

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐỒNG NAI
Đơn vị Trường THPT Ngô Quyền

Mã số:

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

DỰ ĐOÁN
DẤU BẢNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI
ĐỂ TÌM GTNN, GTLN VÀ CHỨNG MINH BẤT
ĐẲNG THỨC

Người thực hiện: **ĐỖ TẤT THẮNG.**

Lĩnh vực nghiên cứu:

Quản lý giáo dục ☐

Phương pháp dạy học bộ môn: TOÁN ☒

Phương pháp giáo dục ☐

Lĩnh vực khác: ☐

Có đính kèm:

☐ Mô hình ☐ Phần mềm ☐ Phim ảnh ☐ Hiện vật khác

Năm học: 2012-2013

DỰ ĐOÁN

DẤU BẰNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI (CAUCHY) ĐỂ TÌM GTNN, GTLN VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

I. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

- Bất đẳng thức (BĐT) là kiến thức không thể thiếu trong các kì thi đại học, cao đẳng, thi học sinh giỏi. BĐT áp dụng rất nhiều trong cuộc sống nói chung và toán học nói riêng chẳng hạn: giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, hệ bất phương trình, các bài toán cực trị . . . Đa số học sinh (HS) khi gặp BĐT thường hay lúng túng, không biết nên xuất phát từ đâu? Phương pháp giải như thế nào? Với vai trò là giáo viên dạy Toán 10, tôi muốn HS lớp 10 được tiếp cận một số đề thi cao đẳng, đại học, đề thi học sinh giỏi, bài BĐT hay từ những kiến thức bình thường, dễ hiểu nhất.

- Chứng minh BĐT hoặc tìm giá trị lớn nhất(GTLN), giá trị nhỏ nhất(GTNN) của một biểu thức thực ra là một dãy hữu hạn các bước biến đổi, đánh giá thông qua các BĐT mà đảm bảo dấu “=” BĐT luôn đúng tại mọi thời điểm. Các sai lầm và khó khăn HS hay gặp phải là :

✓ Theo thói quen làm BĐT trong chương trình, HS thường không kiểm tra dấu “=” của BĐT có xảy ra hay không? Như thế, HS dễ mắc sai lầm khi áp dụng “*vô tư*” các BĐT mà không xảy ra dấu “=”.

✓ HS sẽ lúng túng không biết xuất phát từ đâu? Làm cách nào để suy luận ra các BĐT cần dùng trong bài toán.

Dự đoán dấu “=” trong bất đẳng thức Cô-si là một kĩ thuật “*suy ngược*” nhưng rất logic. Từ giá trị của các biến số trong BĐT tại dấu “=” ở dự đoán ban đầu, suy ra các giá trị của các biến số trong BĐT tại các thời điểm dùng các BĐT để đánh giá, suy ra các BĐT phù hợp sẽ được sử dụng trong bài toán. Hơn nữa, giúp chúng ta có thể kiểm chứng lại cách làm bài toán có đúng không? từ đó hạn chế, khắc phục sai lầm. Tóm lại, kĩ thuật trên cho phép ta **dự đoán, tránh sai lầm và định hướng cách giải bài toán.**

- Dự đoán dấu “=” trong bất đẳng thức Cô-si để chứng minh BĐT hoặc tìm GTLN, GTNN là một trong các phương pháp đơn giản, dễ hiểu hơn so với đa số các phương pháp khác, phù hợp với HS lớp 10. Cho phép HS giải quyết được nhiều bài toán BĐT mà không cần huy động tới kiến thức về đạo hàm của lớp 12.

II. THỰC TRẠNG TRƯỚC KHI THỰC HIỆN CÁC GIẢI PHÁP CỦA ĐỀ TÀI

Một là, qua thực tế dạy học và từ ghi nhận trên chúng tôi nhận thấy trong chương trình lớp 10 phần BĐT, số bài tập trong sách giáo khoa hạn chế và thời lượng dành cho nó rất ít.

Hai là, trong sách giáo khoa, sách bài tập đại số và hình học ban nâng cao và ban cơ bản đều không có hoặc rất ít bài BĐT yêu cầu dấu “=” xảy ra khi nào? Do đó, thông thường khi làm bài BĐT thì HS không có thói quen thử lại dấu “=” có xảy ra hay không? Đây chính là **sai lầm HS** thường gặp phải.

Do đó, tôi mạnh dạn làm SKKN này với mong muốn là một tài liệu nhỏ giúp HS đỡ khó khăn hơn khi gặp một số bài BĐT có dạng trên.

III. NỘI DUNG ĐỀ TÀI

A) Cơ sở lí thuyết

Theo chương trình sách giáo khoa ban nâng cao và cơ bản hiện hành, HS chỉ được học BĐT Cô-si 2 và 3 số không âm. Do đó, chúng tôi cố gắng biên soạn hệ thống bài tập, kĩ thuật giải dựa trên BĐT Cô-si 2 và 3 số không âm, mục đích cho HS dễ hiểu nhất có thể.

☛ Bất đẳng thức Cô-si 2 số không âm

Cho $a, b \geq 0$, ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

➤ Từ BĐT Cô-si 2 số không âm ta có thể dễ dàng chứng minh được các BĐT Hệ quả sau:

$$\textcircled{1} (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 \text{ với } a, b > 0$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \text{ với } a, b > 0$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \text{ với } a, b > 0$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b$

☛ Bất đẳng thức Cô-si 3 số không âm

Cho $a, b, c \geq 0$, ta có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

➤ Từ BĐT Cô-si 3 số không âm ta có thể dễ dàng chứng minh được các BĐT Hệ quả sau:

$$\textcircled{1} (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9 \text{ với } a, b, c > 0$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \text{ với } a, b, c > 0$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \text{ với } a, b, c > 0$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

☞ Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Cho $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là một hàm n biến thực trên $D \subset \mathbb{R}^n : f : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{Max}_D f = M \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \\ \exists (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D : f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = M \end{cases}$$

$$\text{Min}_D f = m \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq m \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \\ \exists (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D : f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = m \end{cases}$$

➤ Nhận xét:

– **Dấu hiệu** để dùng BĐT Cô-si và các hệ quả là các biến trong BĐT luôn không âm hoặc dương. Điều này giúp ta nhận định nhanh bài toán có nên dùng BĐT Cô-si hay không.

