

Chuyên đề 8. PHÉP CHIA HẾT TRÊN TẬP HỢP SỐ NGUYÊN

A. Kiến thức cần nhớ

1. Khái niệm: Cho a, b là hai số nguyên và b khác 0. Ta nói a chia hết cho b nếu tồn tại số nguyên q sao cho $a = bq$.

Khi a chia hết cho b thì ta nói b là ước của a hay b chia hết a ; a là bội của b .

Lưu ý: Khi a chia hết cho b thì a cũng chia hết cho $-b$.

2. Một số tính chất thường dùng

a) Nếu a chia hết cho b , b chia hết cho c thì a chia hết cho c .

b) Nếu a, b chia hết cho m thì $ax + by$ cũng chia hết cho m (x, y là số nguyên)

c) Nếu a chia hết cho tích $m.n$ thì a chia hết cho m , a chia hết cho n . (điều ngược lại không đúng)

d) Nếu a chia hết cho m, n với $(m, n) = 1$ thì a chia hết cho tích mn .

e) Nếu tích $a.b$ chia hết cho m mà $(b, m) = 1$ thì a chia hết cho m .

f) Cho p là số nguyên tố. Khi đó, nếu tích ab chia hết cho p thì a chia hết cho p hoặc b chia hết cho p .

g) Khi chia $n + 1$ số nguyên dương liên tiếp cho n ($n > 0$) luôn nhận được hai số dư bằng nhau.

h) Tích của n số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho n ($n > 0$).

i) Trong n số nguyên liên tiếp ($n > 0$) luôn có duy nhất một số chia hết cho n .

4. Cho a, b là hai số nguyên và b khác 0. Khi đó, tồn tại duy nhất cặp số nguyên (q, r) sao cho $a = bq + r$ và $0 \leq r < |b|$.

Cho $b > 0$ và a tùy ý.

Khi đó, nếu chia a cho b thì số dư chỉ có thể là $0, 1, 2, \dots, b - 1$.

B. Một số ví dụ

I. PHƯƠNG PHÁP XÉT SỐ DƯ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng:

a) $ab(a + b)$ chia hết cho 2 với $a, b \in \mathbb{Z}$

b) $A = n(n^2 + 1)(n^2 + 4)$ chia hết cho 5 với $n \in \mathbb{Z}$

Giải

Tìm cách giải. Để chứng minh $A(n)$ chia hết cho k , ta có thể xét mọi trường hợp về số dư khi chia n cho k .

Chẳng hạn:

Câu a. Chúng ta xét các trường hợp số dư khi chia $a; b$ cho 2.

Câu b. Chúng ta xét các trường hợp số dư khi chia n cho 5.

Trình bày lời giải

a) Xét các trường hợp về số dư khi chia cho 2, ta có:

Nếu ít nhất a hoặc b chia hết cho 2 thì ab chia hết cho 2.

Nếu a và b cùng không chia hết cho 2 thì chúng cùng lẻ suy ra $a + b$ chẵn do đó $a + b$ chia hết cho 2.

Vậy $ab(a+b)$ chia hết cho 2 với $a^*, b \in \mathbb{Z}$.

b) Xét các trường hợp về số dư khi chia cho 5, ta có:

Nếu $n = 5k$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì A chia hết cho 5.

Nếu $n = 5k \pm 1$ thì $n^2 = 5m + 1$ ($m \in \mathbb{Z}$) nên $n^2 + 4 = 5m + 5$ chia hết cho 5 suy ra A chia hết cho 5.

Nếu $n = 5k \pm 2$ thì $n^2 = 5m + 4$ ($m \in \mathbb{Z}$) nên $n^2 + 1 = 5m + 5$ chia hết cho 5 suy ra A chia hết cho 5.

Vậy $A = n(n^2 + 1)(n^2 + 4)$ chia hết cho 5 với $\square$.

Ví dụ 2: Cho x, y, z là các số nguyên sao cho $(x - y)(y - z)(z - x) = x + y + z$

Chứng minh rằng $x + y + z$ chia hết cho 27.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Thành phố Hồ Chí Minh, vòng 2 - năm học 1995- 1996)

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy $x + y + z$ chia hết cho 27 tức là $(x - y)(y - z)(z - x)$ chia hết cho 27. Vì vậy chúng ta cần xét số dư khi chia x, y, z cho 3. Tuy nhiên nếu xét riêng thì nhiều trường hợp quá, do tính hoán vị chúng ta có thể xét các trường hợp cùng số dư, khác số dư.

Trình bày lời giải

Xét các trường hợp về số dư khi chia cho 3, ta có:

Nếu x, y, z chia cho 3 có các số dư khác nhau thì: $x - y, y - z, z - x$ cùng không chia hết cho 3, còn $x + y + z$ chia hết cho 3 do đó $(x - y)(y - z)(z - x) = x + y + z$ không xảy ra.

Nếu x, y, z chỉ có hai số chia cho 3 có cùng số dư thì $x - y, y - z, z - x$ chỉ có một hiệu chia hết cho 3 còn $x + y + z$ không chia hết cho 3 do đó $(x - y)(y - z)(z - x) = x + y + z$ không xảy ra.

Do đó x, y, z chia cho 3 có cùng số dư suy ra $x - y, y - z, z - x$ chia hết cho 3. Vậy

$x + y + z = (x - y)(y - z)(z - x)$ chia hết cho 27.

II. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TÍCH

Ví dụ 3: Chứng minh rằng $P = a^5b - ab^5$ chia hết cho 30 với a, b là hai số nguyên bất kỳ.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Toàn quốc, năm học 1985 - 1986)

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy rằng nếu dùng phương pháp xét số dư cho 30 thì nhiều trường hợp quá nên không khả thi. Ta sử dụng phương pháp phân tích thành tích: để chứng minh $A(n)$ chia hết cho k , ta phân tích k ra thừa số $k = p.q$, nếu $(p, q) = 1$, ta chứng minh $A(n)$ chia hết cho p và $A(n)$ chia hết cho q .

Mặt khác $30 = 2.3.5$ mà $(2; 3) = (3; 5) = (5; 2) = 1$ nên ta chỉ cần chứng minh P chia hết cho 2; 3; 5. Mỗi trường hợp chúng ta dùng kỹ thuật xét số dư.

Trình bày lời giải

Ta có: $P = ab(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$

Vì $30 = 2.3.5$ mà $(2;3)=(3;5)=(5;2)=1$ nên ta chứng minh P chia hết cho 2; 3; 5

Chứng minh P chia hết cho 2.

Nếu ít nhất a hoặc b chẵn thì ab chia hết cho 2.

Nếu a và b cùng lẻ thì $a - b$ chia hết cho 2.

Chứng minh P chia hết cho 3.

- Nếu ít nhất a hoặc b chia hết cho 3 thì ab chia hết cho 3.

- Nếu a, b cùng không chia hết cho 3 thì chúng có dạng $3k \pm 1$ suy ra a^2, b^2 có dạng $3m + 1$ nên $a^2 - b^2$ chia hết cho 3.

Chứng minh P chia hết cho 5.

- Nếu ít nhất a hoặc b chia hết cho 5 thì ab chia hết cho 5.

- Nếu a, b cùng không chia hết cho 5.

Nếu a, b có một trong các dạng $5k \pm 1$ hoặc $5k \pm 2$ thì a^2, b^2 có cùng dạng $5m + 1$ hoặc $5m + 4$ nên $a^2 - b^2$ chia hết cho 5.

Nếu a, b có một số có dạng $5k \pm 1$ còn một số có dạng $5k \pm 2$ thì a^2 và b^2 có một số có dạng $5m + 1$ còn một số có dạng $5m + 4$ nên $a^2 + b^2$ chia hết cho 5.

Vậy P chia hết cho 30.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng một số có dạng: $P = n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n$ (với n là số chẵn lớn hơn 4) thì chia hết cho 384.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Toàn quốc, năm học 1970 - 1971)

Giải

Tìm cách giải. Ta nhận thấy biểu thức có thể phân tích thành nhân tử được:

$n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n = n(n - 4)(n - 2)(n + 2)$. Vì n chẵn lớn hơn 4 nên $n = 2k + 2$ ($k \in \mathbb{N}^*$). thay vào biểu thức P ta được: $P = (2k + 2)(2k + 2 - 4)(2k + 2 - 2)(2k + 2 + 2) = 16k(k - 1)(k + 1)(k + 2)$. Mặt khác ta có $384 = 16.24$ do vậy chúng ta chỉ cần chứng minh $k(k - 1)(k + 1)(k + 2)$ chia hết cho 24.

Trình bày lời giải

Ta có $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n = n(n - 4)(n - 2)(n + 2)$

Vì n chẵn lớn hơn 4 nên $n = 2k + 2$ ($k \in \mathbb{N}^*$) thay vào biểu thức P ta được:

$$(2k + 2)(2k + 2 - 4)(2k + 2 - 2)(2k + 2 + 2) = 16k(k - 1)(k + 1)(k + 2).$$

$k, k + 1, k + 2$ có một số chia hết cho 3.

$k - 1, k, k + 1, k + 2$ có hai số chẵn liên tiếp, nên một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 4 suy ra $k(k - 1)(k + 1)(k + 2)$ chia hết cho 8.

Do đó $k(k-1)(k+1)(k+2)$ chia hết cho 24 vì $(3;8)=1$ hay $16k(k-1)(k+1)(k+2)$ chia hết cho 16.24 tức là $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n$ chia hết cho 384.

III. PHƯƠNG PHÁP TÁCH TỔNG

Ví dụ 5: Chứng minh rằng với mọi số nguyên a ta đều có $(a^3 + 5a)$ là số nguyên chia hết cho 6.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Thành phố Hà Nội, năm học 2008 - 2009)

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy ví dụ này có thể giải được bằng kỹ thuật xét số dư. Song chúng ta có thể giải bằng phương pháp tách tổng: Để chứng minh $A(n)$ chia hết cho k , ta có thể biến đổi $A(n)$ thành tổng của nhiều hạng tử và chứng minh mỗi hạng tử chia hết cho k . Do đó ta chỉ cần tách $a^3 + 5a = a^3 - a + 6a$, sau đó chứng tỏ $a^3 - a$ và $6a$ cùng chia hết cho 6.

Trình bày lời giải

Ta có $a^3 + 5a = a^3 - a + 6a$.

Mà $a^3 - a = (a-1)a(a+1)$ chia hết cho 6 vì là tích của ba số nguyên liên tiếp và $6a$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên a .

Vậy $(a^3 + 5a)$ là số nguyên chia hết cho 6.

IV. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG HẸNG ĐẲNG THỨC

Ví dụ 6: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , số $A(n) = 5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n)$ chia hết cho 91.

(Tuyển sinh lớp 10, Trường THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội, Vòng 1 - năm học 1997 - 1998)

Giải

Tìm cách giải. Những bài toán chứng minh chia hết mà biểu thức có số mũ n hoặc quá lớn chúng ta có thể sử dụng kết quả của các hằng đẳng thức mở rộng:

$a^n - b^n$ chia hết cho $a - b$ ($a \neq b$) với n bất kỳ.

