vi khuẩn A là 20 triệu con.

Câu 78. (Mã 101 - 2021 Lần 1) Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(3^{x^2} - 9^x)[\log_3(x+25) - 3] \leq 0$?

- A. 24. B. Vô số. C. 26. D. 25.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x + 25 > 0 \Leftrightarrow x > -25$.

Ta giải các phương trình:

$$3^{x^2} = 9^x \Leftrightarrow x^2 = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\log_3(x + 25) = 3 \Leftrightarrow x + 25 = 27 \Leftrightarrow x = 2$$

Ta có bảng xét dấu sau:

x	-25	0	2	$+\infty$		
$3^{x^2} = 9^x$		$+$	0	$-$	0	$+$
$\log_3(x+25)-3$		$-$		$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, để $(3^{x^2} - 9^x)[\log_3(x + 25) - 3] \leq 0$ thì ta có

$$\begin{cases} -25 < x \leq 0 \\ x = 2 \end{cases} \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} \begin{cases} -24 \leq x \leq 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

có 26 giá trị nguyên của x thỏa mãn.

$$(3^{x^2} - 9^x)[\log_2(x + 30) - 5] \leq 0$$

Câu 79. (Mã 102 - 2021 Lần 1) Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn

A. 30.

B. Vô số.

C. 31.

D. 29.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số: $f(x) = (3^{x^2} - 9^x)[\log_2(x + 30) - 5]$, với $x > -30$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2} - 9^x = 0 \\ \log_2(x + 30) - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2} = 3^{2x} \\ x + 30 = 2^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Cho:

Ta có bảng xét dấu như sau:

x	-30	0	2	$+\infty$	
$3^{x^2}-9^x$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\log_2(x+30)-5$	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -30 < x \leq 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Suy ra

Mặt khác $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-29; -28; -27; \dots; -2; -1; 0; 2\}$.

Vậy có 31 số nguyên x thỏa mãn.

$$(2^{x^2} - 4^x)[\log_3(x + 25) - 3] \leq 0$$

Câu 80. (Mã 104 - 2021 Lần 1) Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn

A. 24.

B. Vô số.

C. 25.

D. 26.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > -25$.

$$(2^{x^2} - 4^x)[\log_3(x+25) - 3] \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2} - 4^x \geq 0 \\ \log_3(x+25) - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2} - 4^x \leq 0 \\ \log_3(x+25) - 3 \geq 0 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $\begin{cases} 2^{x^2} - 4^x \geq 0 \\ \log_3(x+25) - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x+25 \leq 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases}$

Vì $x > -25$ nên ta có: $\begin{cases} -25 < x \leq 0 \\ x = 2 \end{cases}$ mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-24, -23, \dots, -1, 0, 2\}$ (1)

Trường hợp 2: $\begin{cases} 2^{x^2} - 4^x \leq 0 \\ \log_3(x+25) - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \leq 0 \\ x+25 \geq 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có 26 số nguyên x thỏa mãn $(2^{x^2} - 4^x)[\log_3(x+25) - 3] \leq 0$

GVPB đề xuất

ĐK: $x > -25$

Xét $2^{x^2} - 4^x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Xét $\log_3(x+25) = 3 \Leftrightarrow x+25 = 27 \Leftrightarrow x = 2$

Ta có bảng xét dấu:

x	-25	0	2	$+\infty$	
$2^{x^2}-4^x$	+	0	-	0	+
$\log_3(x+25)-3$	-		-	0	+
VT	-	0	+	0	+

Dựa vào bảng xét dấu ta có: BPT $\Leftrightarrow \begin{cases} -25 < x \leq 0 \\ x = 2 \end{cases}$

x nguyên nên có 26 giá trị thỏa mãn bài toán.

Câu 81. (Mã 103 - 2021 - Lần 1) Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(2^{x^2} - 4^x)[\log_2(x+14) - 4] \leq 0$?

A. 14.

B. 13.

C. Vô số.

D. 15.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x > -14$.

Bất phương trình tương đương: $(2^{x^2} - 2^{2x})[\log_2(x+14) - 4] \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2} - 2^{2x} \geq 0 \\ \log_2(x+14) - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2} \geq 2^{2x} \\ \log_2(x+14) \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 2x \\ x+14 \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2} - 2^{2x} \leq 0 \\ \log_2(x+14) - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2} \leq 2^{2x} \\ \log_2(x+14) \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 2x \\ x+14 \geq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện suy ra có 15 giá trị nguyên của x thỏa yêu cầu.

Câu 82. (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m

với $m < 64$ để phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(x+m) + \log_5(2-x) = 0$ có nghiệm. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

A. 2018.

B. 2016.

C. 2015.

D. 2013.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_{\frac{1}{5}}(x+m) + \log_5(2-x) = 0 \Leftrightarrow \log_5(x+m) = \log_5(2-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x = \frac{2-m}{2} \end{cases}$

Vì $x < 2$ nên $\frac{2-m}{2} < 2 \Leftrightarrow m > -2$.

Kết hợp với $m < 64$. Khi đó $-2 < m < 64$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = \{-1; 0; 1 \dots 63\}$ có 65 giá trị.

Vậy tổng S các giá trị của m để phương trình có nghiệm là: $S = \frac{(-1+63).65}{2} = 2015$.

Câu 83. (Mã 102 2019) Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(6x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(6x-1) = -\log_3 m$.

Điều kiện: $\begin{cases} x > \frac{1}{6} \\ m > 0 \end{cases}$.

Khi đó

$$\log_9 x^2 - \log_3(6x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 x + \log_3 m = \log_3(6x-1)$$

$$\Leftrightarrow mx = 6x-1 \Leftrightarrow x(6-m) = 1 \quad (1)$$

+) Với $m=6$, phương trình (1) trở thành $0=1$ (vô lý).

+) Với $m \neq 6$, phương trình (1) có nghiệm $x = \frac{1}{6-m}$

$$\Rightarrow \frac{1}{6-m} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6-m} - \frac{1}{6} > 0 \Leftrightarrow \frac{m}{6-m} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 6$$

Vậy $0 < m < 6$. Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 84. (THPT Nguyễn Viết Xuân – Vĩnh Phúc – 2022) Cho phương trình

$\log_3 \frac{2x-1}{27x^2-54x+9m} = 3x^2-8x+m-1$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt thuộc $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Tổng các phần tử của S bằng:

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Do ta xét nghiệm của phương trình thỏa $x > \frac{1}{2} \Rightarrow 2x-1 > 0$ nên $27x^2-54x+9m > 0$.

Đặt
$$\begin{cases} T = 2x-1 \\ M = 27x^2-54x+9m = 9(3x^2-6x+m) \end{cases}$$

Khi đó phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_3 \frac{T}{M} = \frac{M}{9} - T - 2 \Leftrightarrow \log_3 \frac{9T}{M} = \frac{M}{9} - T$

$$\Leftrightarrow \log_3 9T + T = \log_3 \left[9 \left(\frac{M}{9} \right) \right] + \left(\frac{M}{9} \right) (*)$$

Xét hàm $f(t) = \log_3 t + \frac{t}{9}$ với $t > 0$. Dễ dàng chứng minh $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$(*) \Leftrightarrow T = \frac{M}{9} \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \underbrace{3x^2 + 8x}_{g(x)} - 1, \forall x > \frac{1}{2}$$

Do đó

Ta có: $g'(x) = 6x + 8$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ ta có:

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$g(x)$	$\frac{9}{4}$	$\frac{13}{3}$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{9}{4} < m < \frac{13}{3}$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{3; 4\}$.

Vậy tổng phần tử của tập S là $3 + 4 = 7$.

Câu 85. (Sở Thái Nguyên 2023) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2023; 2023]$ để phương trình $(x^2 - 1) \cdot \log^2(x^2 + 1) - m\sqrt{2(x^2 - 1)} \cdot \log(x^2 + 1) + m + 4 = 0$ có đúng hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $1 \leq |x_1| \leq |x_2| \leq 3$?

A. 4040.

B. 2025.

C. 2023.

D. 4035.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $|x| \geq 1$.

Nhận xét: x_0 là nghiệm thì $-x_0$ cũng là nghiệm. Do vậy, ta chỉ xét với $x \geq 1$.

Đặt

$$t = \sqrt{2(x^2 - 1)} \cdot \log(x^2 + 1) \Rightarrow t' = \frac{2x}{\sqrt{2(x^2 - 1)}} \log(x^2 + 1) + \sqrt{2(x^2 - 1)} \cdot \frac{2x}{(x^2 + 1) \cdot \ln 10} > 0, \forall x > 1$$

Hàm t đồng biến trên $[1; +\infty)$ và $t \in [0; +\infty)$.

Như vậy, với mỗi giá trị của t chỉ cho duy nhất một giá trị của x .

Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 2mt + 2m + 8 = 0(*)$, $t \in [0; +\infty)$.

YCBT $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm duy nhất trên $[0; 4]$.

$$(*) \Leftrightarrow 2m(t - 1) = t^2 + 8 \Leftrightarrow 2m = \frac{t^2 + 8}{t - 1} = t + 1 + \frac{9}{t - 1}, (t \neq 1)$$

Xét hàm số: $f(t) = t + 1 + \frac{9}{t-1} \Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{9}{(t-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -2 \end{cases}$

t	0	1	4
$f'(t)$		-	-
$f(t)$	-8	$+\infty$	8

Từ BBT, ta được: $\begin{cases} 2m \leq -8 \\ 2m \geq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ m \geq 4 \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2023; -2022; \dots; -4; 4; \dots; 2022; 2023\}$

Vậy có 4040 số.

Câu 86. (Mã 102 2018) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x - m \cdot 5^{x+1} + 7m^2 - 7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử.

- A. 7 B. 1 C. 2 D. 3

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $25^x - m \cdot 5^{x+1} + 7m^2 - 7 = 0$ (1)

Đặt $t = 5^x$ ($t > 0$). Phương trình trở thành $t^2 - 5mt + 7m^2 - 7 = 0$ (2)

YCBT $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $t_1, t_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25m^2 - 4(7m^2 - 7) > 0 \\ 5m > 0 \\ 7m^2 - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2; 3\}$. Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 87. (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ An 2019) Phương trình

$(2 + \sqrt{3})^x + (1 - 2a)(2 - \sqrt{3})^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$. Khi đó a thuộc khoảng

- A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$ B. $(0; +\infty)$ C. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ D. $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$

Lời giải

Đặt $t = (2 + \sqrt{3})^x$, $t > 0$

Phương trình trở thành $t + \frac{1-2a}{t} - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 - 2a = 0$ (1)

GT: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3 \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{x_1-x_2} = 3$

Khi đó $t_1 = 3t_2$

YCBT $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt thỏa mãn $t_1 = 3t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 > 0; t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 = 4 \\ t_1 t_2 = 1 - 2a \\ t_1 = 3t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2a > 0 \\ t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \\ t_1 t_2 = 1 - 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > -\frac{3}{2} \\ a = -1 \end{cases}$$

Câu 88. (Mã 103 -2019) Cho phương trình $(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1)\sqrt{5^x - m} = 0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

- A. Vô số. B. 124. C. 123. D. 125.

Lời giải

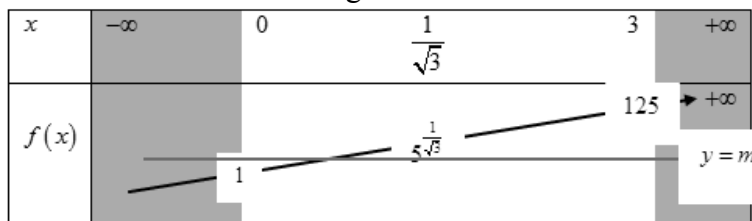
Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 5^x - m \geq 0 \ (m > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq \log_5 m \end{cases}$

$$(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1)\sqrt{5^x - m} = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_3^2 x - \log_3 x - 1 = 0 \\ 5^x - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ f(x) = 5^x = m \end{cases}$$

Xét $f(x) = 5^x$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.



Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì

$$\begin{cases} m = 1 \\ 5^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \leq m < 125 \end{cases}, m \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow \begin{cases} 0 < m \leq 1 \\ 3 \leq m \leq 124 \end{cases}$$

Nên có 123 giá trị m thỏa mãn.

Câu 89. (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019) Cho a là số thực dương, $a \neq 1$. Biết bất phương trình $2\log_a x \leq x - 1$ nghiệm đúng với mọi $x > 0$. Số a thuộc tập hợp nào sau đây?

- A. $(7; 8)$ B. $(3; 5]$ C. $(2; 3)$ D. $(8; +\infty)$

Lời giải

Chọn A

Ta có: với $x = 1$ thì $2\log_a 1 = 0 = 1 - 1$

Ta sẽ tìm a để đường thẳng $y = x - 1$ nhận làm tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2 \log_a x$ tại điểm $x = 1$

Có $y' = \frac{2}{x \ln a} \Rightarrow y'(1) = \frac{2}{\ln a}$

Phương trình tiếp tuyến $y = \frac{2}{\ln a}(x - 1)$

Vậy để đường thẳng $y = x - 1$ nhận làm tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2 \log_a x$ thì $\frac{2}{\ln a} = 1 \Leftrightarrow \ln a = 2 \Leftrightarrow a = e^2$

$$2 \log_{e^2} x \leq x - 1 \Leftrightarrow \ln x \leq x - 1$$

Thử lại $a = e^2$ ta sẽ chứng minh $\Leftrightarrow f(x) = \ln x - x + 1 \leq 0 \quad \forall x > 0$

Có $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$			-

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq x - 1 \quad \forall x > 0$

Câu 90. (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $4^{x-1} - m(2^x + 1) > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

B. $m \in (-\infty; 0]$

C. $m \in (0; +\infty)$

D. $m \in (0; 1)$

Lời giải

Bất phương trình $4^{x-1} - m(2^x + 1) > 0 \quad (1)$

Đặt $t = 2^x, t > 0$.

Bất phương trình (1) trở thành: $\frac{1}{4}t^2 - m(t + 1) > 0 \Leftrightarrow t^2 - 4mt - 4m > 0 \quad (2)$

$f(t) = t^2 - 4mt - 4m$

Đặt

Đồ thị hàm số $y = f(t)$ có đồ thị là một Parabol với hệ số a dương, đỉnh $I(2m; -4m^2 - 4m)$.

Bất phương trình ⁽¹⁾ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Bất phương trình ⁽²⁾ nghiệm đúng với mọi $t > 0$ hay $f(t) > 0, \forall t > 0$.

TH1: $m \leq 0 \Rightarrow f(0) = -4m \geq 0 \Rightarrow m \leq 0$ thỏa mãn.

TH2: $m > 0 \Rightarrow -4m^2 - 4m < 0$ nên $m > 0$ không thỏa mãn.

Vậy $m \leq 0$.

Câu 91. (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Tìm m để bất phương trình $2^x + 3^x + 4^x + 5^x \geq 4 + mx$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $\ln 120$.

B. $\ln 10$.

C. $\ln 30$.

D. $\ln 14$.

Lời giải

+ Với $a > 1$ ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \right) \cdot \ln a = \ln a$

+ Với $a > 1$ xét hàm số $f(x) = \frac{a^x - 1}{x} (x \neq 0)$, ta có $f'(x) = \frac{xa^x \ln a - a^x + 1}{x^2}$.

Xét hàm số $g(x) = xa^x \ln a - a^x + 1 \Rightarrow g'(x) = a^x \ln a + xa^x \ln^2 a - a^x \ln a = xa^x \ln^2 a$.

Với $x > 0$ ta có $g'(x) > 0$ suy ra $g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x > 0$.

Với $x < 0$ ta có $g'(x) < 0$ suy ra $g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x < 0$.

Do đó hàm số $f(x) = \frac{a^x - 1}{x} (a > 1)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Trở lại bài toán:

+ Xét $x = 0$ bất phương trình thỏa mãn.

+ Xét $x > 0$ ta có: $2^x + 3^x + 4^x + 5^x \geq 4 + mx \Leftrightarrow m \leq \frac{2^x - 1}{x} + \frac{3^x - 1}{x} + \frac{4^x - 1}{x} + \frac{5^x - 1}{x} = h(x)$

Từ nhận xét trên ta có $h(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Do đó yêu cầu của bài toán tương đương với $m \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 = \ln 120$

+ Xét $x < 0$ ta có: $2^x + 3^x + 4^x + 5^x \geq 4 + mx \Leftrightarrow m \geq \frac{2^x - 1}{x} + \frac{3^x - 1}{x} + \frac{4^x - 1}{x} + \frac{5^x - 1}{x} = h(x)$

Từ nhận xét trên ta có $h(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$. Do đó yêu cầu của bài toán tương đương với $m \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 = \ln 120$

Kết hợp lại ta có $m = \ln 120$.

Câu 92. (Đề Tham Khảo 2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	0	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) < e^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi.

- A. $m > f(-1) - \frac{1}{e}$ B. $m \geq f(-1) - \frac{1}{e}$ C. $m > f(1) - e$ D. $m \geq f(1) - e$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) < e^x + m \Leftrightarrow m > f(x) - e^x$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - e^x; g'(x) = f'(x) - e^x < 0 \forall x \in (-1; 1)$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 1)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq \max g(x) = g(-1) = f(-1) - \frac{1}{e}$, chọn **C**.

Câu 93. (Chuyên Thái Bình 2023) Số giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$2^{2x^2+2x-2} - 2^{x^2+4x+m} - 2^{x^2-2x-m} + 4 < 0$ có không quá 6 nghiệm nguyên là

- A. 7.
B. 4.
C. 10.
D. 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{2x^2+2x-2} - 2^{x^2+4x+m} - 2^{x^2-2x-m} + 4 < 0$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2+4x+m} (2^{x^2-2x-2-m} - 1) - 4(2^{x^2-2x-m-2} - 1) < 0 \Leftrightarrow (2^{x^2-2x-2-m} - 1)(2^{x^2+4x+m} - 4) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 2 - m)(x^2 + 4x + m - 2) < 0$$

$$\Leftrightarrow P(x) = [(x-1)^2 - (m+3)][(x+2)^2 - (6-m)] < 0$$

TH1: Nếu $-(m+3) > 0 \Rightarrow S_{x+2} = (-\sqrt{6-m}; \sqrt{6-m})$ chứa tối đa 6 số nguyên là các số $0, \pm 1, \pm 2 \Leftrightarrow \sqrt{6-m} \leq 3 \quad (L)$

TH2: Nếu $-(6-m) > 0 \Rightarrow S_{x-1} = (-\sqrt{m+3}; \sqrt{m+3})$ chứa tối đa 6 số nguyên là các số $0, \pm 1, \pm 2 \Leftrightarrow \sqrt{m+3} \leq 3 \quad (L)$

TH3: Nếu $-3 \leq m \leq 6$ thử trực tiếp nhận tất cả các số nguyên $m \in \{-3, \dots, 6\}$.

Câu 94. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2)$?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

$$t = \log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2) \Rightarrow \begin{cases} x+y=3^t \\ x^2+y^2=4^t \end{cases} \quad (1)$$

Đặt

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$9^t = (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) = 4^t \Rightarrow \frac{9^t}{4^t} \leq 2 \Rightarrow t \leq \log_{\frac{9}{2}} 2$$

Như vậy,

$$x^2+y^2=4^t \Rightarrow x^2 \leq 4^t \leq 4^{\log_{\frac{9}{2}} 2} \approx 1,89 \Rightarrow x \in [-1; 0; 1]$$

➤ Trường hợp 1:

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t \\ y^2=4^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ y=1 \end{cases}$$

➤ Trường hợp 2:

$$x=1 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t-1 \\ y^2=4^t-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ y=0 \end{cases}$$

➤ Trường hợp 3:

$$x=-1 \Rightarrow \begin{cases} y=3^t+1 \\ y^2+1=4^t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ y=3^t+1 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 \geq 5$$

mâu thuẫn với

$$x^2+y^2 \leq 4^{\log_{\frac{9}{2}} \sqrt{2}} \text{ suy ra loại } x=-1.$$

Vậy có hai giá trị $x \in \{0; 1\}$

Cách 2:

$$t = \log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2) \Rightarrow \begin{cases} x+y=3^t \\ x^2+y^2=4^t \end{cases} \quad (1)$$

Đặt

Suy ra x, y là tọa độ của điểm M với M thuộc đường thẳng $d: x+y=3^t$ và đường tròn $(C): x^2+y^2=4^t$

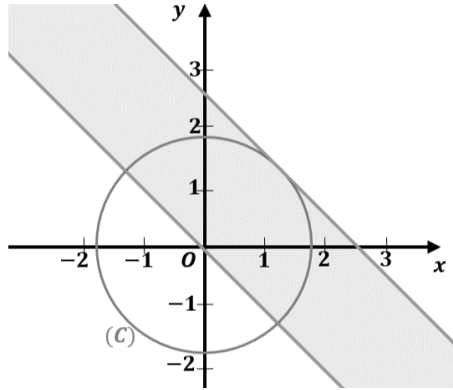
Để tồn tại y tức tồn tại M nên $d, (C)$ có điểm chung, suy ra $d(O, d) \leq R$ trong đó

$$O(0;0), R=2^t \text{ nên } \frac{|-3^t|}{\sqrt{2}} \leq 2^t \Leftrightarrow t \leq \log_{\frac{3}{2}} \sqrt{2}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} 0 < x+y \leq 3^{\log_3 \sqrt{2}} \\ x^2 + y^2 \leq 4^{\log_3 \sqrt{2}} \end{cases}$$

Khi đó

Minh họa quỹ tích điểm M như hình vẽ sau



Ta thấy có 3 giá trị $x \in \mathbb{Z}$ có thể thỏa mãn là $x = -1; x = 0; x = 1$.
Thử lại:

➤ Trường hợp 1: $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 3^t \\ y^2 = 4^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

➤ Trường hợp 2: $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 3^t - 1 \\ y^2 = 4^t - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

➤ Trường hợp 3: $x = -1 \Rightarrow \begin{cases} y = 3^t + 1 \\ y^2 + 1 = 4^t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ y = 3^t + 1 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 5$ mâu thuẫn với $x^2 + y^2 \leq 4^{\log_3 \sqrt{2}}$ suy ra loại $x = -1$.

Câu 95. (Sở Thái Bình 2023) Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho tồn tại số thực y lớn hơn 1

thỏa mãn $(xy^2 + x - 2y - 5) \ln y = \ln \frac{2y - x + 7}{x}$?

A. 3.

B. 5.

C. 4.
Lời giải

D. Vô số.

Điều kiện: $2y - x + 7 > 0 \Leftrightarrow y > \frac{x-7}{2} (*)$

$$(xy^2 + x - 2y - 5) \ln y = \ln \frac{2y - x + 7}{x} \Leftrightarrow \frac{2y - x + 7}{x} = e^{(xy^2 + x - 2y - 5) \ln y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y - x + 7}{x} = y^{xy^2 + 2 - (2y - x + 7)}$$

$$\Leftrightarrow (2y - x + 7) \cdot y^{2y - x + 7} = xy^2 \cdot y^{xy^2} (1)$$

Xét $f(t) = t \cdot y^t$ thì ta dễ chứng minh được hàm số này đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

$$2y - x + 7 = xy^2 \Leftrightarrow xy^2 - 2y + x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2y + 7}{y^2 + 1}$$

Suy ra (1) tương đương:

Xét hàm số $f(y) = \frac{2y + 7}{y^2 + 1}; \forall y \in (1; +\infty)$. Ta thấy, $y \in (1; +\infty) \Rightarrow 0 < f(y) < \frac{9}{2}$

$$\Rightarrow 0 < x < \frac{9}{2} \Rightarrow x \in \{1; 2; 3; 4\}.$$

Câu 96. (Sở Sóc Trăng 2023) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $4^{x+y+1} = 3^{x^2+y^2}$?

A. 5.

B. 3.

C. 6.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$4^{x+y+1} = 3^{x^2+y^2} \Leftrightarrow (x+y+1)\log_3 4 = x^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow y^2 - 2(\log_3 2)y + x^2 - 2(x+1)\log_3 2 = 0$$

Để tồn tại số thực y khi và chỉ khi $\Delta' = (\log_3 2)^2 + 2(x+1)\log_3 2 - x^2 \geq 0$?

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x\log_3 2 + (\log_3 2)^2 \geq 0 \Rightarrow -0,8036 \leq x \leq 2,0655$$

$$\text{Do } x \in \mathbf{Z} \Rightarrow x \in \{0; 1; 2\}$$

Câu 97. (Mã 102 - 2020 Lần 1) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2 + y) \geq \log_3(x + y)$?

A. 55.

B. 28.

C. 29.

D. 56.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 + y > 0 \\ x + y > 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \log_3(x + y) = t, \text{ ta có } \begin{cases} x^2 + y \geq 4^t \\ x + y = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \geq 4^t - 3^t \\ y = 3^t - x \end{cases} (*)$$

Nhận xét rằng hàm số $f(t) = 4^t - 3^t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và $f(t) > 0$ với mọi $t > 0$

Gọi $n \in \mathbf{Z}$ thỏa $4^n - 3^n = x^2 - x$, khi đó $(*) \Leftrightarrow \boxed{t \leq n}$

Từ đó, ta có $-x < y = 3^t - x \leq 3^n - x$.

Mặt khác, vì có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn đề bài nên $3^n \leq 242 \Leftrightarrow n \leq \log_3 242$.

$$\text{Từ đó, suy ra } \boxed{x^2 - x \leq 4^{\log_3 242} - 242} \Leftrightarrow \boxed{-27,4 \leq x \leq 28,4}$$

Mà $x \in \mathbf{Z}$ nên $x \in \{-27, -26, \dots, 27, 28\}$.

