

Câu 1.

- a) Tìm các số nguyên m, n thỏa mãn $m = \frac{n^2 + n + 1}{n + 1}$
- b) Đặt $A = n^3 + 3n^2 + 5n + 3$. Chứng minh rằng A chia hết cho 3 với mọi giá trị nguyên dương của n
- c) Nếu a chia 13 dư 2 và b chia 13 dư 3 thì $a^2 + b^2$ chia hết cho 13

Câu 2. Rút gọn biểu thức:

a)
$$A = \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}$$

b)
$$B = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + x^3 + \frac{1}{x^3}}$$

Câu 3. Tính tổng:
$$S = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{2007.2009}$$

Câu 4. Cho 3 số x, y, z thỏa mãn điều kiện $xyz = 2009$. Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào các biến x, y, z :

$$\frac{2009x}{xy + 2009x + 2009} + \frac{y}{yz + y + 2009} + \frac{z}{xz + z + 1}$$

Câu 5. Giải phương trình:

$$\frac{59-x}{41} + \frac{57-x}{43} + \frac{55-x}{45} + \frac{53-x}{47} + \frac{51-x}{49} = -5$$

Câu 6. Cho tam giác đều ABC , gọi M là trung điểm của BC . Một góc $\sphericalangle My = 60^\circ$ quay quanh điểm M sao cho 2 cạnh Mx, My luôn cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại D và E . Chứng minh

a)
$$BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4}$$

b) DM, EM lần lượt là tia phân giác của các góc $\sphericalangle BDE$ và $\sphericalangle CED$

c) Chu vi tam giác ADE không đổi.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) Thực hiện chia
$$m = \frac{n^2 + n + 1}{n + 1} = n + \frac{1}{n + 1}$$

Để m nguyên với n nguyên khi $n + 1 \in U(1) = \{\pm 1\}$

Khi đó
$$\begin{cases} n + 1 = 1 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow m = 1 \\ n + 1 = -1 \Rightarrow n = -2 \Rightarrow m = -3 \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} A &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = (n + 1)^3 + 2(n + 1) = \dots \\ &= n(n + 1)(n + 2) + 3(n + 1) \end{aligned}$$

Khi đó: $3(n + 1) : 3$; $n(n + 1)(n + 2)$ là tích của 3 số nguyên dương liên tiếp nên chia hết cho 3 $\Rightarrow A : 3$

c) $a = 13k + 2, b = 13n + 3$

$$a^2 + b^2 = (13k + 2)^2 + (13n + 3)^2 = \dots = 13(13k^2 + 4k + 13n^2 + 4n + 1) : 13$$

Câu 2.

a) Rút gọn $A = 1$

b) Rút gọn
$$B = 3 \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

Câu 3.

$$S = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2007} - \frac{1}{2009} \right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2009} \right) = \frac{1004}{2009}$$

Câu 4.

$$\begin{aligned} & \frac{2009x}{2009 + 2009x + xy} + \frac{y}{xyz + y + yz} + \frac{z}{1 + z + zx} \\ &= \frac{xy \cdot xz}{xy(xz + z + 1)} + \frac{1}{1 + z + zx} + \frac{z}{1 + z + zx} = \frac{1 + z + xz}{1 + z + zx} = 1 \end{aligned}$$

Câu 5.

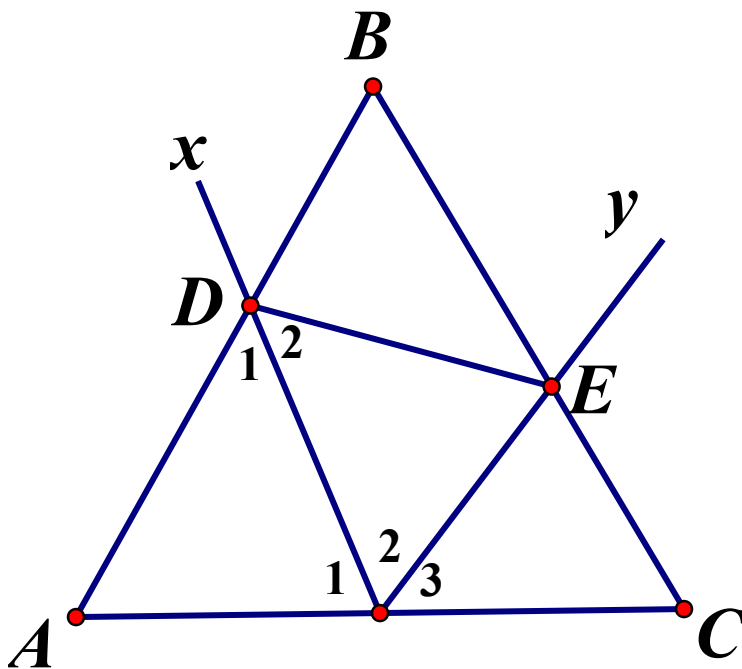
$$\frac{59-x}{41} + 1 + \frac{57-x}{43} + 1 + \frac{55-x}{45} + 1 + \frac{53-x}{47} + 1 + \frac{51-x}{49} + 1 = 0$$

.....

$$\Leftrightarrow (100-x) \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{43} + \frac{1}{45} + \frac{1}{47} + \frac{1}{49} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 100$$

Câu 6.



a) Chứng minh $\triangle BMD \sim \triangle CEM$

Vì $BM = CM = \frac{BC}{2}$, nên ta có: $BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4}$

b) Chứng minh $\triangle BMD \sim \triangle MED \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2$, do đó DM là tia phân giác \hat{BDE}

Chứng minh tương tự ta có EM là tia phân giác \hat{CED}

c) Gọi H, I, K là hình chiếu của M trên AB, DE, AC

Chứng minh $DH = DI, EI = EK$ Suy ra chu vi $ADE = 2AH$ không đổi