$a^n - b^n$ chia hết cho $a + b$ ($a \neq -b$) với n chẵn.

$a^n + b^n$ chia hết cho $a + b$ ($a \neq -b$) với n lẻ.

Trong ví dụ này, ta có $91 = 7 \cdot 13$ và $(7;13)=1$. Để chứng minh $A(n)$ chia hết cho 91, ta chứng minh $A(n)$ chia hết cho 7 và 13. Vậy chúng ta chỉ cần nhóm các hạng tử một cách thích hợp.

Trình bày lời giải

Ta có: $91 = 7 \cdot 13$ và $(7;13)=1$. Để chứng minh $A(n)$ chia hết cho 91, ta chứng minh $A(n)$ chia hết cho 7 và 13. Ta có $A(n) = 25^n + 5^n - 18^n - 12^n$.

Áp dụng tính chất $(a^n - b^n):(a - b)$ với mọi a, b, n là số nguyên dương và $a \neq b$, $25^n - 18^n$ chia hết cho $25 - 18$ tức là $25^n - 18^n$ chia hết cho 7.

$12^n - 5^n$ chia hết cho $12 - 5$ tức là $12^n - 5^n$ chia hết cho 7.

Vậy $A(n) = 25^n - 18^n - (12^n - 5^n)$ chia hết cho 7.

$25^n - 12^n$ chia hết cho 25 - 12 tức là $25^n - 12^n$ chia hết cho 13.

$18^n - 5^n$ chia hết cho 18 - 5 tức là $18^n - 5^n$ chia hết cho 13.

Vậy $A(n) = 25^n - 12^n - (18^n - 5^n)$ chia hết cho 13.

Suy ra số $A(n) = 5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n)$ chia hết cho 91.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương thì $25^n + 7^n - 4^n(3^n + 5^n)$ chia hết cho 65

(Tuyển sinh lớp 10, Trường THPT chuyên Hà Nội, năm học 2014 - 2015)

Giải

Ta có: $65 = 13 \cdot 5$ và $(5; 13) = 1$. Để chứng minh biểu thức chia hết cho 65, ta chứng minh biểu thức chia hết cho 13 và 5.

Ta có: $25^n + 7^n - 4^n(3^n + 5^n) = 25^n + 7^n - 12^n - 20^n$

Áp dụng tính chất $(a^n - b^n) : (a - b)$ với mọi a, b, n là số nguyên dương và $a \neq b$

$25^n - 12^n$ chia hết cho 25 - 12 tức là $25^n - 12^n$ chia hết cho 13.

$20^n - 7^n$ chia hết cho 20 - 7 tức là $20^n - 7^n$ chia hết cho 13.

$25^n + 7^n - 4^n(3^n + 5^n)$ chia hết cho 13

$25^n - 20^n$ chia hết cho 25 - 20 tức là $25^n - 20^n$ chia hết cho 5.

$12^n - 7^n$ chia hết cho 12 - 7 tức là $12^n - 7^n$ chia hết cho 5.

$25^n + 7^n - 4^n(3^n + 5^n)$ chia hết cho 5

$A = (25^n - 20^n) - (12^n - 7^n) : 5$ mà ƯCLN $(5; 13) = 1$ nên $A : 65$.

V. PHƯƠNG PHÁP DÙNG NGUYÊN LÝ DIRICHLET

Phương pháp giải

Nếu nhốt $n + 1$ thỏ vào n cái lồng thì chắc chắn có một lồng chứa ít nhất hai thỏ.

- Trong n số nguyên liên tiếp thì có một số chia hết cho n ($n \geq 1$)

- Trong $n + 1$ số nguyên bất kỳ thì có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho n ($n \geq 1$).

Ví dụ 8: Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n khác 0 thỏa mãn $(13579^n - 1)$ chia hết cho 3^{13579}

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Thành phố Hà Nội, năm học 2005 - 2006)

Giải

Xét 3^{13579} số sau: $13579; 13579^2; 13579^3; \dots; 13579^{13579}$ đem chia cho 3^{13579} ta nhận được 3^{13579} số dư.

Mà 13579 không chia hết cho 3 nên trong các số trên không có số nào chia hết cho 3 do đó chúng nhận các số dư trong các số: $1; 2; 3; \dots; 3^{13579} - 1$ nên tồn tại hai số có cùng số dư.

Giả sử đó là hai số $13579^i; 13579^j$ ($i > j$) $\Rightarrow 13579^i - 13579^j$ chia hết cho $3^{13579} \Rightarrow 13579^i (13579^{i-j} - 1)$ chia hết cho 3^{13579} mà $(13579; 3) = 1$ nên $(13579^{i-j} - 1)$ chia hết cho 3^{13579} với $n = i - j$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Chúng ta có thể giải được bài toán tổng quát sau: Với a và p là hai số nguyên tố cùng nhau. Với số tự nhiên k chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n khác 0 thỏa mãn $(a^n - 1)$ chia hết cho p^k .

Ví dụ 9: Chứng minh rằng trong 5 số nguyên bất kỳ bao giờ cũng tìm được 3 số có tổng chia hết cho 3.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Thành phố Hà Nội, năm học 2000 – 2001)

Giải

Đặt 5 số đó là a, b, c, d, e .

Đem 5 số chia cho 3 chúng chỉ nhận các số dư là 0; 1; 2.

Nếu tồn tại 3 số có cùng số dư thì tổng ba số đó chia hết cho 3.

Nếu không tồn tại 3 số có cùng số dư thì nhiều nhất chỉ có 2 số có cùng số dư khi chia cho 3, suy ra phải có 3 số có số dư khác nhau khi chia cho 3. Tổng 3 số này chia hết cho 3.

VI. PHƯƠNG PHÁP DÙNG QUY NẠP TOÁN HỌC

Phương pháp giải

Trong toán học, khi dùng quy nạp để chứng minh $A(n)$ chia hết cho k với $n \geq n_0$ ta thực hiện:

Bước 1. Chứng minh $A(n)$ chia hết cho k với $n = n_0$.

Bước 2. Chứng minh với mọi $m \geq n_0$ giả sử nếu $A(m)$ chia hết cho k đúng, ta phải chứng minh $A(m+1)$ chia hết cho k .

Bước 3. Kết luận.

Ví dụ 10: Với mọi n nguyên dương, chứng minh rằng: $A(n) = 7^n + 3n - 1$ chia hết cho 9.

Giải

Với $n = 1$ thì $A(1) = 7 + 3 - 1 = 9$ chia hết cho 9.

Giả sử bài toán đúng với $n = k$ ($k \geq 1$), tức là $A(k) = 7^k + 3k - 1$ chia hết cho 9. Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$. Thật vậy:

Ta có: $A(k+1) = 7^{k+1} + 3(k+1) - 1 = 7 \cdot 7^k + 3k + 2$

$\Rightarrow A(k+1) = 7 \cdot (7^k + 3k - 1) - 18k + 9$. Vì $7^k + 3k - 1$ chia hết cho 9 và $18k; 9$ chia hết cho 9 $\Rightarrow A(k+1)$ chia hết cho 9. Như vậy bài toán đúng với $n = k + 1$. Do đó bài toán đúng với mọi n là số nguyên dương.

Ví dụ 11: Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n thì $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ chia hết cho 133.

Giải

Với $n = 1$, tổng $12^3 + 11^3 = 2926 = 22 \cdot 133$ chia hết cho 133.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k (k \geq 1)$, tức là $12^{2k+1} + 11^{k+2}$ chia hết cho 133. Ta cần chứng minh đúng với $n = k + 1$.

Ta có: $12^{2k+3} + 11^{k+3} = 144.12^{2k+1} + 11.11^{k+2} = 133.12^{2k+1} + 11.(12^{2k+1} + 11^{k+2})$. Mỗi số hạng của tổng chia hết cho 133 nên $12^{2k+3} + 11^{k+3}$ chia hết cho 133.

Như vậy bài toán đúng với $n = k + 1$

Do đó bài toán đúng với mọi n là số nguyên dương.

VII. PHƯƠNG PHÁP DÙNG ĐỒNG DƯ THỨC

Phương pháp giải

Hai số nguyên a và b chia cho số nguyên $m (m \neq 0)$ có cùng số dư ta nói a đồng dư với b theo modun m , kí hiệu $a \equiv b \pmod{m}$.

Với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $m \in \mathbb{N}^*$ ta có:

$$a \equiv b \pmod{m}; b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$$

$$a \equiv b \pmod{m}; c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}$$

$$a - c \equiv b - d \pmod{m}; a.c \equiv b.d \pmod{m}$$

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m} \text{ với } n \in \mathbb{N}^*$$

$$a \equiv b \pmod{m}; c \in \mathbb{N}^* \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m} \text{ với } m \in \mathbb{N}^*.$$

Ví dụ 12: Cho $A = 27309^{10} + 27309^{10^3} + 27309^{10^3} + \dots + 27309^{10^{10}}$. Tìm số dư trong phép chia A cho 7.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Thành phố Hà Nội, năm học 2008 - 2009)

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy $27309 \equiv 2 \pmod{7}$, mặt khác $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$ nên ta cần tìm đồng dư của số mũ với 3.

Trình bày lời giải

Ta có $10^n \equiv 1 \pmod{7}$ với $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 10^n = 3k + 1$ (với $k \in \mathbb{N}$) (1)

Ta có $27309 \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 27309^{3k+1} \equiv 2^{3k+1} \equiv 2.8^k \equiv 2 \pmod{7}$ (2)

Từ (1), (2) ta có $A \equiv 2 + 2 + \dots + 2 \pmod{7}$

$$A \equiv 20 \equiv 6 \pmod{7}$$

Vậy số dư trong phép chia A cho 7 là 6.

Ví dụ 13: Với mỗi số tự nhiên n , đặt $a_n = 3n^2 + 6n + 13$. Chứng minh rằng nếu hai số a_i, a_j không chia hết cho 5 và có số dư khác nhau khi chia cho 5 thì $a_i + a_j$ chia hết cho 5.

Giải

Ta có $a_n = 3(n+1)^2 + 10$.

Ta thấy nếu a_n không chia hết cho 5 thì $n+1$ không chia hết cho 5 suy ra:

$(n+1)^2 \equiv 1$ hoặc $4 \pmod{5} \Rightarrow a_n \equiv 3$ hoặc $2 \pmod{5}$. Do đó, nếu a_i, a_j đều không chia hết cho 5 và có số dư khác nhau thì $a_i + a_j \equiv 3 + 2 \equiv 0 \pmod{5}$ nên $a_i + a_j$ chia hết cho 5.

VIII. PHƯƠNG PHÁP ÁP DỤNG TÍNH CHẤM LẺ

Phương pháp giải

Một số bài toán chia hết ta có thể giải nhanh bằng nhận xét sau:

Trong hai số nguyên liên tiếp thì có một số chẵn và một số lẻ.

Tổng hoặc hiệu của một số chẵn và một số lẻ là một số lẻ.

Tổng hoặc hiệu của hai số chẵn là một số chẵn.

Tích của các số lẻ là số lẻ.

Trong tích chứa ít nhất một số chẵn thì kết quả là số chẵn.

Ví dụ 14: Cho $a_1; a_2; a_3; \dots, a_7$ là các số nguyên và $b_1; b_2; b_3; \dots, b_7$ cũng là số nguyên đó, nhưng lấy theo thứ tự khác. Chứng minh rằng $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_7 - b_7)$ là số chẵn.

(Thi Học sinh giỏi Anh, năm 1968)

Giải

Tìm cách giải. Phân tích từ kết luận, chúng ta chứng tỏ phải có một nhân tử là số chẵn. Mỗi nhân tử là một hiệu, tổng 7 hiệu này bằng 0 (số chẵn), nên các hiệu này không thể toàn là số lẻ được, mà phải có ít nhất một số chẵn. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Trình bày lời giải

Đặt $c_i = a_i - b_i$ với $i = 1, 2, 3, \dots, 7$. Ta có:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \dots + c_7 &= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_7 - b_7) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7) - (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_7) = 0 \end{aligned}$$

Vì có số lẻ c_i , tổng một số số là 0 thì phải có ít nhất một số chẵn $\Rightarrow c_1 \cdot c_2 \dots c_7$ chia hết cho 2, suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 15: Cho $P = (a+b)(b+c)(c+a) - abc$ với a, b, c là các số nguyên.

Chứng minh rằng nếu $a+b+c$ chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4.

(Tuyển sinh lớp 10, Trường THPT chuyên Chu Văn An, Amsterdam, Vòng 2, năm học 2005 - 2006)

Giải

Tìm cách giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= (a+b)(b+c)(c+a) - abc = (a+b)(bc + ab + ac + c^2) - abc \\ &= (a+b)ab + abc + (a+b)c(a+b+c) - 2abc \\ &= (a+b+c)(ab + bc + ca) - 2abc \end{aligned}$$

Do $a+b+c$ chia hết cho 4 nên trong 3 số a, b, c có ít nhất một số chẵn.

Suy ra $2abc$ chia hết cho 4.

Mà $(a+b+c)(ab+bc+ca)$ chia hết cho 4 suy ra P chia hết cho 4.

C. Bài tập vận dụng

8.1. Có thể tìm được số tự nhiên n để $n^2 + n + 1$ chia hết cho 2025 hay không?

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét chữ số tận cùng n ta có:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 + n + 1$	1	3	7	3	1	1	3	7	3	1

$\Rightarrow n^2 + n + 1$ không chia hết cho 5 $\Rightarrow n^2 + n + 1$ không chia hết cho 2025.

8.2. a) Chứng minh rằng $n^3 - n + 2$ không chia hết cho 6 với mọi số tự nhiên n .

b) Chứng minh rằng $n^3 - n$ chia hết cho 24 với mọi số tự nhiên n lẻ.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$

$n-1; n$ là hai số nguyên liên tiếp nên $n^3 - n : 2$

$n-1; n; n+1$ là ba số nguyên liên tiếp nên $n^3 - n : 3$

$\Rightarrow n^3 - n : 6 \Rightarrow n^3 - n + 2$ không chia hết cho 6.

b) Ta có: $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$

Với n là số lẻ, đặt $n = 2k + 1$, biểu thức có dạng:

$$(2k+1)2k(2k+2) = 4k(2k+1)(k+1)$$

Ta có k và $k+1$ là hai số nguyên liên tiếp

$$\Rightarrow k(k+1) : 2 \Rightarrow 4(2k+1)k(k+1) : 8$$

Với $k : 3$ thì $4(2k+1)k(k+1) : 3$

Với $k : 3$ dư 1 thì $(2k+1) : 3 \Rightarrow 4(2k+1)k(k+1) : 3$

Với $k : 3$ dư 2 thì $(2k+1) : 3 \Rightarrow 4(2k+1)k(k+1) : 3$

Vậy $4(2k+1)k(k+1) : 3$ với k là số tự nhiên

Mà $\text{UCLN}(3; 8) = 1$ nên $n^3 - n : 24$.

8.3. Cho a và b là các số nguyên sao cho $a^2 + b^2$ chia hết cho 13. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một trong hai số $2a + 3b; 2b + 3a$ chia hết cho 13.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $(2a + 3b)(2b + 3a) = 6(a^2 + b^2) + 13ab$

Mà $a^2 + b^2 : 13$ và $13ab : 13$ nên $6(a^2 + b^2) + 13ab : 13$

$$\Rightarrow (2a + 3b)(2b + 3a) : 13$$

Vậy tồn tại ít nhất một trong hai số $2a + 3b; 2b + 3a$ chia hết cho 13.

8.4. Cho a, b, c là các số nguyên, chứng minh rằng $(a^3 + b^3 + c^3)$ chia hết cho 3 khi và chỉ khi $(a + b + c)$ chia hết cho 3.

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{Xét } (a^3 + b^3 + c^3) - (a + b + c) = (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c)$$

$$\text{Mà } a^3 - a : 3; b^3 - b : 3; c^3 - c : 3 \Rightarrow (a^3 + b^3 + c^3) - (a + b + c) : 3$$

Suy ra $(a^3 + b^3 + c^3) : 3$ khi và chỉ khi $(a + b + c) : 3$

8.5. Cho số $M = 1993^{1997} + 1997^{1993}$

a) Chứng minh rằng M chia hết cho 15.

b) Hỏi M tận cùng bằng chữ số nào?

(Thi Học sinh giỏi Toán 9, Thành phố Hồ Chí Minh, Vòng 1, năm học 1992 — 1993)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Vì $15 = 3 \cdot 5$ mà $(3, 5) = 1$ nên ta chứng minh M chia hết cho 3 và 5.