– Trung bình cộng của các số không âm luôn lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân của chúng. Do đó:

+Để tìm GTNN của biểu thức thường ta sẽ biến đổi **tổng** thành **tích**.

+Để tìm GTLN của biểu thức thường ta sẽ biến đổi **tích** thành **tổng**.

– Dấu “=” trong bất đẳng thức có vai trò rất quan trọng. Nó giúp kiểm tra tính **đúng đắn** của chứng minh, **định hướng** cách giải. Đặc biệt, khi **áp dụng nhiều lần** bất đẳng thức Cô-si hoặc hệ quả thì các dấu “=” phải **đồng thời xảy ra** với **cùng một điều kiện** của biến.

– BĐT ② “**gộp**” từ tổng 2 hoặc 3 số hạng thành một số hạng duy nhất.

– BĐT ③ “**tách**” từ một số hạng thành 2 hoặc 3 số hạng.

B) Ứng dụng dự đoán dấu bằng trong BĐT Cô-si tìm GTLN, GTNN của biểu thức và chứng minh BĐT

1) Các sai lầm học sinh hay gặp phải

Đa số khi mới làm BĐT thì HS thường hay gặp phải sai lầm. Đáng nói hơn là HS không biết mình sai như thế nào? Từ đâu?. Sau đây là các ví dụ HS hay gặp phải sai lầm. Đầu tiên là **Bài 4.22 trang 105 Sách bài tập đại số 10 ban nâng cao**

Bài 1. Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước 80cm x 50 cm. Hãy cắt đi ở bốn góc vuông những hình vuông bằng nhau để khi gập lại theo mép cắt thì được một cái hộp (không nắp) có thể tích lớn nhất

☞ Sai lầm HS thường gặp:

Gọi x (cm), $0 < x < 25$ là độ dài hình vuông được cắt.

$$\text{Do đó } V = (80 - 2x)(50 - 2x)x = \frac{1}{4}[(80 - 2x)(50 - 2x)4x]$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số $80 - 2x > 0, 50 - 2x > 0, 4x > 0$

$$\text{Ta có: } \sqrt[3]{(80 - 2x)(50 - 2x)4x} \leq \frac{(80 - 2x) + (50 - 2x) + 4x}{3} = \frac{130}{3}$$

$$\Rightarrow (80 - 2x)(50 - 2x)4x \leq \left(\frac{130}{3}\right)^3 \Rightarrow V \leq \frac{1}{4}\left(\frac{130}{3}\right)^3. \text{ Vậy } \text{Max}V = \frac{1}{4}\left(\frac{130}{3}\right)^3$$

☞ Nguyên nhân sai lầm:

+Theo **thói quen**, HS không kiểm chứng lại dấu “=” của BĐT xảy ra khi nào?

$$\text{Max}V = \frac{1}{4}\left(\frac{130}{3}\right)^3 \text{ khi } 80 - 2x = 50 - 2x \Leftrightarrow 80 = 50 \text{ (Vô lý)}. \text{ Do đó, dấu “=” không xảy ra.}$$

Bài 2. Cho $x \geq 2$. Tìm GTNN của $A = x + \frac{1}{x}$

☞ Sai lầm HS thường gặp:

$$\text{Áp dụng BĐT Cô-si 2 số không âm ta có } A = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2. \text{ Vậy Min } A = 2.$$

☞ Nguyên nhân sai lầm:

+HS **ngộ nhận Bài 2** với **hệ quả 1** của BĐT Cô-si cho 2 số không âm trang 73 sách giáo khoa đại số 10 ban cơ bản có phát biểu:

Tổng một số dương và nghịch đảo của nó lớn hơn hoặc bằng 2. $a + \frac{1}{a} \geq 2, \forall a > 0.$

+Theo **thói quen**, HS không kiểm chứng lại dấu “=” của BĐT xảy ra khi nào? Cụ thể

$$\text{Min } A = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1 \text{ (vô lý) vì } x \geq 2. \text{ Do đó, dấu “=” không xảy ra.}$$

Bài 3. Cho số thực $x \geq 2$. Tìm GTNN của $A = x + \frac{1}{x^2}$

☞ Sai lầm HS thường gặp:

$$\text{Áp dụng BĐT Cô-si 3 số không âm ta có } A = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

$$\text{Vậy } \text{Min}A = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

☞ Nguyên nhân sai lầm:

Cách giải trên mắc sai lầm do dấu bằng của bất đẳng thức không xảy ra. Bởi vì, dấu

$$“=” \text{ xảy ra } \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{x}{2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2} \text{ trái với giả thuyết } x \geq 2.$$

Bài 4. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua $Q(2;3)$ và cắt các tia ox, oy tại 2 điểm M, N khác điểm O sao cho $OM+ON$ đạt GTNN.

Trích từ Bài 10 trang 101 Sách bài tập hình học 10 ban nâng cao hiện hành

☞ Sai lầm HS thường gặp: Giả sử $M(m;0), N(0;n)$ với $m,n>0$.

Phương trình đường thẳng theo đoạn chắn là $\Delta: \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$.

$$\text{Do } Q(2;3) \in \Delta \Rightarrow \frac{2}{m} + \frac{3}{n} = 1$$

$$\text{Áp dụng BĐT Cô-si 2 số } \frac{2}{m}, \frac{3}{n} > 0: \frac{2}{m} + \frac{3}{n} \geq 2\sqrt{\frac{2}{m} \cdot \frac{3}{n}} \Rightarrow 1 \geq 2\sqrt{\frac{2}{m} \cdot \frac{3}{n}} \Rightarrow mn \geq 24$$

$$\text{Mặt khác } OM + ON = m + n \geq 2\sqrt{mn} = 2\sqrt{24} = 4\sqrt{6}.$$

$$\text{Do đó, } \min(OM + ON) = 4\sqrt{6}$$

☞ Nguyên nhân sai lầm:

Theo **thói quen**, HS không kiểm chứng lại dấu “=” của BĐT xảy ra khi nào? Cụ thể

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} \frac{2}{m} = \frac{3}{n} \\ m = n \end{cases} \Rightarrow m = n = 0 \text{ (Vô lý)}. \text{ Do đó dấu “=” không xảy ra.}$$

2) Khắc phục sai lầm, phân tích và định hướng cách giải

☞ Kỹ thuật dự đoán dấu bằng để tìm GTLN, GTNN của biểu thức:

B1: Dự đoán dấu “=” xảy ra:

☞ **Dấu hiệu:**

+Nếu biểu thức có điều kiện ràng buộc thì GTLN, GTNN của biểu thức thường đạt được tại vị trí biên.

