

BÀI TOÁN 1. BÀI TOÁN KẾT HỢP MẶT PHẪNG – ĐƯỜNG THẲNG – MẶT CẦU

Câu 1. (Đề Tham Khảo 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 1)$ và $C(-1; -1; 1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A , bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B , C và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1) , (S_2) , (S_3) .

Trả lời:

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $(S): (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$, điểm $M(7; 1; 3)$. Gọi Δ là đường thẳng di động luôn đi qua M và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại N . Tiếp điểm N di động trên đường tròn (T) có tâm $J(a, b, c)$. Gọi $k = 2a - 5b + 10c$, thì giá trị của k là?

Trả lời:

Câu 3. (Chuyên Đại Học Vinh 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(2; 1; 4)$, $N(5; 0; 0)$, $P(1; -3; 1)$. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P . Tìm c biết rằng $a + b + c < 5$.

Trả lời:

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(-3; 1; 1)$, $B(1; -1; 5)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 11 = 0$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C . Biết C luôn thuộc một đường tròn (T) cố định. Tính bán kính r của đường tròn (T) .

Trả lời:

Câu 5. (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}; \frac{7-\sqrt{3}}{2}; 3\right)$, $B\left(\frac{5-\sqrt{3}}{2}; \frac{7+\sqrt{3}}{2}; 3\right)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 6$. Xét mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$, $(a, b, c, d \in \mathbb{Z}; d < -5)$ là mặt phẳng thay đổi luôn đi qua hai điểm A, B . Gọi (N) là hình nón có đỉnh là tâm của mặt cầu (S) và đường tròn đáy là đường tròn giao tuyến của (P) và (S) . Tính giá trị của $T = |a + b + c + d|$ khi thiết diện qua trục của hình nón (N) có diện tích lớn nhất.

Trả lời:

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, xét số thực $m \in (0; 1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 10 = 0$ và $(\beta): \frac{x}{m} + \frac{y}{1-m} + \frac{z}{1} = 1$. Biết rằng, khi m thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng?

Trả lời:

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm $A(2; -2; 5)$ và tiếp xúc với ba mặt phẳng $(P): x = 1, (Q): y = -1$ và $(R): z = 1$ có bán kính bằng?

Trả lời:

Câu 8. (Đề Tham Khảo 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 1; 2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC \neq 0$?

Trả lời:

Câu 9. (Cụm 5 Trường Chuyên - ĐBSH - 2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$. Biết rằng (ABC) đi qua điểm $M\left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{72}{7}$. Tính $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Trả lời:

Câu 10. (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, điểm $M(a, b, c)$ thuộc mặt phẳng $(P): x + y + z - 6 = 0$ và cách đều các điểm $A(1; 6; 0), B(-2; 2; -1), C(5; -1; 3)$. Tích abc bằng?

Trả lời:

Câu 11. (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2021) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y + \sqrt{2})^2 + z^2 = 16$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a; b; c)$ (a, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng có phương trình $y - 2\sqrt{2} = 0$ sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

Trả lời:

Câu 12. (Nho Quan A – Ninh Bình – 2022) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét ba điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Biết rằng mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$ cắt mặt phẳng (ABC) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính là 4. Giá trị của biểu thức $a + b + c$ là?

Trả lời:

Câu 13. (THPT Cửa Lò – Nghệ An 2022) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 4y - z + 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-4)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 4$. Có bao nhiêu điểm M thuộc mặt phẳng Oxy với tung độ nguyên, mà từ điểm M kẻ được tiếp tuyến với (S) đồng thời vuông góc với mặt phẳng (P)

Trả lời:

Câu 14. (THPT Ninh Bình - Bạc Liêu 2022) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(2; 4; 0), D(0; 0; 6)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Có bao nhiêu mặt phẳng cắt (S) theo một đường tròn và diện tích hình tròn là 14π , đồng thời cách đều năm điểm O, A, B, C, D (O là gốc tọa độ)?

Trả lời:

Câu 15. (Sở Bình Thuận 2022) Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và $B; AD = 2AB = 2BC$ và SC vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Nếu $A(3; 0; 0); D(0; 3; 0); S(0; 0; 3)$ và C có hoành độ dương thì tung độ của B bằng?

Trả lời:

Câu 16. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội 2022) Trong không gian, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 6z + m = 0$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + z + m + 1 = 0$. Có bao nhiêu số tự nhiên m để không tồn tại điểm K nào thuộc mặt phẳng (P) mà qua điểm K kẻ được đường thẳng (d) cắt mặt cầu (S) tại A, B thỏa mãn $\frac{KA}{KB} = 16$?

Trả lời:

Câu 17. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội 2022) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$, $B\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $C(1; 1; 4)$, $D(5; 3; 0)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A bán kính bằng 3, (S_2) là mặt cầu tâm B bán kính bằng $\frac{3}{2}$. Có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với 2 mặt cầu (S_1) , (S_2) đồng thời song song với đường thẳng qua C và D ?