Vậy có 56 giá trị nguyên của x thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 98. (Mã 103 - 2020 Lần 1) Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y)$?

A. 89.

B. 46.

C. 45.

D. 90.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y) \quad (1)$

Đặt $t = x + y \in \mathbb{N}^*$ (do $x, y \in \mathbb{Z}, x + y > 0$)

$$(1) \Leftrightarrow \log_3(x^2 - x + t) \geq \log_2 t \Leftrightarrow g(t) = \log_2 t - \log_3(x^2 - x + t) \leq 0 \quad (2)$$

Đạo hàm $g'(t) = \frac{1}{t \ln 2} - \frac{1}{(x^2 - x + t) \ln 3} > 0$ với mọi y . Do đó $g(t)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$

Vì mỗi x nguyên có không quá 127 giá trị $t \in \mathbb{N}^*$ nên ta có

$$g(128) > 0 \Leftrightarrow \log_2 128 - \log_3(x^2 - x + 128) > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 128 < 3^7 \Leftrightarrow -44,8 \leq x \leq 45,8$$

Như vậy có 90 giá trị thỏa yêu cầu bài toán

Câu 99. (THPT Cù My Phong – Bắc Ninh 2023) Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $\frac{-2x+4y}{x^2+y^2+1} \geq 1$ và $32 \left(2^{x-y} + \frac{x-y+5}{2^y} \right) \leq 1$. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $T = x^2 + y^2 - 4x - 4y$ lần lượt là M, m . Tổng $M + m$ bằng

A. 22.

B. 12.

C. - 22.

D. - 12.

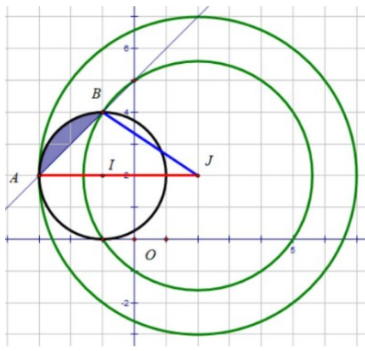
Lời giải

Chọn A

Xét $\frac{-2x+4y}{x^2+y^2+1} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 \leq 0 \Rightarrow N(x; y)$ thuộc hình tròn tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R = 2$.

$32 \left(2^{x-y} + \frac{x-y+5}{2^y} \right) \leq 1 \Leftrightarrow 2^x + x \leq 2^{y-5} + y - 5 \Leftrightarrow x \leq y - 5 (*) \Rightarrow N(x; y)$ thuộc miền nghiệm của (*).

Khi đó, điểm $N(x; y)$ thuộc phần hình tròn tô màu (như hình vẽ)



Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \\ y = x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3; y = 2 \Rightarrow A(-3; 2) \\ x = -1; y = 4 \Rightarrow B(-1; 4) \end{cases}$$

$T = x^2 + y^2 - 4x - 4y \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = T + 8 > 0$. Điểm $N(x; y)$ thuộc đường tròn tâm $J(2; 2)$, bán kính $R' = \sqrt{T + 8}; JA^2 = 25, JB^2 = 13$.

Như vậy, ta được $JB^2 \leq T + 8 \leq JA^2 \Leftrightarrow 5 \leq T \leq 17$.

$T_{\max} = 17 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}; T_{\min} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$. Vậy, $M + m = 22$.

Câu 100. (Sở Trà Vinh 2023) Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $y \leq 2023$ và $3(9^x + 2x) \leq y + \log_3(y + 1)^3 - 2$?

A. 3776.

B. 10.

C. 2023.

D. 3780.

Lời giải

Chọn D

Với x, y là các số nguyên dương, ta có:

$$\begin{aligned} 3(9^x + 2x) &\leq y + \log_3(y + 1)^3 - 2 \\ \Leftrightarrow 3^{2x+1} + 3(2x + 1) &\leq 3^{\log_3(y+1)} + 3\log_3(y + 1) (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + 3t$, với $t > 0$

Ta có: $f'(t) = 3^t \ln 3 + 3 > 0, \forall t > 0$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Từ $(*) \Leftrightarrow f(2x + 1) \leq f(\log_3(y + 1)) \Leftrightarrow 2x + 1 \leq \log_3(y + 1) \Leftrightarrow y \geq 3^{2x+1} - 1$.