+Nếu biểu thức có tính đối xứng thì dấu “=” thường xảy ra khi các biến bằng nhau.

+Nếu biểu thức không có tính đối xứng thì tùy theo bài toán mà linh hoạt áp dụng.

☞ **Mục đích:** Xác định giá trị các biến và GTLN, GTNN của biểu thức tại dấu “=” ở dự đoán ban đầu.

B2: Định hướng cách giải: Từ giá trị của các biến tại dấu “=” ở dự đoán ban đầu, ta suy ra giá trị của các biến và các BĐT tham gia đánh giá tại các thời điểm dấu “=” xảy ra. Mỗi phép đánh giá phải tuân theo nguyên tắc giá trị của các biến thuộc biểu thức tại các thời điểm dấu “=” xảy ra của các BĐT vẫn không thay đổi. Nghĩa là, dấu “=” ở mỗi lần đánh giá đều phải giống như dấu “=” ở dự đoán ban đầu.

Mục đích: Lập sơ đồ dấu “=”¹ xảy ra gồm các giá trị của các biến tại dấu “=” ở dự đoán ban đầu, tại mỗi thời điểm đánh giá, từ đó suy ra các BĐT đánh giá.

Để hiểu hơn chúng ta hãy áp dụng vào một số bài toán cụ thể sau:

Bài 1. Cho số thực $x \geq 2$. Tìm GTNN của $A = x + \frac{1}{x}$

B1 : Dự đoán dấu “=” xảy ra:

Ta có 2 lưu ý: + Một là, biểu thức có điều kiện $x \geq 2$

+ Hai là, hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$

Thật vậy $\forall x_1, x_2 \in (2; +\infty): x_1 > x_2 > 2$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) - \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) = (x_1 - x_2) \left(\frac{x_1 \cdot x_2 - 1}{x_1 \cdot x_2}\right) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Do đó x càng nhỏ thì A càng nhỏ. Dự đoán dấu “=” xảy ra tại $x = 2$ và $\min A = \frac{5}{2}$.

B2: Định hướng cách giải: Biểu thức A có chứa tổng x và $\frac{1}{x}$, để tìm GTNN của A ta phải dùng BĐT nào mà khi đánh giá các biến x phải triệt tiêu. Do đó, nghĩ ngay đến phép đánh giá tổng thành tích BĐT Cô-si 2 số không âm.

+Không thể áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số không âm x và $\frac{1}{x}$ vì dấu “=” không xảy ra

(nguyên tắc dấu “=” không đảm bảo).

¹ **Sơ đồ dấu “=”:** Theo Những viên kim cương trong bất đẳng thức toán học, Trần Phương, NXB Tri thức thì ¹ được gọi là “Sơ đồ điểm rơi”. Nhưng thuật ngữ “Sơ đồ điểm rơi” không được định nghĩa trong chương trình. Nên chúng tôi tạm gọi là **Sơ đồ dấu “=”** với mục đích cho HS dễ hiểu.

+Cho nên, ta phải tách x hoặc $\frac{1}{x}$ để khi áp dụng bất đẳng thức Cô-si 2 số không âm

thì **dấu “=” xảy ra**. Dấu “=” xảy ra tại $x=2$, kết hợp với nhận xét trên ta sử dụng

BĐT Cô-si cho cặp số $\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{1}{x}\right)$ thì $\frac{x}{\alpha} + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{\alpha} \cdot \frac{1}{x}} = 2\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$, dấu “=” xảy ra

$\Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \alpha=4 \end{cases}$ (**nguyên tắc dấu “=” vẫn đảm bảo**). Giá trị của $x=2$ tại dấu “=” ở

dự đoán ban đầu xảy ra cũng không thay đổi so với khi sử dụng BĐT Cô-si 2 số không âm. Để tiện hơn chúng ta dùng sơ đồ dấu “=” xảy ra:

$x=2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{\alpha} = \frac{2}{\alpha} \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 4$. Vậy ta nên phân tích A như sau:

$A = x + \frac{1}{x} = \frac{x}{4} + \frac{3x}{4} + \frac{1}{x} = \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right) + \frac{3x}{4}$ và ta có lời giải tương ứng.

Lời giải đúng

Áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số dương $\frac{x}{4}, \frac{1}{x} > 0$

$$A = x + \frac{1}{x} = \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right) + \frac{3x}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{x}} + \frac{3x}{4} \geq 1 + \frac{3 \cdot 2}{4} = \frac{5}{2}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{4} = \frac{1}{x}$ hay $x=2$. Vậy $\min A = \frac{5}{2}$.

Nhận xét: Để giải bài toán trên, ngoài cách chọn cặp số $\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{1}{x}\right)$ ta có thể chọn các

các cặp số sau: $\left(\alpha x, \frac{1}{x}\right)$ hoặc $\left(x, \frac{\alpha}{x}\right)$ hoặc $\left(x, \frac{1}{\alpha x}\right)$.

Bài 2. Cho $x, y > 0$ thỏa $x + y \leq 1$. Tìm GTNN của $A = x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

B1 : Dự đoán dấu “=” xảy ra

Do A là biểu thức đối xứng theo x, y nên dự đoán GTNN của A tại $x = y = \frac{1}{2}$

B2: Định hướng cách giải

+ Từ **Bài 1** và dấu “=” xảy ra tại $x = y = \frac{1}{2}$, ta phân tích $A = \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right)$

rồi đánh giá $\left(x + \frac{1}{x}\right), \left(y + \frac{1}{y}\right)$ theo như **Bài 1**.

Do đó ta có Sơ đồ dấu “=” như sau: $x = y = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\alpha} = \frac{1}{2\alpha} \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2\alpha} = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cô-si 2 số không âm

$$A = \left(4x + \frac{1}{x}\right) + \left(4y + \frac{1}{y}\right) - 3(x + y) \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{1}{x}} + 2\sqrt{4y \cdot \frac{1}{y}} - 3(x + y) \geq 8 - 3 = 5$$

Vậy $\text{Min}A = 5$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

Nhận xét: Để giải bài toán trên có thể dùng BĐT Cô-si 4 số không âm, nhưng do giới hạn chương trình nên chúng tôi chỉ dùng BĐT Cô-si 2 và 3 số không âm.

Bài 3. Cho $x, y, z > 0: x + y + z \leq \frac{3}{2}$. Tìm GTNN của $A = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

B1 : Dự đoán dấu “=” xảy ra

Do A là biểu thức đối xứng với x, y, z nên $\text{Min}A$ đạt tại $x = y = z = \frac{1}{2}$

B2: Định hướng cách giải

Sơ đồ : $x = y = z = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\alpha} = \frac{z}{\alpha} = \frac{1}{2\alpha} \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2\alpha} = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số không âm

$$A = \left(4x + \frac{1}{x}\right) + \left(4y + \frac{1}{y}\right) + \left(4z + \frac{1}{z}\right) - 3(x + y + z) \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{1}{x}} + 2\sqrt{4y \cdot \frac{1}{y}} + 2\sqrt{4z \cdot \frac{1}{z}} - 3(x + y + z) \\ \geq 12 - \frac{9}{2} = \frac{13}{2}$$

Vậy $MinA = \frac{13}{2}$ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$

Nhận xét: Với cùng kĩ thuật giải và BĐT Cô-si 2 số ta có bài toán tổng quát hơn:

Mở rộng Bài 3: Cho $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n > 0 : x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq \alpha$.

$$A = \beta(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) + \gamma\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) \text{ với } \beta - \frac{\gamma n^2}{\alpha^2} < 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma > 0 \text{ là}$$

$$\text{hằng số cho trước, } n \in \mathbb{N}^*) \text{ thì } MinA = \frac{\beta\alpha^2 + \gamma n^2}{\alpha} \text{ khi } x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = \frac{\alpha}{n}$$

Dễ dàng tìm được GTNN và cách làm dựa vào kĩ thuật dự đoán dấu “=” như trên.

Bài 4. Cho số thực $x \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x + \frac{1}{x^2}$

B1: Dự đoán dấu “=” xảy ra:

Hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ đồng biến trên $(2; +\infty)$. Thật vậy $\forall x_1, x_2 \in (2; +\infty) : x_1 > x_2 > 2$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = \left(x_1 + \frac{1}{x_1^2}\right) - \left(x_2 + \frac{1}{x_2^2}\right) = (x_1 - x_2) - \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 x_2^2}\right) \\ = (x_1 - x_2) \left(1 - \frac{x_1 + x_2}{x_1^2 x_2^2}\right) = (x_1 - x_2) \left(\frac{x_1^2 x_2^2 - x_1 - x_2}{x_1^2 x_2^2}\right) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$(\text{Do } \begin{cases} x_1 > 2 \\ x_2 > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 x_2^2 > 4x_1^2 \\ x_1^2 x_2^2 > 4x_2^2 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 x_2^2 > 2x_1^2 + 2x_2^2 > 4x_1 + 4x_2 > x_1 + x_2)$$

Do đó, x càng nhỏ thì A càng nhỏ. Ta dự đoán $MinA = \frac{9}{4}$ tại $x = 2$.

B2: Định hướng cách giải

+Không thể áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số $\frac{x}{2}, \frac{x}{2}$ và $\frac{1}{x^2}$ vì dấu “=” không xảy ra.

+Tách x hoặc $\frac{1}{x^2}$ để khi áp dụng BĐT Cô-si 3 số thì dấu “=” xảy ra .

+Sử dụng BĐT Cô-si cho bộ số $\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{x}{\alpha}, \frac{1}{x^2}\right)$ sao cho tại $x = 2$ thì $\frac{x}{\alpha} = \frac{x}{\alpha} = \frac{1}{x^2}$.

$$\text{Ta có sơ đồ dấu '=' : } x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{\alpha} = \frac{x}{\alpha} = \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{\alpha} = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = 8$$

Vậy $A = \frac{x}{8} + \frac{x}{8} + \frac{1}{x^2} + \frac{6}{8}x$ và ta có lời giải sau.

Lời Giải:

Áp dụng BĐT Cô-si 3 số không âm ta có

$$A = \left(\frac{x}{8} + \frac{x}{8} + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{6x}{8} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{8} \cdot \frac{x}{8} \cdot \frac{1}{x^2}} + \frac{6x}{8} \geq \frac{3}{4} + \frac{6 \cdot 2}{8} = \frac{9}{4}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 2$. Vậy $\text{Min } A = \text{Min} A = \frac{9}{4}$ tại $x = 2$.

Nhận xét: *Tương tự kĩ thuật giải và BĐT Cô-si 3 số ta có bài toán tổng quát hơn:*

Mở rộng Bài 4: Cho $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n > 0 : x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq \alpha$.

$$A = \beta(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) + \gamma \left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} \right) \text{ với } \beta - \frac{2\gamma n^3}{\alpha^3} < 0 (\alpha, \beta, \gamma > 0 \text{ là}$$

hằng số cho trước, $n \in \mathbb{N}^*$) thì $\text{Min} A = \frac{\beta\alpha^3 + \gamma n^3}{\alpha^2}$ khi $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = \frac{\alpha}{n}$

Bài 5. Cho số thực $x \geq 6$. Tìm GTNN của $A = x^2 + \frac{18}{x}$

B1: Dự đoán dấu “=” xảy ra

Do hàm số $f(x) = x^2 + \frac{18}{x}$ đồng biến trên $(6; +\infty)$ nên x càng nhỏ thì A càng nhỏ. Ta

dự đoán $\text{Min} A = 39$ khi $x = 6$.

B2: Định hướng cách giải

$$\text{Sơ đồ dấu "=" : } x=6 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{\alpha} = \frac{36}{\alpha} \\ \frac{9}{x} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{36}{\alpha} = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = 24$$

Lời Giải:

Áp dụng BĐT Cô-si 3 số không âm ta có:

$$A = \left(\frac{x^2}{24} + \frac{9}{x} + \frac{9}{x} \right) + \frac{23x^2}{24} \geq 3\sqrt{\frac{x^2}{24} \cdot \frac{9}{x} \cdot \frac{9}{x}} + \frac{23x^2}{24} \geq \frac{9}{2} + \frac{23 \cdot 36}{24} = 39$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x^2}{24} = \frac{9}{x} \Leftrightarrow x=6$. Vậy GTNN của A là 39

Bài 6. Cho $x, y, z > 0$ thỏa $x + y + z \leq \frac{3}{2}$. Tìm GTNN của $A = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

B1: Dự đoán dấu '=' xảy ra

Do A là biểu thức đối xứng theo x,y,z nên dự đoán MinA đạt tại $x = y = z = \frac{1}{2}$

B2: Định hướng cách giải

$$\text{Sơ đồ : } x = y = z = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{\alpha x} = \frac{1}{\alpha y} = \frac{1}{\alpha z} = \frac{2}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \alpha = 8$$

Lời Giải:

Áp dụng BĐT Cô-si 3 số không âm và Hệ quả ② của nó. Ta được:

$$\begin{aligned} A &= \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) + \left(y^2 + \frac{1}{y} \right) + \left(z^2 + \frac{1}{z} \right) \\ &= \left(x^2 + \frac{1}{8x} + \frac{1}{8x} \right) + \left(y^2 + \frac{1}{8y} + \frac{1}{8y} \right) + \left(z^2 + \frac{1}{8z} + \frac{1}{8z} \right) + \frac{6}{8} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \\ &\geq 3\sqrt{x^2 \frac{1}{8x} \frac{1}{8x}} + 3\sqrt{y^2 \frac{1}{8y} \frac{1}{8y}} + 3\sqrt{z^2 \frac{1}{8z} \frac{1}{8z}} + \frac{3}{4} \frac{9}{(x+y+z)} \geq \frac{9}{4} + \frac{27}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$.

$$\text{Vậy } \text{Min}A = \frac{27}{4}$$

Nhận xét: Tương tự ta có thể giải quyết được bài toán tổng quát hơn.

Mở rộng Bài 6: Cho $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n > 0 : x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq \alpha$.

$$A = \beta (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2) + \gamma \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \text{ với } \gamma - \frac{2\beta\alpha^3}{n^3} > 0$$

($\alpha, \beta, \gamma > 0$ là hằng số cho trước, $n \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{thì } \min A = \frac{\beta\alpha^3 + \gamma n^3}{n\alpha} \text{ khi } x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = \frac{\alpha}{n}$$

Bài 7. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Tìm GTLN

$$\text{của } P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \quad \text{Đề thi Đại học khối A năm 2005}$$

B1: Dự đoán dấu “=” xảy ra

Do P là biểu thức đối xứng với x, y, z nên dự đoán $\min P$ đạt tại $x = y = z = \frac{3}{4}$

B2: Định hướng cách giải

Nhận thấy để P có thể sử dụng giả thuyết $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$ thì

$\frac{1}{2x+y+z}, \frac{1}{x+2y+z}, \frac{1}{x+y+2z}, \frac{1}{2x+y+z}$, phải được tách thành tổng các số hạng

$\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$. Từ 1 số hạng ban đầu tách thành nhiều số hạng, nghĩ ngay đến Hệ quả ③

của BĐT Cô-si 2 số không âm $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, (a, b > 0)$.

$$\text{Do đó } \frac{1}{2x+y+z} = \frac{1}{(x+y)+(x+z)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(x+y)} + \frac{1}{(x+z)} \right) \leq \frac{1}{16} \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) \right].$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$ không thay đổi so với $x = y = z = \frac{3}{4}$ tại dấu “=” ở dự đoán

ban đầu xảy ra (**Đảm bảo nguyên tắc dấu “=” xảy ra**)

Lời Giải:

Áp dụng Hệ quả ③ của BĐT Cô-si 2 số không âm

$$\frac{1}{2x+y+z} = \frac{1}{(x+y)+(x+z)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(x+y)} + \frac{1}{(x+z)} \right) \leq \frac{1}{16} \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) \right]$$

Tương tự: $\frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$

$$\frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \right)$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta có:

$$P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z} \right) = 1$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{z} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{3}{4}$. Vậy $MaxP = 1$.

Nhận xét: Bằng kĩ thuật tương tự ta có thể giải quyết được bài toán mạnh hơn.

Mở rộng Bài toán 7: Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4 \end{cases}$.

$$P = \frac{1}{\alpha x + \beta y + \gamma z} + \frac{1}{\beta x + \gamma y + \alpha z} + \frac{1}{\gamma x + \alpha y + \beta z} \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^* \text{ hằng số cho trước})$$

$$\text{thì } MaxP = \frac{4}{\alpha + \beta + \gamma} \text{ khi } x = y = z = \frac{3}{4}$$

Thậm chí đối với các bài toán BĐT mà dấu bằng không xảy ra khi các biến bằng nhau. Nếu dự đoán được dấu bằng xảy ra, vẫn làm được

Bài 8. Cho $x, y, z > 0: \begin{cases} xy \geq 12 \\ yz \geq 8 \end{cases}$. Cmr: $(x+y+z) + 2 \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) + \frac{8}{xyz} \geq \frac{121}{12}$

B1: Dự đoán dấu “=” xảy ra

Dự đoán GTNN của A đạt được khi $\begin{cases} xy = 12 \\ yz = 8 \end{cases}$, tại $x = 3, y = 4, z = 2$.

B2: Định hướng cách giải...