Áp dụng hằng đẳng thức ta có:

$1993^{1997} - 1 = 1993^{1997} - 1^{1997}$ chia hết cho $1993 - 1$, mà $1993 - 1$ chia hết cho 3 nên $(1993^{1997} - 1)$ chia hết cho 3.

$1997^{1993} + 1 = 1997^{1993} + 1^{1993}$ chia hết cho $1997 + 1$, mà $1997 + 1$ chia hết cho 3 nên $(1997^{1993} + 1)$ chia hết cho 3.

Do đó $1993^{1997} + 1997^{1993} = (1993^{1997} - 1) + (1997^{1993} + 1)$ chia hết cho 3.

$1993^{1997} - 1993 = 1993 \left[(1993^2)^{998} - 1 \right]$ chia hết cho $1993^2 + 1$, mà $1993^2 + 1$ chia hết cho 5 nên

$1993^{1997} - 1993$ chia hết cho 5

$1997^{1993} - 1997 = 1997 \left[(1997^2)^{992} - 1 \right]$ chia hết cho $1997^2 + 1$, mà $1997^2 + 1$ chia hết cho 5 nên

$1997^{1993} - 1997$ chia hết cho 5

Do đó $1993^{1997} - 1993 + 1997^{1993} - 1997$ chia hết cho 5

$$\Rightarrow 1993^{1997} + 1997^{1993} - 3990 \text{ chia hết cho 5}$$

$$\Rightarrow 1993^{1997} + 1997^{1993} \text{ chia hết cho 5}$$

Suy ra M chia hết cho 15.

b) Ta có $1993^{1997} + 1997^{1993}$ chia hết cho 5 nên M có tận cùng là 0 hoặc 5.

Mặt khác $1993^{1997} + 1997^{1993}$ là chẵn nên M có tận cùng là 0.

8.6. Chứng minh rằng $A = 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ chia hết cho 1897.

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng công thức $a^n - b^n : a - b$ với a, b, n là số tự nhiên $a \neq b$

$$2903^n - 803^n : 2903 - 803 \Rightarrow 2903^n - 803^n : 2100$$

$$464^n - 261^n : 464 - 261 \Rightarrow 464^n - 261^n : 203$$

$$\text{Mà } 2100 : 7; 203 : 7 \Rightarrow 2903^n - 803^n - (464^n - 261^n) : 7 \text{ hay } A : 7$$

$$2903^n - 464^n : 2903 - 464 \Rightarrow 2903^n - 464^n : 2439$$

$$803^n - 261^n : 803 - 261 \Rightarrow 803^n - 261^n : 542$$

$$\text{Mà } 2439 : 271; 542 : 271 \Rightarrow A = 2903^n - 464^n - (803^n - 261^n) : 271 \Rightarrow A : 271$$

$$\text{Mà } \text{UCLN}(7; 271) = 1 \Rightarrow A : 7 \cdot 271 \text{ hay } A : 1897$$

8.7. Cho X là một tập hợp gồm 700 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006.

Chứng minh rằng trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{3; 6; 9\}$

(Tuyển sinh lớp 10, Trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, Vòng 2, năm học 2006 - 2007)

Hướng dẫn giải – đáp số

Cách 1. Chia dãy các số nguyên dương từ 1 đến 2006 thành 201 đoạn: $[1; 10], [11; 20], [21; 30], \dots, [1991; 2000], [2001; 2006]$. Vì X có 700 số nguyên dương khác nhau nên theo nguyên lý Đê-rich lê, tồn tại ít nhất 4 số trong 700 số trên thuộc cùng một đoạn. Mặt khác, với 4 số bất kì, luôn tồn tại ít nhất 2 số khi chia cho 3 có cùng số dư, hiệu của hai số đó chia hết cho 3, suy ra hiệu hai số này thuộc tập hợp $E = \{3; 6; 9\}$.

Cách 2.

Chia X thành 3 tập hợp như sau:

$$A = \{x / x = 3k + 1, k \in \mathbb{N}\};$$

$$B = \{x / x = 3k + 2, k \in \mathbb{N}\};$$

$$C = \{x / x = 3k + 3, k \in \mathbb{N}\};$$

Có 700 số được chia thành 3 tập hợp, theo nguyên lý Đê-rich lê, tồn tại một tập hợp có ít nhất 234 phần tử. Trong tập hợp này luôn tồn tại hai số cách nhau 3 hoặc 6 đơn vị. Thật vậy nếu các số trong tập hợp chỉ các nhau ít nhất 9 đơn vị thì số lớn nhất trong tập hợp không nhỏ hơn $9 \cdot 233 = 2097 > 2006$, mâu thuẫn với giả thiết. Suy ra trong X luôn tồn tại hai số cách nhau 3 hoặc 6. Vậy trong tập hợp X luôn tìm được hai phần tử x, y sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{3; 6; 9\}$.

8.8. Chứng minh rằng nếu m chia hết cho 2 thì $(m^3 + 20m)$ chia hết cho 48, với m là một số nguyên.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Bình Phước, năm học 2012 - 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{Đặt } m = 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có $m^3 + 20m = 8k^3 + 40k = 8k(k^2 + 5)$

Xét k chẵn $\Rightarrow 8k : 16 \Rightarrow 8k(k^2 + 5) : 16$

Xét k lẻ $\Rightarrow k^2 + 5 : 2 \Rightarrow 8(k^2 + 5) : 16 \Rightarrow 8k(k^2 + 5) : 16$

Xét $k : 3 \Rightarrow 8k(k^2 + 5) : 3$

Xét k không chia hết cho 3: $k = 3m \pm 1 \Rightarrow k^2 = 9m^2 \pm 6m + 1$

$\Rightarrow k^2 + 5 = 9m^2 \pm 6m + 6 : 3 \Rightarrow 8k(k^2 + 5) : 3$

Mà ƯCLN $(3; 16) = 1$ nên $8k(k^2 + 5) : 48$ hay $(m^3 + 20m)$ chia hết cho 48.

8.9 Với a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $4a^2 + 3ab - 11b^2$ chia hết cho 5 thì $a^4 - b^4$ chia hết cho 5.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Hải Dương, năm học 2012 - 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $4a^2 + 3ab - 11b^2 = 4a^2 + 3ab - b^2 - 10b^2 = (4a - b)(a + b) - 10b^2$

$4a^2 + 3ab - 11b^2 : 5 \Leftrightarrow (4a - b)(a + b) : 5$ (vì $10b^2 : 5$)

- Trường hợp 1. $4a - b : 5 \Leftrightarrow 5a - (a + b) : 5 \Leftrightarrow a + b : 5$

Mà $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$ nên $a^4 - b^4 : 5$

- Trường hợp 2. $a + b : 5$ mà $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$ nên $a^4 - b^4 : 5$

Vậy $4a^2 + 3ab - 11b^2$ chia hết cho 5 thì $a^4 - b^4$ chia hết cho 5.

8.10. Chứng minh rằng nếu tổng hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng lập phương của chúng chia hết cho 9.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Vĩnh Long, năm học 2012 - 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt hai số nguyên đó là a và b thì $a + b : 3$

Xét $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] : 3$

$\Rightarrow (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] : 9$ suy ra $a^3 + b^3 : 9$

8.11. Cho $A = n^{2012} + n^{2011} + 1$. Tìm tất cả các số tự nhiên n để A nhận giá trị là một số nguyên tố.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Nghệ An, năm học 2011 - 2012)

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét $n = 0$ thì $A = 1$, không phải số nguyên tố.

Xét với $n = 1$ thì $A = 3$ là số nguyên tố.

Xét $n \geq 2$.

Ta có $A = n^{2012} - n^2 + n^{2011} - n + n^2 + n + 1$

$$=n^2(n^{3670}-1)+n(n^{3670}-1)+(n^2+n+1)$$

Mà $n^{3670}-1=(n^3)^{670}-1;n^3-1;n^3-1;n^2+n+1 \Rightarrow n^{3670}-1;n^2+n+1 \Rightarrow A;n^2+n+1;n^2+n+1>1$ và

$n^2+n+1 < A$ nghĩa là A không phải là số nguyên tố với $n \geq 2$. Vậy chỉ có $n=1$ thỏa mãn.

8.12. Cho đa thức bậc ba $f(x)$ với hệ số của x^3 là một số nguyên dương và biết $f(5)-f(3)=2020$.

Chứng minh rằng $f(7)-f(1)$ là hợp số.

Hướng dẫn giải – đáp số

Theo đề bài $f(x)$ có dạng $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a \in \mathbb{Z}^+$)

$$\text{Ta có: } 2020 = f(5) - f(3) = (5^3 - 3^3)a + (5^2 - 3^2)b + (5 - 3)c = 98a + 16b + 2c$$

$$\Rightarrow 16b + 2c = (2020 - 98a)$$

$$\text{Ta có: } f(7) - f(1) = (7^3 - 1^3)a + (7^2 - 1^2)b + (7 - 1)c$$

$$= 342a + 48b + 6c = 342a + 3(16b + 2c)$$

$$= 342a + 3(2020 - 98a) = 6060 + 48a : 3$$

Vậy $f(7)-f(1)$ là hợp số.

8.13. Cho số nguyên k.

a) Chứng minh (k^2+3k+5) chia hết cho 11 khi và chỉ khi $k=11t+4$ với t là số nguyên.

b) Chứng minh (k^2+3k+5) không chia hết cho 121.

(Tuyển sinh lớp 10, chuyên toán, Trường Phổ Thông Năng Khiếu, ĐH QG TP Hồ Chí Minh, năm học 1996 - 1997)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có $k^2+3k+5=(k-4)^2+11(k-1)$. Suy ra k^2+3k+5 chia hết cho 11 khi

và chỉ khi $(k-4)^2$ chia hết cho 11. Do 11 là số nguyên tố nên điều này chỉ xảy ra khi $k-4$ chia hết cho 11 hay $k=11t+4$ với t là số nguyên.

b) Giả sử có k nguyên sao cho (k^2+3k+5) chia hết cho 121. Khi đó (k^2+3k+5) chia hết cho 11. Theo câu a) thì $k=11t+4$, thay vào ta có:

$$k^2+3k+5=(k-4)^2+11(k-1)=121t^2+121t+33 \text{ không chia hết cho 121 (vì 33 không chia hết cho 121).}$$

Mâu thuẫn.

Vậy (k^2+3k+5) không chia hết cho 121.

8.14. Cho a,b, c khác 0 thỏa mãn điều kiện: $(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$. Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 3.

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết ta có:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2ab^2c + 2bc^2a + 2bca^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

$$\Rightarrow 2abc(a+b+c)=0 \Rightarrow a+b+c=0 \text{ vì } abc \neq 0$$

$$\text{Ta có: } a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - (a+b)^3 = a^3 + b^3 - a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$$

$$= -3ab(a+b) = 3abc ; 3$$

8.15. Cho $A(n) = n^2(n^4 - 1)$. Chứng minh rằng $A(n)$ chia hết cho 60 với mọi số tự nhiên n .

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$$A(n) = n^2(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n^2(n-1)(n+1)(n^2 + 1)$$

$$\text{Nếu } n \text{ chẵn} \Rightarrow n^2 : 4 \Rightarrow A : 4 .$$

$$\text{Nếu } n \text{ lẻ} \Rightarrow (n-1)(n+1) : 4 \Rightarrow A : 4 .$$

$$\text{- Ta có } n-1, n, n+1 \text{ là ba số nguyên liên tiếp nên } (n-1)n(n+1) : 3 \Rightarrow A : 3$$

$$\text{- Nếu } n : 5 \text{ thì } A : 5$$

$$\text{Nếu } n : 5 \text{ dư } 1 \text{ hoặc } 4 \text{ thì } (n-1)n(n+1) : 5 \Rightarrow A : 5$$

$$\text{Nếu } n : 5 \text{ dư } 2 \text{ hoặc } 3 \Rightarrow n^2 : 5 \text{ dư } 4 \Rightarrow n^2 + 1 : 5 \Rightarrow A : 5 .$$

$$\text{Mà } 3; 4; 5 \text{ nguyên tố cùng nhau từng đôi một nên } A : 3.5.4 \text{ hay } A : 60 .$$

$$\mathbf{8.16.}$$
 Cho $P = (a+b)(b+c)(c+a) + abc$

a) Phân tích P thành nhân tử.

b) Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số nguyên mà $a+b+c$ chia hết 6 thì $P - 3abc$ cũng chia hết cho 6.

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{a) Ta có: } P = (a+b)(bc+ac+c^2+ac) + abc$$

$$= (a+b)[c(a+b+c) + ab] + abc$$

$$= (a+b)c(a+b+c) + (a+b)ab + abc$$

$$= (a+b)c(a+b+c) + ab(a+b+c)$$

$$= (a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$\text{b) Từ } a+b+c : 6 \Rightarrow P : 6$$

$$a+b+c : 6 \Rightarrow a+b+c : 2 \Rightarrow a, b, c \text{ ít nhất tồn tại một số chẵn}$$

$$\Rightarrow abc : 2 \Rightarrow 3abc : 6 \Rightarrow P - 3abc : 6 .$$

$$\mathbf{8.17.}$$
 Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $a^5 + b^5 = 4(c^5 + d^5)$.

Chứng minh rằng: $a+b+c+d$ chia hết cho 5.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $a^5 + b^5 + c^5 = 5(c^5 + d^5) : 5$

Xét $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 - (a + b + c + d) = (a^5 - a) + (b^5 - b) + (c^5 - c) + (d^5 - d)$

Mà $a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + 1)$

- Nếu $a : 5 \Rightarrow a^5 - a : 5$

- Nếu $a = 5k \pm 1$ thì $a^2 - 1 : 5 \Rightarrow a^5 - a : 5$

- Nếu $a = 5k \pm 2$ thì $a^2 + 1 : 5 \Rightarrow a^5 - a : 5$

Vậy với a là số nguyên thì $a^5 - a : 5$.

Tương tự ta có $b^5 - b : 5$; $c^5 - c : 5$; $d^5 - d : 5$

$\Rightarrow a^5 + b^5 + c^5 + d^5 - (a + b + c + d) : 5$

Mà $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 : 5 \Rightarrow a + b + c + d : 5$

8.18. Cho $A = \frac{a^3}{24} + \frac{a^2}{8} + \frac{a}{12}$ với a là số tự nhiên chẵn. Hãy chứng minh A có giá trị nguyên.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $A = \frac{a^3 + 3a^2 + 2a}{24} = \frac{a(a+1)(a+2)}{24}$

$a; a+1; a+2$ là các số nguyên liên tiếp $\Rightarrow a(a+1)(a+2) : 3$ (1)

Vì a là số chẵn nên ta đặt $a = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$).

$A = \frac{4k(k+1)(2k+1)}{24} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$k; k+1$ là các số nguyên liên tiếp $\Rightarrow k(k+1) : 2 \Rightarrow a(a+1)(a+2) : 4$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A \in \mathbb{Z}$

8.19. Cho $a_n = 2^{2n+1} + 2^{2n+1} + 1$ và $b_n = 2^{2n+1} - 2^{2n+1} + 1$. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , có một và chỉ một trong 2 số a_n hoặc b_n chia hết cho 5.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $a_n + b_n = 2 \cdot 2^{2n+1} + 2 = (2^2)^{n+1} + 2 = 4^{n+1} + 2$.

Với n là số tự nhiên thì 4^{n+1} chỉ có thể tận cùng là 4 hoặc 6 $\Rightarrow a_n + b_n$ chỉ có thể tận cùng là 6 hoặc 8

$\Rightarrow a_n + b_n$ không chia hết cho 5 $\Rightarrow a_n$ và b_n không cùng chia hết cho 5. (1)

Xét $a_n, b_n = (2^{2n+1} + 2^{2n+1} + 1)(2^{2n+1} - 2^{2n+1} + 1)$

$= (2^{2n+1} + 1)^2 - (2^{n+1})^2 = 4^{2n+1} + 2 \cdot 2^{2n+1} + 1 - 2^{2n+2} = 4^{2n+1} : 5$ (vì $2n+1$ lẻ)

$$A_n, b_n : 5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra có một và chỉ một trong 2 số a_n hoặc b_n chia hết cho 5.

8.20. Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $p^2 - 1 : 24$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p^2 chia 3 dư 1

$$\Rightarrow p^2 - 1 : 3 \quad (1)$$

Mặt khác p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p - 1; p + 1$ là hai số chẵn liên tiếp.

$$\Rightarrow (p - 1)(p + 1) : 8 \Rightarrow p^2 - 1 : 8 \quad (2)$$

* Mà $(3; 8) = 1$, từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.