Theo bài ra: $y \leq 2023 \Rightarrow 3^{2x+1} - 1 \leq 2023 \Leftrightarrow x \leq \frac{\log_3 2024 - 1}{2} \approx 2,96$

Vì x là số nguyên dương nên $x \in \{1; 2\}$.

Xét $x = 1$ khi đó $y \geq 3^{2 \cdot 1 + 1} - 1 = 26$, có 1998 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Xét $x = 2$ khi đó $y \geq 3^{2 \cdot 2 + 1} - 1 = 242$, có 1782 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Vậy có $1998 + 1782 = 3780$ cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 101. (Cụm Thuận Thành - Bắc Ninh 2023) Có bao nhiêu cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $\log_4(x^2 + y^2 + 12y) + \log_3(x^2 + y^2) \leq \log_4 y + \log_3[3(x^2 + y^2 + 8y)]$?

A. 15.

B. 13.

C. 14.

D. 12.

Lời giải

Chọn D

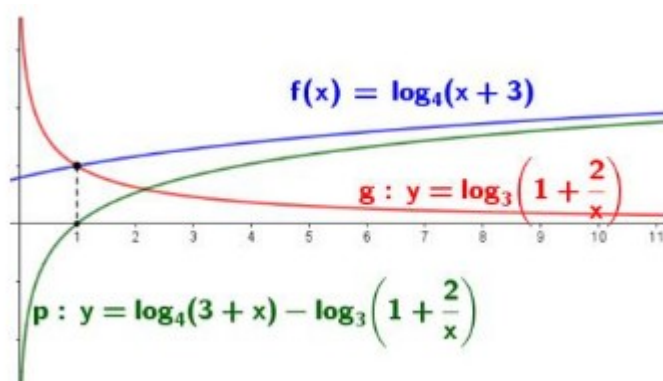
Điều kiện: $y > 0$.

Bất phương trình
$$\Leftrightarrow \log_4 \left(\frac{x^2 + y^2 + 12y}{4y} \right) \leq \log_3 \left(\frac{x^2 + y^2 + 8y}{x^2 + y^2} \right)$$

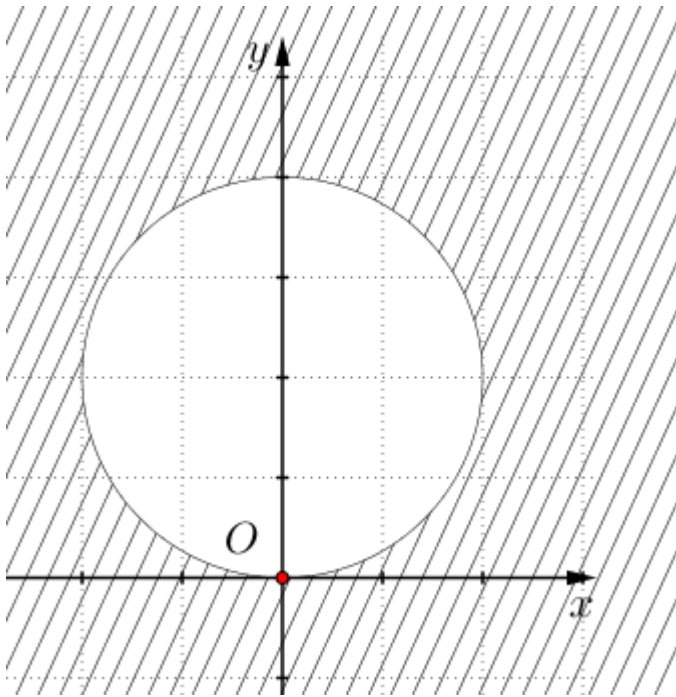
Đặt $t = \frac{x^2 + y^2}{4y} > 0$, bất phương trình trở thành:
$$\log_4(t+3) \leq \log_3 \left(1 + \frac{2}{t} \right)$$

$$\Leftrightarrow \log_4(t+3) - \log_3 \left(1 + \frac{2}{t} \right) \leq 0 (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_4(t+3) - \log_3 \left(1 + \frac{2}{t} \right)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và $f(1) = 0$.



Dựa đồ thị, bất phương trình (*) suy ra $t \leq 1 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{4y} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y \leq 0$ có tập hợp điểm là hình tròn tâm $I(0; 2)$, bán kính $R = 2$.



Từ hình tròn, ta nhận thấy có 12 cặp số nguyên (x, y) , với $y > 0$.