Lời Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si 3 số không âm ta có:

$$\frac{x}{18} + \frac{y}{24} + \frac{2}{xy} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{18} \cdot \frac{y}{24} \cdot \frac{2}{xy}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{9} + \frac{z}{6} + \frac{2}{zx} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{9} \cdot \frac{z}{6} \cdot \frac{2}{zx}} = 1$$

$$\frac{y}{16} + \frac{z}{8} + \frac{2}{yz} \geq 3\sqrt[3]{\frac{y}{16} \cdot \frac{z}{8} \cdot \frac{2}{yz}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{x}{9} + \frac{z}{6} + \frac{y}{12} + \frac{8}{xyz} \geq 4\sqrt[4]{\frac{x}{9} \cdot \frac{z}{6} \cdot \frac{y}{12} \cdot \frac{8}{xyz}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{13x}{18} + \frac{13y}{24} \geq 2\sqrt{\frac{13x}{18} \cdot \frac{13y}{24}} \geq 2\sqrt{\frac{13}{18} \cdot \frac{13}{24} \cdot 12} = \frac{13}{3}$$

$$\frac{13y}{48} + \frac{13z}{24} \geq 2\sqrt{\frac{13y}{48} \cdot \frac{13z}{24}} \geq 2\sqrt{\frac{13}{48} \cdot \frac{13}{24} \cdot 8} = \frac{13}{4}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được:

$$(x + y + z) + 2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) + \frac{8}{xyz} \geq \frac{121}{12} \quad (\text{đpcm})$$

Bài 9. Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước 80cm x 50 cm. Hãy cắt đi ở bốn góc vuông những hình vuông bằng nhau để khi gấp lại theo mép cắt thì được một cái hộp (không nắp) có thể tích lớn nhất.

Trích từ Bài 4.22 trang 105 Sách bài tập đại số 10 ban nâng cao hiện hành
Dự đoán dấu ‘=’ xảy ra và Định hướng cách giải...

Gọi x (cm), $0 < x < 25$ là độ dài hình vuông được cắt.

Do đó $V = (80 - 2x)(50 - 2x)x$.

Để tìm GTLN của V cần áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số: $(80 - 2x), \alpha(50 - 2x), \beta x > 0$

$$\sqrt[3]{(80 - 2x) \cdot [\alpha(50 - 2x)] \cdot \beta x} \leq \frac{(80 - 2x) + \alpha(50 - 2x) + \beta x}{3} = \frac{80 + 50\alpha + (\beta - 2\alpha - 2)x}{3} \text{ thoả :}$$

+Một là, $\beta - 2\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \beta = 2\alpha + 2$

+Hai là, dấu “=” xảy ra khi $(80 - 2x) = \alpha(50 - 2x) = \beta x \Leftrightarrow (80 - 2x) = \alpha(50 - 2x) = (2\alpha + 2)x$

$$\text{Do đó: } \frac{25\alpha}{2\alpha+1} = \frac{40}{2+\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2(n) \\ \alpha = -40(l) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 6 \end{cases}$$

Lời Giải:

Gọi x (cm), $0 < x < 25$ là độ dài hình vuông được cắt.

$$\text{Do đó } V = (80 - 2x)(50 - 2x)x = \frac{1}{12}[(80 - 2x)(100 - 4x)6x]$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số $80 - 2x > 0, 100 - 4x > 0, 6x > 0$

$$\text{Ta có: } \sqrt[3]{(80 - 2x)(100 - 4x)6x} \leq \frac{(80 - 2x) + (100 - 4x) + 6x}{3} = 60$$

$$\Rightarrow (80 - 2x)(100 - 4x)6x \leq 60^3 \Rightarrow V \leq \frac{60^3}{12} = 18000. \text{ Vậy } \text{Max} V = 18000$$

khí $80 - 2x = 100 - 4x = 6x \Leftrightarrow x = 10.$

Bài 10. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua $Q(2;3)$ và cắt các tia ox, oy tại 2 điểm M, N khác điểm O sao cho $OM + ON$ đạt GTNN.

Trích từ Bài 10 trang 101 Sách bài tập hình học 10 ban nâng cao hiện hành

Lời Giải:

Giả sử $M(m;0), N(0;n)$ với $m, n > 0$.

Phương trình đường thẳng theo đoạn chắn là $\Delta: \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$

$$\text{Do } Q(2;3) \in \Delta \Rightarrow \frac{2}{m} + \frac{3}{n} = 1 \Rightarrow m = \frac{2n}{n-3}. \text{ Mà } m > 0 \text{ nên } n > 3$$

$$\text{Mặt khác } OM + ON = m + n = \frac{2n}{n-3} + n = \frac{6}{n-3} + n + 2 = \left(\frac{6}{n-3}\right) + (n-3) + 5.$$

$$\text{Áp dụng BĐT Cô-si 2 số } \left(\frac{6}{n-3}\right), (n-3) > 0: \left(\frac{6}{n-3}\right) + (n-3) \geq 2\sqrt{\left(\frac{6}{n-3}\right) \cdot (n-3)} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \left(\frac{6}{n-3}\right) = (n-3) \Leftrightarrow (n-3)^2 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3 + \sqrt{6} (n) \\ n = 3 - \sqrt{6} (l) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 + \sqrt{6} \\ n = 3 + \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \text{Min}(OM + ON) = 2\sqrt{6} + 5$$

3) Một thành hai

Kĩ thuật dự đoán dấu bằng xảy ra cho phép dự đoán GTLN, GTNN của biểu thức. Cho nên từ bài toán tìm GTNN, GTLN có thể chuyển đổi thành chứng minh BĐT và ngược lại. Đối với người ra đề, có thể linh hoạt chế từ một bài toán thành 2 bài toán khác nhau về mặt hình thức cho phong phú, mặc dù nội dung và cách giải

như nhau. Còn người học có thể học một biết hai. Vậy nên, giáo viên chỉ cần giảng một mà học sinh hiểu hai. Áp dụng đối với toàn bộ các bài trong SKKN này. Chẳng hạn từ **Bài 11**

Bài 11. Cho $x, y > 0 : x + y \leq 1$. Tìm GTNN của : $A = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy}$

B1: Dự đoán dấu ‘=’ xảy ra: Do A là biểu thức đối xứng theo x,y nên dự đoán dấu bằng xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Min}A=4$

B2: Định hướng cách giải: Sơ đồ : $x = y = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2} = 2 \\ \frac{\alpha}{2xy} = 2 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 1$

Lời Giải:

Áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số dương $\frac{1}{x^2 + y^2} > 0; \frac{1}{2xy} > 0$

$$A = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{(x^2 + y^2)2xy}} \geq 2 \cdot \frac{1}{\frac{x^2 + y^2 + 2xy}{2}} = \frac{4}{(x + y)^2} \geq 4$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$. Vậy $\text{Min}A = 4$.

Ta có thể thay đổi **Bài 11** dưới dạng chứng minh BĐT ta được **Bài 12**, phương pháp giải cũng tương tự.

Bài 12. Cho $x, y > 0 : x + y \leq 1$. Cmr : $A = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy} \geq 4$

Bài tập luyện tập

➤ ***Chứng minh BĐT***

Bài 1. Cho số thực $x \geq 4$. Chứng minh rằng $x + \frac{1}{x} \geq \frac{17}{4}$

Bài 2. Cho $x, y > 0 : x + y \leq 2$. Cmr $x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 4$

Bài 3. Cho $x, y > 0$. Cmr $\frac{x+y}{\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y} \geq \frac{5}{2}$

Bài 4. Cho $x, y > 0$ thỏa $x+y \leq 1$. Cmr $xy + \frac{1}{xy} \geq \frac{17}{4}$

Bài 5. Cho $x, y, z, t > 0: x+y+z+t \leq 1$. Cmr $2(x+y+z+t) + 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) \geq 50$

Bài 6. Cho $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n > 0: x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq \alpha$.

$$\text{Cmr: } \beta(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) + \gamma\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) \geq \frac{\beta\alpha^2 + \gamma n^2}{\alpha}$$

với $\left(\beta - \frac{\gamma n^2}{\alpha^2} < 0; \alpha, \beta, \gamma > 0\right)$ là hằng số cho trước, $n \in N^*$

Bài 7. Cho $x, y, z > 0$. Cmr $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq \frac{15}{2}$

Bài 8. Cho số thực $x \geq 2$. Cmr $x + \frac{1}{x^2} \geq \frac{9}{4}$

Bài 9. Cho số thực $x \geq 6$. Cmr $x^2 + \frac{1}{x} \geq \frac{217}{6}$

Bài 10. Cho $x, y, z, t > 0: x+y+z+t \leq 1$. Cmr $2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) \geq \frac{97}{2}$

Bài 11. Cho $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n > 0: x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq \alpha$.

$$\text{Cmr } \beta(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2) + \gamma\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) \geq \frac{\beta\alpha^3 + \gamma n^3}{n\alpha}$$

với $\left(\gamma - \frac{2\beta\alpha^3}{n^3} > 0; \alpha, \beta, \gamma > 0\right)$ là hằng số cho trước, $n \in N^*$

Bài 12. Cho $x, y > 0$ thỏa $x+y \leq 1$. Cmr $\frac{1}{1+x^2+y^2} + \frac{1}{2xy} \geq \frac{8}{3}$

Bài 13. Cho $x, y > 0$ thỏa $x+y \leq 1$. Cmr $\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{xy} + 4xy \geq 7$

Bài 14. Cho $x, y > 0$ thỏa $x+y \leq 1$. Cmr $\frac{1}{x^3+y^3} + \frac{1}{x^2y} + \frac{1}{xy^2} \geq 20$

Bài 15. Cho $x, y, z > 0: xyz = 1$. Cmr $P = \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}$

(Đại học khối D năm 2005)

Bài 16. Cho $x, y > 0: x+y=2$. Cmr: $P = \frac{x^3+y^2}{x^2} + \frac{x^2+y^3}{y^2} + \frac{3}{2x} + \frac{3}{2y} \geq 7$

Bài 17. Cho $x, y, z > 0$ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Cmr: $P = \frac{x}{y^2 + z^2} + \frac{y}{z^2 + x^2} + \frac{z}{x^2 + y^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Bài 18. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 1 \end{cases}$. Cmr $\frac{1}{\sqrt{2}x + y + z} + \frac{1}{x + \sqrt{2}y + z} + \frac{1}{x + y + \sqrt{2}z} \leq \frac{1}{\sqrt{2} + 2}$ Cho

Bài 19. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4 \end{cases}$.

Cmr $\frac{1}{\alpha x + \beta y + \gamma z} + \frac{1}{\beta x + \gamma y + \alpha z} + \frac{1}{\gamma x + \alpha y + \beta z} \leq \frac{4}{\alpha + \beta + \gamma}$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^*$ là hằng số)

Bài 20. $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$. Cmr $\sqrt[3]{x + 2y} + \sqrt[3]{y + 2z} + \sqrt[3]{z + 2x} \leq 3\sqrt[3]{3}$.

Bài 21. Cho $x, y, z > 0 : x + y + z = \frac{3}{4}$. Cmr $\sqrt[3]{x + 3y} + \sqrt[3]{y + 2z} + \sqrt[3]{z + 3x} \leq 3$

➤ Tìm GTNN, GTLN

Bài 22. Cho số thực $x \geq 4$. Tìm GTNN của $A = x + \frac{1}{x}$

Bài 23. Cho $x, y > 0 : x + y \leq 2$. Tìm GTNN của $A = x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

Bài 24. Cho $x, y > 0$. Tìm GTNN của $A = \frac{x + y}{\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{xy}}{x + y}$

Bài 25. Cho $x, y > 0 : x + y \leq 1$. Tìm GTNN của $A = xy + \frac{1}{xy}$

Bài 26. Cho $x, y, z > 0$ thỏa $x + y + z \leq 1$. Tìm GTNN: $P = x + y + z + 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$

Bài 27. Cho $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n > 0 : x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq \alpha$.

Tìm GTNN của $A = \beta(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) + \gamma\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)$

với $\beta - \frac{\gamma n^2}{\alpha^2} < 0$ ($\alpha, \beta, \gamma > 0$ là hằng số cho trước, $n \in \mathbb{N}^*$)

Bài 28. Cho $x, y, z > 0 : x + 2y + 3z \geq 20$. Tìm GTNN của $A = x + y + z + \frac{3}{x} + \frac{9}{2y} + \frac{4}{z}$

Bài 29. Cho $x, y, z > 0$. Tìm GTNN của $A = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z}$

Bài 30. Cho số thực $x \geq 2$. Tìm GTNN của $A = x + \frac{1}{x^2}$

Bài 31. Cho số thực $x \geq 6$. Tìm GTNN của $A = x^2 + \frac{1}{x}$

Bài 32. Cho $x, y, z, t > 0 : x + y + z + t \leq 1$.

Tìm GTNN $A = 2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right)$

Bài 33. Cho $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n > 0 : x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq \alpha$.

Tìm GTNN của $A = \beta(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2) + \gamma\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)$

với $\gamma - \frac{2\beta\alpha^3}{n^3} > 0$ ($\alpha, \beta, \gamma > 0$ là hằng số cho trước, $n \in \mathbb{N}^*$)

Bài 34. Cho $x, y > 0 : x + y \leq 1$. Tìm GTNN của $A = \frac{1}{1+x^2+y^2} + \frac{1}{2xy}$

Bài 35. Cho $x, y > 0$ thỏa $x + y \leq 1$. Tìm GTNN của $A = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{xy} + 4xy$

Bài 36. Cho $x, y > 0$ thỏa $x + y \leq 1$. Tìm GTNN của $A = \frac{1}{x^3+y^3} + \frac{1}{x^2y} + \frac{1}{xy^2}$

Bài 37. Cho $x, y, z > 0 : xyz = 1$. Tìm GTLN của

$$P = \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}$$

Bài 38. Cho x và y là hai số dương thỏa mãn $x+y=2$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{x^3+y^2}{x^2} + \frac{x^2+y^3}{y^2} + \frac{3}{2x} + \frac{3}{2y}$$

Bài 39. Cho $x, y, z > 0 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm GTNN của $P = \frac{x}{y^2+z^2} + \frac{y}{z^2+x^2} + \frac{z}{x^2+y^2}$

Bài 40. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 1 \end{cases}$. Tìm GTLN của $P = \frac{1}{\sqrt{2}x+y+z} + \frac{1}{x+\sqrt{2}y+z} + \frac{1}{x+y+\sqrt{2}z}$

Bài 41. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4 \end{cases}$. Tìm GTLN của

$$P = \frac{1}{\alpha x + \beta y + \gamma z} + \frac{1}{\beta x + \gamma y + \alpha z} + \frac{1}{\gamma x + \alpha y + \beta z} \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^* \text{ là 3 hằng số cho trước})$$

Bài 42. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$. Tìm GTLN của $P = \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{y+2z} + \sqrt[3]{z+2x}$

Bài 43. Cho $x, y, z > 0 : x + y + z = \frac{3}{4}$. Tìm GTLN của $P = \sqrt[3]{x+3y} + \sqrt[3]{y+2z} + \sqrt[3]{z+3x}$

IV. KẾT QUẢ

Khi áp dụng chuyên đề trên cho HS 10 thì tôi thấy HS rất thích thú, đồng thời các em cũng đỡ lúng túng hơn khi gặp các dạng bài tập trên.

V. BÀI HỌC KINH NGHIỆM

Nếu có thêm thời gian mở rộng thì tôi nghĩ rằng đề tài có thể trở nên có nhiều tác dụng hỗ trợ thiết thực trong việc rèn luyện và phát triển tư duy góp phần giải được khá nhiều dạng toán trong quá trình dạy học sinh nói chung và bồi dưỡng học sinh khá, giỏi nói riêng.

VI. KẾT LUẬN

- Áp dụng kĩ thuật dự đoán dấu “=” xảy ra trong bất đẳng thức Cô-si là phương pháp ngắn gọn, dễ hiểu, hiệu quả cho lớp bài toán khá rộng của BĐT, phù hợp với các học sinh lớp 10 và thi đại học.
- Kĩ thuật giải trên cho HS phát hiện, khắc phục sai lầm, dự đoán, đánh giá, định hướng cách giải bài toán.
- Hướng mở của SKKN: Mở rộng với các trường hợp Cô-si n số không âm, dấu “=” đối với BĐT Bunhiacôpski, Mincôpski, BĐT phụ. . .thì SKKN sẽ mạnh hơn với công tác bồi dưỡng HSG.
- Tuy nhiên, các dạng và phương pháp tôi lựa chọn chưa hẳn tối ưu và đầy đủ, chắc chắn còn phải bổ sung thêm cho việc giảng dạy tốt hơn. Rất mong có sự đóng góp của quý đồng nghiệp. Mọi góp ý của quý thầy, cô vui lòng gửi về địa chỉ mail: thangtatdo@yahoo.com

VII. TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Văn Như Cương, *Bài tập Hình học 10 ban nâng cao, năm 2006*, Nhà xuất bản giáo dục.
2. Lê Anh Dũng, *Tìm lời giải các bài toán bất đẳng thức, GTLN- GTNN nhờ dự đoán dấu bằng*, Trường chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, Kiên Giang.
3. Nguyễn Huy Đoan, *Bài tập Đại số 10 ban nâng cao, năm 2008*, Nhà xuất bản giáo dục.

4. Trần Văn Hạo, *Đại Số 10 ban cơ bản, năm 2007*, Nhà xuất giáo dục.
5. Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Tri thức.
6. Trần Phương, *Những viên kim cương trong bất đẳng thức toán học*, Nhà xuất bản Tri thức.
7. www.hsmath.net
8. www.mathvn.com

VIII. LỜI KẾT

Để hoàn tất được chuyên đề này. Tôi rất cảm ơn sự nhiệt tình giúp đỡ, tư vấn của Cô Lê Thanh Hà tổ trưởng, Thầy Lê Văn Đắc Mai tổ phó cùng cô Bùi Thanh Hà trong Tổ Toán Trường THPT Ngô Quyền để tôi hoàn thiện SKKN này.

	NGƯỜI THỰC HIỆN
	ĐỖ TẤT THẮNG