Trả lời:

Câu 18. (Sở Bắc Ninh 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 12$ và mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 2z + 11 = 0$. Lấy điểm M tùy ý trên (α) . Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) , với A, B, C là các tiếp điểm đôi một phân biệt. Khi M thay đổi thì mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm cố định $E(a; b; c)$. Tổng $a + b + c$ bằng?

Trả lời:

Câu 19. (Sở Thanh Hóa 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; 1; 4)$, $B(2; 5; 4)$, $C\left(\frac{-5}{2}; 5; -1\right)$ và $D(-3; 1; -4)$. Các điểm M, N thỏa mãn $MA^2 + 3MB^2 = 48$ và $ND^2 = (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{ND}$. Tìm độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng MN .

Trả lời:

Câu 20. (Sở Hòa Bình 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và điểm $M(4; 2; 3)$. Một đường thẳng bất kì đi qua M cắt (S) tại A, B . Khi đó giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + 4MB^2$ bằng

Trả lời:

Câu 21. (Chuyên Quang Trung – Bình Phước 2023) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4; 0; 0)$, $B(1; 2; 3)$. Gọi M là điểm di động thỏa mãn $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{\sqrt{3} \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA}}{2}$ và $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO} = 0$. Gọi p, q lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của BM . Giá trị $p^2 + q^2$ bằng?

Trả lời:

Câu 22. (Chuyên Lam Sơn-Thanh Hoá 2023) Trong không gian $Oxyz$ cho tứ diện $OABC$ với $O(0; 0; 0)$, $A(1; -2; 2)$, $B(2; 2; 1)$ và $C\left(-\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{14}{3}\right)$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính OA . Một tiếp tuyến MN thay đổi tiếp xúc với (S) tại tiếp điểm H (M thuộc tia AC , N thuộc tia OB). Biết khi M, N thay đổi thì H di động trên mặt phẳng (Q) cố định có phương trình $ax + by - z + c = 0$. Tính $a + b + c$.

Trả lời:

Câu 23. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1; 1; 2)$. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng?

Trả lời:

Câu 24. (Sở Lạng Sơn 2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$. Xét điểm $M(a; b; c)$ với $a < 0$ thuộc d sao cho từ M kẻ được 3 tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) thỏa mãn $\angle AMB = 60^\circ$, $\angle BMC = 90^\circ$, $\angle CMA = 120^\circ$. Tổng $a + b + c$ bằng?

Trả lời:

Câu 25. (Chuyên Vinh 2024) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $C(0; 0; 3)$ và hai điểm A, B lần lượt thay đổi trên hai trục Ox, Oy (A, B khác O) sao cho $OA + OB = 2$. Gọi I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Biết rằng I luôn chạy trên các cạnh của một tứ giác cố định, diện tích của tứ giác đó bằng?

Trả lời:

Câu 26. (Liên trường Quảng Nam cụm Điện Bàn 2024) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 2; -3), B\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right), C(1; 1; 4), D(5; 3; 0)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A bán kính bằng $3, (S_2)$ là mặt cầu tâm B bán kính bằng $\frac{3}{2}$. Có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với 2 mặt cầu $(S_1), (S_2)$ đồng thời song song với đường thẳng đi qua 2 điểm C, D .

Trả lời:

Câu 27. (THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa 2024x) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-4)^2 + (y+3)^2 + (z+6)^2 = 50$ và đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-1}$. Có bao nhiêu điểm M thuộc trục hoành, với hoành độ là số nguyên dương, mà từ M kẻ được đến (S) hai tiếp tuyến cùng vuông góc với d ?

Trả lời:

Câu 28. (Sở Hòa Bình 2024) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 2)$ và hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 1 = 0, (S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 15 = 0$. Gọi đường thẳng d là tiếp tuyến chung của hai mặt cầu $(S_1), (S_2), H$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng d . Biết khi d thay đổi thì điểm H luôn chạy trên một đường tròn (C) cố định. Bán kính của đường tròn (C) bằng?

Trả lời:

Câu 29. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ 2024) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; -1; 1)$ và $B(1; 1; 0)$. Điểm M thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $OM = \sqrt{13}$, đường thẳng d qua M song song Oz cắt đường thẳng AB tại điểm $C(a; b; c) (a > 0)$. Giá trị của $a + b + c$ bằng?

Trả lời:

Câu 30. (Cụm Quảng Nam 2024) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 6), D(2; 4; 6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với mặt phẳng $(ABC), (P)$ cắt các cạnh DA, DB, DC lần lượt tại A', B', C' sao cho thể tích khối tứ diện $A'B'C'D$ bằng $\frac{1}{8}$ thể tích khối tứ diện $ABCD$. Khi đó, mặt phẳng (P) có phương trình: $ax + by + cz + d = 0$. Biết $c = 4$, hãy tính giá trị biểu thức $T = a^2 - b^3 - d$.

Trả lời:

Câu 31. (Sở Hà Nam 2024) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$. Có bao nhiêu điểm $M(a;b;c)$ (với a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho tồn tại ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua M và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

Trả lời: